

# Cognitieve psychologie en wiskundeonderwijs: Een “dangerous liaison”?

L. Verschaffel, E. van Lieshout en W. van Dooren

## Samenvatting

In dit inleidende artikel schetsen we hoe, tegen de achtergrond van belangrijke ontwikkelingen in de psychologie vanaf de jaren 1950, de psychologie van wiskundeleren en -onderwijzen zich als een eigen wetenschappelijke subdiscipline heeft ontwikkeld. Terwijl de invloed van de psychologie als ‘hulpwetenschap’ aanvankelijk zeer ingrijpend was, werd de suprematie ervan steeds meer in vraag gesteld. Bovendien brokkelde de impact van de sterk cognitivistisch geïnspireerde informatieverwerkingspsychologie geleidelijk aan af en werden andere theoretische en methodologische benaderingen steeds invloedrijker. Gedurende de laatste jaren echter lijken cognitief-psychologische denkkaders en daarbij aansluitende methodologieën evenwel opnieuw in opmars. Te denken valt daarbij aan Baddeley’s werkgeheugenmodel, Sweller’s *cognitive load*-theorie, Siegler’s model van ontwikkeling en keuze van cognitieve strategieën, allerhande *dual process*-theorieën, Dehaene’s *triple code*-model van numerieke cognitie, enzovoort. Op het einde geven we een introductie op de vier bijdragen die de mogelijke relevantie van één van deze cognitief-psychologische invalshoeken voor het onderzoek van wiskundeleren en -onderwijzen beschrijven, illustreren en bediscussiëren, en op de twee discussiebijdragen.

Vanaf de jaren zeventig van de vorige eeuw is (*psychology of mathematics education*) uitgegroeid tot een zelfstandige wetenschappelijke discipline die geïnspireerd en geholpen wordt vanuit een veelheid aan hulpwetenschappen (waaronder wiskunde, geschiedenis, psychologie, onderwijskunde, sociologie, antropologie, epistemologie, enz.). Toch onderhoudt deze discipline nog altijd een bijzonder nauwe – een volgens velen geprivilegeerde – band met de psychologie. Die band is echter niet altijd zo nauw geweest en op meerdere momenten van hun geschiedenis was de rela-

tie tussen psychologie en (*psychology of mathematics education*) zelfs erg gespannen. Zoals meerdere auteurs hebben beschreven (zie o.a. De Corte, Greer, & Verschaffel, 1996; Kilpatrick, 1992), was er voor het ontstaan van (*psychology of mathematics education*) als aparte wetenschappelijke discipline – met haar eigen wetenschappelijke tijdschriften, congressen, verenigingen, wetenschappelijke instituten, leerstoelen, enz. – nauwelijks interactie tussen de twee soorten van onderzoekers die actief waren op het domein van wiskundeleren en -onderwijzen. Aan de ene kant waren er de (onderwijs)psychologen, die de wiskunde kozen als een aantrekkelijk proefveld voor hun algemene theorieën over cognitie, leren en instructie. Zo schreef Kilpatrick (1981, p. 25) over Thorn-dike dat “(h)is theory was his hammer; he looked around and saw the arithmetic curriculum as something to pound”. Aan de andere kant waren er de wiskundigen en wiskundededidactici, die vanuit een grote affiniteit met het vakgebied en/of vanuit een rijke ervaring als leraar wiskunde of opleider van toekomstige leraars (wiskunde), reflecteerden over de opbouw van hun vakgebied, interessante observaties bij leerlingen en studenten commentarieerden, voorstellen deden voor nieuwe leermaterialen of didactische aanpakken waar ze succes mee hadden geboekt, enzovoort. Vaak gebeurde dit zonder enige verwijzing naar theoretische inzichten uit de (onderwijs)psychologie, en zonder gebruik te maken van empirische evidentie verkregen via (onderwijs)psychologische onderzoeksmethoden. Tot de bekende voorbeelden van eminente wiskundigen met een zeer grote interesse en expertise in de wiskundededictiek behoren Polya, Dienes, Freudenthal, Rouché en Wittmann.

In de periode die voorafging aan het ontstaan van (*psychology of math education*) als een zelfstandige discipline waren beide groepen onderzoekers nauwelijks bekend met elkaars werk. En als men al de moeite deed om

daar kennis van te nemen, dan stoorden de (onderwijs)psychologen zich aan het gebrek aan interne validiteit van de onderzoeken van de *math educators*, terwijl deze laatsten zich beklaagden over de geringe relevantie of ecologische validiteit van de resultaten van het (onderwijs)psychologisch onderzoek. Zo wees Freudenthal (zie onder meer 1991, p. 149) meermaals op de geringe betekenis van (onderwijs)psychologisch onderzoek voor (de theorievorming over) het wiskundeonderwijs “as long as, for the researcher, mathematics is no more than an easily available and an easily handled subject matter, chosen to test and apply general ideas and methods, with no regard for the specific nature of mathematics and mathematics instruction”. Een ander belangrijk punt waarop (onderwijs)psychologen en *math educators* sterk van elkaar verschillen, had te maken met de balans tussen de vraag naar *what is* en naar *what should be* (Bishop, 1992, p. 714). (Onderwijs)psychologen die actief waren op het terrein van wiskundeleren en -onderwijzen namen de doelen en de inhouden van het vak meestal als een *uncontroversial given*; op basis van hun onderzoek deden ze misschien wel een of andere aanbeveling ter verbetering van de formulering of presentatie van de wiskundeopgaven, de ordening van de leertaken, of de didactische aanpak, maar slechts zelden stelden zij de fundamentele doelen en inhouden in vraag. Terwijl dit laatste juist een cruciaal aandachtspunt van de *math educators* was. Vaak voerden zij fenomenologische, historische en epistemologische analyses uit van wiskundige concepten, om op basis daarvan onderwijsdoelen en -inhouden bij te stellen.

Tegen de achtergrond van allerlei ingrijpende veranderingen zowel in de psychologie (met name de opkomst van de cognitieve [informatieverwerkings]psychologie) als in de wiskunde en de wiskundendidactiek (inz. de opkomst van de ‘New Math’) heeft (*psychology of mathematics education*) zich vanaf de jaren vijftig van de vorige eeuw geleidelijk aan ontwikkeld tot een aparte en erkende wetenschappelijke discipline. Kilpatrick (1992, p. 3) drukte het als volgt uit:

Research in mathematics education has struggled to achieve its own identity. It has tried to formulate its own issues and its

own ways of addressing them. It has tried to define itself and to develop a cadre of people who identify themselves as researchers in mathematics education.

En hij voegde er aan toe: “During the last two decades, that task of self-definition has largely been accomplished”.

Een mijlpaal in de ontwikkeling van (*psychology of math education*) als apart wetenschapsgebied was de oprichting van de International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), die in 1977 te Utrecht haar eerste congres hield. Deze internationale vereniging was – onder impuls van Freudenthal – ontstaan uit een bijzonder actieve werkgroep rond Psychology and Mathematics Education op het tweede International Congress on Mathematics Education (ICME 2, Exeter, 1972). In de eerste opdrachtverklaring, voorgesteld en aanvaard tijdens het PME-congres van 1980, werd het doel van de vereniging als volgt omschreven:

1) to promote international contacts and exchange of scientific information in the field of mathematical education; 2) to promote and stimulate interdisciplinary research in the aforesaid area; and 3) to further a deeper and more correct understanding of the psychological and other aspects of teaching and learning mathematics and the implications thereof (International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2007).

Vanaf het ontstaan van (*psychology of math education*) als wetenschappelijke discipline tot op de dag van vandaag is de relatie met de algemene psychologie in het algemeen en de cognitieve psychologie in het bijzonder nogal wisselend geweest. Zo kwamen, naarmate deze jonge discipline zich verder ontwikkelde, andere hulpwetenschappen (inz. geschiedenis, filosofie, sociologie, antropologie, semiotiek, epistemologie, etc.) en hun bijhorende apparaat van onderzoeksmethoden en -technieken, steeds sterker op de voorgrond en kwam de psychologie steeds meer in de verdrukking. Zodanig zelfs, dat op een bepaald moment de P van PME in vraag werd gesteld, onder meer door De Lange in zijn plenaire lezing op het 25<sup>ste</sup> PME congres in 2001 te Utrecht getiteld “The P in PME: Progress and problems in mathematics edu-

cation 2001”, maar ook via terugkerende tussenkomsten tijdens de algemene ledenvergaderingen op de jaarlijkse PME-congressen en via lezersbrieven in de *PME Newsletter* uit die periode. Uiteindelijk is de oorspronkelijke naam PME bewaard gebleven en is er ook nauwelijks iets aan de oorspronkelijke *constitution* veranderd, maar dat de psychologie haar positie als (vrijwel) enige of geprivilegerde hulpwetenschap heeft moeten opgeven, is zonneklaar (De Corte e.a., 1996).

Een bijkomende ontwikkeling is dat ten gevolge van allerhande evoluties op wetenschappelijk en maatschappelijk gebied de specifieke bijdrage van de *cognitieve psychologie* tot de (*psychology of math education*) verminderde ten gunste van andere algemeen-psychologische benaderingen van cognitie, leren en instructie zoals het socio-constructivisme, het situationisme, Vygotsky’s cultuurhistorische theorie, e.d. (De Corte e.a., 1996).

Afgaand op de programma’s van congressen en de inhoud van de tijdschriften en boeken op het terrein van de (*psychology of mathematics education*) lijkt er de laatste jaren echter sprake te zijn van een soort van *revival* van de cognitieve psychologie binnen het onderzoek van wiskundeleren en -onderwijzen. Steeds meer onderzoekers die actief zijn op dit terrein maken nadrukkelijk gebruik van de (werk)geheugentheorie van Baddeley (2002), kaderen hun onderzoek in Sweller’s *cognitive load*-theorie (Sweller, 1994), baseren zich mede op Siegler’s model van *strategy choice and change* (Siegler, 1996), op één of andere *dual process*-theorie (zie bijv. Evans, 2006), of *triple code*-model van Dehaene (zie onder meer Dehaene, Piazza, Pinel, & Cohen, 2003) of andere neurowetenschappelijk gebaseerde theorieën of bevindingen.

In deze *revival* van cognitief-psychologische theorieën binnen het internationaal onderzoek van wiskundeleren en -onderwijzen, kadert allicht ook het recente initiatief om onderzoeksgroepen aan universiteiten en instituten in Nederland en Vlaanderen die zich bezig houden met kwantitatief onderzoek naar rekenvaardigheden van kinderen in de basisschoolleeftijd, samen te brengen op een jaarlijkse expertmeeting, met als doel communicatie tussen deze onderzoeksgroepen te

bevorderen. De eerste meeting vond plaats in april 2008 op de Universiteit van Amsterdam; de tweede meeting is gepland in november 2009 te Utrecht. Onderhavig themanummer is een ander initiatief dat in deze *revival* past. Bedoeling is het huidige spanningsveld tussen cognitieve psychologie en wiskunde-didactiek te verkennen door een viertal cognitief-psychologische theorieën, van waaruit onderzoek op het terrein van het wiskundig denken, leren en onderwijzen wordt opgezet, kritisch te bespreken. Dit gebeurt telkens aan de hand van concreet eigen onderzoek, maar met aandacht voor algemene vragen zoals: Welke zijn de uitgangspunten en perspectieven? Met welke theoretische en/of methodologische moeilijkheden heeft men te kampen bij toepassing ervan op het terrein van het wiskundeonderwijsonderzoek? Wat is de *state-of-the-art* in het toepassen van deze theoretische kaders? Tot welke nieuwe inzichten met betrekking tot wiskundeleren en -onderwijzen hebben zij al geleid? Enzovoorts.

In een eerste bijdrage tot het themanummer onderzoeken Kroesbergen, Van der Ven, Kolkman, Van Luit en Leseman, gebruikmakend van het werkgeheugenmodel van Baddeley (2002), de rol van drie executieve functies (nl. *inhibitie*, *shifting* en *updating*) in de ontwikkeling van de (voorbereidende) rekenvaardigheid. Dit wordt toegelicht aan de hand van twee studies bij respectievelijk kinderen uit groep 1 en 2 in Nederland (2<sup>de</sup> en 3<sup>de</sup> kleuterklas in Vlaanderen) en groep 3 in Nederland (1<sup>ste</sup> leerjaar in Vlaanderen). De resultaten laten zien dat de *updating*-factor de belangrijkste voorspeller is van rekenvaardigheid in groep 1 tot 3. De conclusies worden besproken in het licht van de validiteit van het gemaakte onderscheid tussen de onderscheiden executieve functies.

De tweede bijdrage van Van Lieshout en Berends handelt over het effect van illustraties bij rekenopgaven. Als theoretisch kader maken zij gebruik van de cognitieve belastingstheorie van Sweller (1994), die gaat over de werkgeheugenbelasting die door diverse factoren tijdens het (leren) uitvoeren van allerhande cognitieve taken ontstaat. Deze factoren kunnen onder meer betrekking hebben op gelijktijdige aanwezigheid van twee informatiebronnen zoals een plaatje en tekst, zoals

vaak bij (moderne) rekenvraagstukjes het geval is. Hoewel deze illustraties ter ondersteuning van de tekst zijn bedoeld, kunnen vanuit de cognitieve belastingstheorie negatieve effecten door overbelasting voorspeld worden. Een aantal concepten van de theorie die relevant zijn voor het oplossen van geïllustreerde vraagstukjes worden toegelicht aan de hand van twee onderzoeken bij oudere en jongere leerlingen in het primair onderwijs. Bij de oudere leerlingen bleken illustraties inderdaad een nadelig effect te kunnen hebben. Bij de jongere leerlingen was dit vooralsnog onduidelijk. Verschillen in werkgeheugen-capaciteit lijken ook van belang.

Luwel, Torbeys, Schillemans en Verschaffel bestudeerden het strategiekeuzeproces bij wiskundetaken gebruikmakend van Siegler's theorie van de keuze en ontwikkeling van cognitieve strategieën voor het oplossen van wiskundeopgaven. Zij staan vooral stil bij een van de componenten die onlangs aan Siegler (1996) meest recente model, de Strategy Choice And Discovery Simulation (SCADS), zijn toegevoegd, namelijk de zogenaamde *priming*-module. Uit deze theoretische component hebben ze een concrete hypothese met betrekking tot het optreden van *priming*-effecten in het strategiekeuzeproces afgeleid en daarna in twee experimenten getest. Beide experimenten bevestigden de hypothese dat de voorafgaande toepassing van een bepaalde strategie een invloed heeft op de daaropvolgende strategiekeuze en bieden als zodanig empirische steun voor het belang van primingeffecten bij het maken van strategiekeuzes bij wiskunde-opgaven.

Gillard, Van Dooren, Schaeken en Verschaffel ten slotte hebben inzichten uit de *dual process*-theorieën (zie onder meer Evans, 2006) toegepast op het (leren) oplossen van wiskundige problemen. Eerst geven ze een overzicht van dit *dual process*-kader, dat in de algemene cognitieve psychologie veel gebruikt wordt om twee verschillende en met elkaar interagerende soorten redeneerprocessen – nl. heuristische en analytische – te onderscheiden. Ze gaan daarbij in op de kern van de theoretische assumpties en op enkele belangrijke onderzoeklijnen en -methoden. Daarna bespreken ze eigen onderzoek waarin ze het overmatige gebruik van propor-

tionele oplossingsmethoden geïnterpreteerd hebben volgens een *dual process*-kader en aan de hand van methoden ontleend aan de algemene cognitieve psychologie. Op het einde van hun bijdrage confronteren ze de *dual process*-benadering uit de algemene cognitieve psychologie met een verwant doch meer vak-didactisch geïnspireerd theoretisch kader, nl. de *intuitive rules*-theorie van Stavy en Tirosh (2000).

Het themanummer wordt afgesloten met twee discussiebijdragen waarin de verschillende bijdragen kritisch onder de loep worden genomen. Enerzijds vanuit (cognitief-)psychologische hoek door Imbo en Van Dierendonck en anderzijds vanuit wiskunde-didactische hoek door Van Eerde en Nelissen.

Tot slot. Hierboven verwezen we naar het recent initiatief om jaarlijks een expertmeeting te organiseren met als doel communicatie tussen onderzoekers uit ons taalgebied die actief zijn op het terrein van wiskundeleren en -onderwijzen te bevorderen. Wellicht mede omdat in de oproep tot actieve deelname aan deze meetings sterk de klemtoon gelegd werd op *kwantitatief* onderzoek, werd de oproep vooral beantwoord door (experimenteel- en kwantitatief-)psychologen, en veel minder door vooral vakdidactisch geïnspireerde onderzoekers, die bij voorkeur gebruik maken van andere, meer kwalitatief-geörienteerde onderzoeksmethoden en -technieken, inz. *design experiments*. In het licht van het hierboven geschetste beeld van het ontstaan en de ontwikkeling van (*psychology of*) *mathematics education* zou het erg jammer zijn als dit op zich waardevol initiatief de verdere toenadering van verschillende categorieën van onderzoekers van het wiskundeleren en -onderwijzen in ons taalgebied eerder zou verhinderen dan bevorderen.

## Literatuur

- Baddeley, A. D. (2002). Is working memory still working? *European Psychologist*, 7, 85-97.
- Bishop, A. J. (1992). International perspectives on research in mathematics education. In D.A. Grouws (Ed.) *Handbook of research on mathematics education* (pp. 710-723). New York: Macmillan

- De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. (1996). Learning and teaching mathematics. In D. Berliner & R. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 491-549). New York: Macmillan.
- Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, 20, 487-506.
- Evans, J. St. B. T. (2006). The heuristic-analytic theory of reasoning: Extension and evaluation. *Psychonomic Bulletin and Review*, 13, 378-395.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht, Nederland: Kluwer.
- Kilpatrick, J. (1981). The reasonable ineffectiveness of research in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 2(2), 22-29.
- Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics Education. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics education* (pp. 3-38). New York: Macmillan.
- International Group for the Psychology of Mathematics Education (2007). *Constitution*. Opgehaald op 13 juli 2009 van, <http://igpme.org/view.asp?ItemID=2&tname=tblComponent2&oname=Online%20pages&pg=front>.
- Siegler, R. S. (1996). *Emerging minds*. New York: Oxford University Press.
- Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (Mis-) Understand Science and Mathematics: Intuitive Rules*. Teachers College Press.
- Sweller, J. (1994). Cognitive load theory, learning difficulty, and instructional design. *Learning and Instruction*, 4, 295-312.

Manuscript aanvaard: 28 juli 2009

## Auteurs

**Lieven Verschaffel** is werkzaam bij het Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie, Katholieke Universiteit Leuven, **Ernest C. D. M. van Lieshout** bij de Afdeling Orthopedagogiek, Faculteit der Psychologie en Pedagogiek, Vrije Universiteit Amsterdam, en **Wim van Dooren**, Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie, Katholieke Universiteit Leuven.

*Correspondentieadres:* Lieven Verschaffel, Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie, Katholieke Universiteit Leuven, Vesaliusstraat 2, B-3000 Leuven, België, [lieven.verschaffel@ped.kuleuven.be](mailto:lieven.verschaffel@ped.kuleuven.be).

## Abstract

### **Cognitive psychology and mathematics education: A “dangerous liaison”?**

In this introductory paper we briefly sketch how, against the background of important changes in psychology from the late 1950s onward, research in (psychology of) mathematics education has been emerging as a field in its own right. While in the beginning psychology played the role of the major contributory discipline for this new field, the supremacy of psychology was increasingly challenged. Furthermore, the impact of cognitive psychology as the leading psychological orientation decreased and other psychological orientations, such as socio-constructivism, situated cognition, and Vygotsky's theory became more influential. During the past few years, there seems to be a renewed interest among researchers of mathematics education for cognitive psychological theories, such as Baddeley's model of working memory, Sweller's cognitive load theory, Siegler's model of strategy choice and change, various dual process theories, or Dehaene's triple code model of numerical cognition. In the present special issue, four papers describe, illustrate, and discuss the potential relevance of four of these cognitive theories for understanding and improving mathematics learning and teaching.