

Dual process-theorieën toegepast op het (leren) oplossen van wiskundige problemen¹

E. Gillard, W. van Dooren, W. Schaeken en L. Verschaffel

Samenvatting

Het onderscheid tussen heuristische/intuïtieve en analytische redeneerpatronen wordt vaak aangehaald om het ondermaats presteren van mensen op een variëteit aan taken te verklaren. Zowel binnen de vakspecifieke psychologie van het wiskundeonderwijs als binnen de algemene cognitieve psychologie wordt veelvuldig verwezen naar dit onderscheid. We geven eerst een overzicht van de het *dual process*-kader, dat in de algemene cognitieve psychologie veel gebruikt wordt om heuristische van analytische redeneerpatronen te onderscheiden. We gaan daarbij in op de kern van de theoretische assumpties, en enkele belangrijke onderzoeklijnen en -methoden. Daarna slaan we de brug naar de vakspecifieke psychologie van het wiskundeonderwijs. We bespreken eerst eigen onderzoek waarin we het overmatige gebruik van proportionele oplossingsmethoden geïnterpreteerd hebben volgens een *dual process*-kader en aan de hand van methoden, ontleend aan de algemene cognitieve psychologie. Vervolgens bespreken we de *intuitive rules*-theorie en geven we een overzicht van de meest recente experimentele studies in dat gebied.

1 Inleiding

Onderzoekers actief op het terrein van het wiskundeleren en -onderwijs worden geregeld geconfronteerd met het feit dat mensen vaak ondermaats presteren op een taak, terwijl ze de benodigde kennis en vaardigheden hebben om correct te antwoorden. Opvallend is dat dit zelfs voorkomt in situaties waar het correcte antwoord geen ingewikkelde oplossingsmethodes vereist. Zo wordt bijvoorbeeld vaak het proportionele antwoord $30 \times 3 = 90$ in plaats van het additieve antwoord $30 + 10 = 40$ gegeven op het volgende niet-proportionele vraagstuk “Ellen en Kim lopen rondjes op een piste. Ze lopen even snel, maar Ellen

startte later. Wanneer Ellen 5 rondjes gelopen heeft, heeft Kim er 15 gelopen. Wanneer Ellen 30 rondjes gelopen heeft, hoeveel heeft Kim er dan gelopen?” De ontwikkelingscurve van Vlaamse leerlingen voor dit soort vraagstukken toont dat proportionele fouten zich beginnen te manifesteren in het vierde leerjaar (groep 6) en dat hun aantal toeneemt tot het zesde leerjaar (groep 8), wat samenvalt met respectievelijk het begin en het einde van het systematisch onderwijzen en inoefenen van proportionele oplossingsmethodes (Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, & Verschaffel, 2005). Ook volwassenen vallen nog aan deze fout ten prooi (Cramer, Post, & Currier, 1993; Gillard, Van Dooren, Schaeken, & Verschaffel, 2009). Hoewel proportionele oplossingsmethoden vaak nuttig zijn, worden ze ook foutief toegepast. Dit fenomeen werd vastgesteld voor eenvoudige rekenkundige vraagstukken zoals dat hierboven, maar ook bij vraagstukken over meetkunde en kansrekening (De Bock, Van Dooren, Janssens, & Verschaffel, 2002; Fischbein & Schnarch, 1997; Van Dooren, De Bock, Depaepe, Janssens, & Verschaffel, 2003). Verder is gebleken dat het fenomeen zich vooral voordoet bij vraagstukken met een ontbrekendewaardestructuur (bijv. drie getallen die gegeven zijn en een vierde getal dat berekend moet worden), zoals het loperprobleem hierboven.

Een ander voorbeeld waarbij mensen vaak fout antwoorden, ook al hebben ze de domeinspecifieke kennis en vaardigheden, gaat over kansproblemen die betrekking hebben op steekproefgrootte. De deelnemers moeten beoordelen of de kans om minstens twee keer kop te gooien wanneer drie muntstukken worden opgegooid groter is dan, gelijk is aan of kleiner is dan de kans om minstens 200 keer kop te gooien bij 300 muntstukwerpen. De meeste leerlingen van 11 tot 17 jaar en zelfs een groot aantal universiteitsstudenten beweren dat de kans gelijk is. De frequentie van deze fout neemt zelfs toe met de leeftijd (Fischbein & Schnarch, 1997). Ook binnen

het algemeen cognitiefpsychologisch onderzoek naar het redeneren werden onderzoekers er vaak mee geconfronteerd dat mensen foutief antwoorden op een hele reeks redeneertaken, terwijl informatieverwerkingstheorieën en besliskundige theorieën deze fouten niet adequaat konden verklaren. Tversky en Kahneman (1982) verrichtten onderzoek met een variant van het muntprobleem, namelijk de hospitaaltaak. Deze taak luidt als volgt:

Een stad heeft twee ziekenhuizen. In het grote ziekenhuis worden ongeveer 45 baby's per dag geboren en in het kleine ziekenhuis ongeveer 15 baby's per dag. Het gemiddelde aantal jongetjes is 50% maar het exacte percentage jongetjes varieert van dag tot dag. Soms is het percentage hoger dan 50%, soms lager. Elk ziekenhuis registreert een jaar lang alle dagen waarop meer dan 80% van de geboren baby's jongens waren.

De deelnemers wordt gevraagd welk ziekenhuis volgens hen de meeste van deze dagen registreerde: het kleine ziekenhuis, het grote ziekenhuis, of allebei ongeveer evenveel. Tversky en Kahneman stelden vast dat de meerderheid van de universiteitsstudenten fout antwoordden (het derde alternatief). Volgens hen maken veel mensen deze fout, omdat ze geen rekening houden met *de wet van de grote aantallen*. Deze wet stelt dat wanneer de steekproefgrootte toeneemt, de relatieve frequenties neigen naar de theoretische kansen (0,5), dus een *extreem* resultaat is minder waarschijnlijk met grote steekproeven.

Een andere veel gebruikte taak is de Wason Selection Task (Wason & Evans, 1975). In de standaardversie van deze taak gebruikt men kaarten met op de ene zijde een letter en op de andere zijde een getal. Wanneer van vier kaarten slechts één zijde getoond wordt, kunnen ze bijvoorbeeld A, D, 3 en 7 dragen op hun zichtbare zijden. Deelnemers moeten dan aangeven welke van de vier kaarten omgedraaid moeten worden om een waarheidsuitspraak te kunnen doen over de regel "als er een A staat op de ene zijde van de kaart, dan staat er een 3 op de andere zijde van de kaart". Om het correcte antwoord te geven moet men die kaarten omdraaien waarvan de verborgen waarden de regel kunnen falsifiëren (A en 7). Minder dan 10% van de universiteitsstudenten koos deze kaarten; de

meesten selecteerden de kaarten A en 3 (Evans, Newstead, & Byrne, 1993). *Dual process*-theorieën zijn ontstaan om het optreden van deze fouten te verklaren. Dergelijke theorieën gaan er van uit dat mensen geneigd zijn om te steunen op heuristische redeneerprocessen in plaats van op meer uitgebreide analytische processen (bijv. Evans, 2008).

Het onderscheid tussen heuristische/intuïtieve en analytische processen wordt zowel gemaakt in de algemene cognitieve psychologie als in de vakspecifieke psychologie van het wiskundeleren en -onderwijzen². Het is echter opmerkelijk dat de wiskundendidactische en de cognitiefpsychologische onderzoeklijnen rond heuristisch en analytisch redeneren tot nog toe nauwelijks methodologische en theoretische toenadering hebben gezocht. We willen aantonen hoe beide velden met elkaar gerelateerd zijn en welke voordelen er in een toenadering zouden kunnen liggen. We beginnen met een inleiding in het *dual process*-kader, waarbij we wijzen op de belangrijkste theoretische assumpties en een overzicht geven van enkele belangrijke onderzoeklijnen en -methoden. Daarna slaan we de brug naar de vakspecifieke psychologie van het wiskundeonderwijs. We bespreken eerst eigen onderzoek waarin we het ontorechte gebruik van proportionele oplossingsmethoden interpreterden volgens een *dual process*-kader, en aan de hand van methoden ontleend aan de algemene cognitieve psychologie. Vervolgens bespreken we de *intuitive rules*-theorie en geven we een overzicht van de meest recente experimentele studies in dat gebied, omdat deze ook nauw aansluiten bij het *dual process*-kader.

2 Dual process-kader

Dual process-theorieën stellen dat mensen geneigd zijn om te steunen op heuristische processen in plaats van op meer uitgebreide analytische processen (Evans, 2008; Kahneman & Frederick, 2002; Sloman, 1996; Stanovich & West, 2000). Algemeen wordt gesteld dat heuristische processen automatisch en via meerdere parallele systemen opereren en dat ze hierdoor snel en weinig cognitief belastend zijn; analytische proces-

sen verlopen dan weer sequentieel, zijn trager, doelgericht en cognitief belastend. De snelle heuristieken leveren vaak correcte antwoorden op, maar in situaties waar meer uitgebreide analytische verwerking nodig is, kunnen ze het redeneren verstoren. In dat geval wordt een correct antwoord enkel geproduceerd indien de analytische processen de heuristisch antwoorden (antwoorden die het product zijn van heuristische processen) tegenhouden. Op die manier verklaren deze theorieën dus het frequent ondermaats presteren op een hele reeks redeneertaken: de hardnekkige en snelle heuristieken bieden een fout antwoord en *conflict monitoring* faalt.

Hieronder bespreken we de twee belangrijkste kenmerken die worden toegeschreven aan heuristische en analytische processen, namelijk de verwerkingssnelheid en de mate van cognitieve belasting. We illustreren hoe in algemeen cognitiefpsychologisch onderzoek deze kenmerken onderzocht worden om het onderscheid tussen heuristische en analytische processen te maken. Daarna bespreken we een recent onderzoek dat erop gericht is om beter te begrijpen hoe beide soorten processen precies interageren.

2.1 Procesgeoriënteerde evidentie voor dual process-theorieën

Dual process-theorieën schuiven twee duidelijke procesassumpties naar voor met betrekking tot de cognitieve belasting en de verwerkingssnelheid. Op basis van deze twee assumpties kan men de heuristische achtergrond van bepaalde fouten staven. De eerste procesassumptie is dat heuristische en analytische processen verschillen in de aanwending van executieve werkgeheugencapaciteit. Heuristische operaties verlopen automatisch en zijn dus cognitief weinig belastend, in tegenstelling tot analytische operaties die sequentieel verlopen (Evans 2008; Stanovich & West, 2000). Meer beschikbare executieve werkgeheugencapaciteit maakt het meer waarschijnlijk dat analytische processen succesvol tot stand komen en maakt het geven van correcte antwoorden dus ook meer waarschijnlijk. Het executieve werkgeheugen wordt algemeen aanvaard als de essentiële component van cognitieve capaciteit (Engle, Tuholski, Laughlin, & Conway, 1999). Een

positieve correlatie tussen cognitieve capaciteit en het aantal correcte analytische antwoorden biedt dus steun voor de eerste assumptie. Bijvoorbeeld, Stanovich en West (2000) vonden een dergelijke positieve correlatie voor verschillende klassieke redeneerproblemen (bijv. de Wason Selection Task, statistische redeneertaken). *Dual task*-methoden bieden een andere manier om de relatie tussen cognitieve capaciteit en accuratesse te onderzoeken. Daarbij moet men de redeneertaak (de *primaire* taak) oplossen tegelijk met een andere mentaal inspannende (*secundaire*) taak. De rationale is dat cognitief belastende processen elkaar neigen te verstoren, omdat de totale executieve werkgeheugencapaciteit begrensd is. Automatische processen veroorzaken of ondervinden daarentegen weinig interferentie in combinatie met andere taken. Daarom wordt verwacht dat er in *dual task*-situaties meer heuristische antwoorden voorkomen. Zo steeg het aantal heuristische antwoorden op de Wason Selection Task in *dual task*-situaties (De Neys, 2006).

De tweede procesassumptie betreft de verwerkingssnelheid: omdat heuristische processen in tegenstelling tot sequentiële analytische processen parallel lopen, worden ze geacht sneller te zijn (Evans 2008; Kahneman & Frederick, 2002; Sloman, 1996). Reactietijdgegevens kunnen dus gebruikt worden om te valideren of bepaalde antwoorden als heuristisch gelabeld kunnen worden. Zo vond De Neys (2006) bij selectietaken dat heuristische antwoorden doorgaans sneller gegeven werden dan analytische antwoorden. Een andere nuttige methode is *rapid responding*, waarbij er binnen een kort tijdsinterval geantwoord moet worden. Zo resulteerde dit voor de Wason Selection Task in een daling van het aantal analytische en een stijging van het aantal heuristische antwoorden (Roberts & Newton, 2002).

Naast evidentie vanuit gedragsstudies is er ook substantiële steun voor het bestaan van twee verschillende redeneerprocessen uit studies met neurologische beeldvorming. Deze studies wijzen op twee neurale paden tijdens deductief redeneren (Goel & Dolan, 2003) en besliskunde (De Neys & Goel, in druk). Heuristisch denken activeerde de linker laterale temporale kwab, terwijl de bilaterale supe-

riure pariëtale kwab geactiveerd werd bij analytisch redeneren. Ook werd in tegenstelling tot de pariëtale en temporale activering, de rechter laterale prefrontale cortex geactiveerd, wanneer mensen correct antwoordden en ze de heuristische antwoorden dus succesvol inhieerden. Ook in de sociaalcognitieve neurowetenschap worden reflexieve (heuristische) en reflectieve (analytische) processen geassocieerd met twee neurologische systemen, beschreven als de X- en C-systemen (Lieberman, 2003).

2.2 Interactie van de twee processen en aard van de redeneerfout

Recent wordt binnen het *dual process*-kader getracht om de wijze waarop de twee processen interageren beter in kaart te brengen (De Neys & Glumicic, 2008; Stupple & Ball, 2008). Daarbij kan gedacht worden aan een *parallel* model, waarbij beide processen simultaan starten bij aanvang van het redeneerproces (Sloman, 1996). Wanneer de uitkomst van beide processen dezelfde is, kan er zeer snel geantwoord worden. Indien heuristische en analytische processen tot een ander antwoord leiden, moet dit conflict opgelost worden. Als de analytische processen erin slagen om het heuristische antwoord te inhieren kan een correct geantwoord worden. Anders wordt er heuristisch geantwoord. Een andere mogelijkheid is een *default-interventionist*-model (De Neys & Glumicic, 2008; Evans, 2006; Kahneman & Frederick, 2002). Dit model veronderstelt dat heuristische processen standaard (*default*) antwoorden verschaffen, tenzij analytische processen dit verhinderen. Dit model veronderstelt dus eigenlijk een combinatie van seriële en parallelle verwerking. Een voorbeeld van een *default-interventionist*-model is Evans' herziene *heuristisch-analytische model* (2006). Volgens dit model lokken heuristische processen standaardmodellen (*default models*) uit. Tegelijkertijd is er enkel een zeer oppervlakkige analytische verwerking van de taak. Mensen zouden geneigd zijn deze heuristische standaardmodellen te volgen. Evans spreekt van het *satisficing*-principe, waarmee hij bedoelt dat mensen de neiging hebben verder te gaan met de standaardmodellen, tenzij er een goede reden is om ze op te geven. Indien het

standaardmodel tot een fout antwoord leidt, wordt een correct antwoord enkel nog gegeven wanneer de analytische processen het standaardmodel vervangen.

Nauw gerelateerd aan de wijze waarop beide processen interageren is de kwestie van *conflict monitoring*. Met betrekking hiertoe onderzochten De Neys en Glumicic (2008) de aard van de redeneerfout: Wanneer mensen een heuristische fout maken in een redeneertaak, is die fout dan te wijten aan het feit dat mensen a) moeite hebben om het conflict tussen de heuristische en analytische processen te detecteren of b) het conflict wel detecteren maar moeite hebben om de heuristische respons te inhieren? Conflictdetectie is een noodzakelijke maar geen voldoende voorwaarde om correct te antwoorden: Analytische processen moeten nog steeds het hardnekkige heuristische antwoord inhieren.

De Neys en Glumicic (2008) beweerden dat de ondermaatse prestatie op *base rate neglect*-problemen eerder toegeschreven moet worden aan het falen om het heuristische antwoord te inhieren dan aan een falende conflictdetectie. Bij *base rate neglect*-problemen krijgen deelnemers informatie over de samenstelling van een steekproef (bijv. een steekproef met 995 vrouwen en 5 mannen) samen met een korte stereotiepe beschrijving van een persoon, willekeurig uit de steekproef gekozen (bijv. "Jo is 23 jaar oud en laatstejaars ingenieursstudent. Op vrijdagavond gaat Jo rondhangen met vrienden terwijl ze naar luide muziek luisteren en bier drinken"). De deelnemers moeten beslissen tot welke van groep deze persoon volgens hen hoort. De beschrijving en de basiskans informatie kunnen congruent of incongruent zijn (een voorbeeld van een incongruent item is het voorbeeld hierboven). De correcte aanpak is om het antwoord te baseren op de basiskans (in het huidige voorbeeld is het correcte antwoord dus *vrouw*, omdat vrouwen in de vooropgestelde steekproef een hogere basiskans hebben). Mensen neigen echter te beslissen op basis van hun heuristische assumpties uitgelokt door de beschrijving (in het voorbeeld hierboven is dit *man* zijn).

In *thinking aloud* vervolgstudies vonden De Neys en Glumicic (2008) dat deelnemers nauwelijks verwezen naar de basiskansen

wanneer ze antwoordden op basis van hun heuristische assumpties. Dit leek erop te wijzen dat mensen zich *niet* bewust zijn van het conflict. De auteurs vonden echter dat op een meer onbewust niveau toch conflictdetectie optrad. Ten eerste was er chronometrische evidentie: Antwoorden gebaseerd op de heuristische assumpties duurden langer bij incongruente items dan bij congruente items. Ten tweede herinnerden de deelnemers zich in een impliciete herinneringsstaak (waarbij de basiskansen van elk item herinnerd moesten worden nadat de hele taak was opgelost) de basiskansen van incongruente items vaker correct dan die van congruente items, zelfs indien de incongruente items toch heuristisch waren opgelost. Beide bevindingen bieden steun voor de idee dat incongruente items (waar er een conflict optreedt) dieper verwerkt werden, ook al werd een heuristisch antwoord gegeven. Ten derde gebruikten De Neys en Glumicic een *moving windows*-methode. Deze methode laat toe om het probleem in verschillende delen (zgn. vensters) te presenteren. De basiskansen en de persoonsbeschrijving werden in aparte vensters aangeboden. De deelnemers konden het eerder gepresenteerde venster met de informatie over de basiskansen opnieuw consulteren door op een knop te duwen. Het aantal keer dat een specifiek stuk informatie herbekeken werd en de tijd die daaraan besteed werd, vormden een indicatie van de aandacht van de deelnemers ervoor. Opnieuw werd gevonden dat de aandacht voor de basiskansen groter was wanneer zij incongruent waren met de heuristische assumpties die uitgelokt werden door de persoonsbeschrijving, zelfs wanneer het heuristische antwoord gegeven werd.

De Neys, Vartanian en Goel (2008) rapporteerden voor *base rate neglect*-problemen neurologische evidentie die de bevindingen uit de gedragsstudies bevestigt. De *RLPFC* (*right lateral prefrontal cortex*), die ervoor gekend staat een sleutelrol te vervullen bij de inhibitie van antwoorden, was enkel geactiveerd wanneer mensen de heuristische antwoorden trachtten te vermijden, terwijl de *ACC* (*anterior cingulate cortex*), waarvan geweten is dat ze een rol speelt in conflictdetectie, zelfs bij heuristische antwoorden geactiveerd werd.

3 Onterecht gebruik van proportionele oplossingsmethoden

Zoals aangegeven in de inleiding wordt ook in vakspecifiek onderzoek naar de psychologie van het wiskundeonderwijs vaak vastgesteld dat leerlingen fouten maken bij het oplossen van problemen, hoewel zij toch over de nodige vakspecifieke kennis beschikken. Bovendien is in sommige situaties een correcte oplossing zelfs niet moeilijker – en soms zelfs eenvoudiger (zoals in het loperprobleem in de inleiding).

We bespreken eerst eigen onderzoek waarin we het onterecht gebruik van proportionele oplossingsmethoden interpreteerden volgens een *dual process*-kader, en aan de hand van methoden ontleend aan de algemene cognitieve psychologie. Gillard e.a. (2009) gingen na of dit onterecht proportioneel redeneren bij additieve rekenvraagstukken geïnterpreteerd kan worden als het gevolg van heuristisch redeneren. Steun voor beide procesassumpties van het *dual process*-kader werd gevonden in het gebruik van proportionele oplossingsmethoden door jongvolwassenen. De deelnemers moesten een reeks proportionele en niet-proportionele (additieve) vraagstukken oplossen waarvan geweten is dat ze proportionele antwoorden uitlokken (Van Dooren e.a., 2005). Een voorbeeld van een niet-proportioneel vraagstuk is het loperprobleem uit de inleiding: “Ellen en Kim lopen rondjes op een piste. Ze lopen even snel maar Ellen startte later. Wanneer Ellen 5 rondjes gelopen heeft, heeft Kim er 15 gelopen. Wanneer Ellen 30 rondjes gelopen heeft, hoeveel heeft Kim er dan gelopen?” Een voorbeeld van een proportioneel vraagstuk is “Erik en Joost kopen doosjes potloden in de winkel. Alle doosjes zijn even duur, maar Erik koopt er minder. Erik koopt 4 doosjes potloden, terwijl Joost er 8 koopt. Wanneer je weet dat Erik 24 euro betaalt, hoeveel moet Joost dan betalen?” In een eerste experiment werd de beschikbare oplossingsstijd beperkt, terwijl in een tweede experiment de cognitieve belasting werd vergroot via de *dual task*-methode. Foutieve proportionele antwoorden namen toe onder beide manipulaties. Met behulp van concepten en methoden uit *dual*

process-onderzoek konden Gillard e.a. dus aantonen dat foutieve proportionele antwoorden op rekenvraagstukken het gevolg zijn van heuristische processen (en niet van een gebrek aan kennis of vaardigheden).

3.1 Experiment 1

Cruciaal was de manipulatie van de tijd die de deelnemers kregen om de vraagstukken op te lossen. In de langeoplostijd-conditie (L) kregen de deelnemers veel tijd terwijl in de korteoplostijd-conditie (K) de beschikbare tijd drastisch gereduceerd werd. Onder de aanname dat heuristische processen sneller opereren dan analytische processen werd verwachtten Gillard e.a. (2009) dat foute proportionele antwoorden op niet-proportionele vraagstukken (hieronder verwijzen we naar deze categorie van foute antwoorden als ‘proportionele fouten’) sneller gegeven worden dan correcte antwoorden op deze vraagstukken. Daarom werd voorspeld dat inperking van de beschikbare oplossingstijd zou leiden tot een toename in proportionele fouten. Voor proportionele vraagstukken werd geen verandering in accuratesse voorspeld, aangezien het proportionele antwoord op deze vraagstukken correcte is.

Methode

Honderd zeventenzestig studenten Psychologie en Pedagogische Wetenschappen van de Katholieke Universiteit van Leuven werden *at random* toegekend aan de K-conditie ($n = 67$) of aan de L-conditie ($n = 100$). Ze kregen 12 ontbrekendewaarde-vraagstukken in willekeurige volgorde. Voor zes vraagstukken was een proportionele oplossingsmethode nodig om het correcte antwoord te vinden (we spreken verder van ‘proportionele vraagstukken’). Voor de andere zes vraagstukken moest een niet-proportionele, additieve oplossingsmethode toegepast worden om correcte te antwoorden (we spreken verder van ‘niet-proportionele vraagstukken’). Beide types vraagstukken werden zo gelijkaardig mogelijk geformuleerd. De lengte, het aantal lettergrepen, de technische leesmoeilijkheid en de berekeningsmoeilijkheid (de grootte van de getallen en de proportionele factor) werden gecontroleerd.

De beschikbare oplossingstijd werd gema-

nipuleerd als een *between-subjects*-variabele. We wilden ervoor zorgen dat deelnemers in de K-conditie voldoende tijd hadden om te antwoorden maar toch voldoende tijdsdruk voelden. Ze kregen slechts 17 seconden om te antwoorden (dit was de mediaan van de tijd waarmee proportionele fouten gemaakt werden in een pilootexperiment dat zonder tijdsdruk werd afgenomen). In de L-conditie werd geen tijdslimiet opgelegd.

Eerst werden algemene taakinstructies gegeven. In de K-conditie werden de deelnemers ook ingelicht over de tijdslimiet. In deze conditie verscheen tijdens de aanbidding van het vraagstuk onderaan op het scherm een tijdsbalk die de nog resterende tijd toonde. De tijd begon te lopen van zodra het vraagstuk op het scherm verscheen. Enkel het uiteindelijke antwoord moest worden ingetoetst. Wanneer in de K-conditie de tijd verlopen was zonder dat er een antwoord was gegeven, verdween het vraagstuk gewoon.

Resultaten en discussie

De antwoorden werden geclassificeerd als *correct*, een *proportionele fout* (een proportioneel antwoord op een niet-proportioneel vraagstuk) of een *andere fout* (een ander antwoord). In de K-conditie werden trials waar niet binnen de limiet werd geantwoord uit de analyses verwijderd (bijna 6% van de data in deze conditie). Verder werden ook de onbeantwoorde trials (minder dan 1%) verwijderd uit de analyses.

Zoals verwacht werden proportionele vraagstukken nog steeds correct opgelost wanneer de beschikbare oplossingstijd drastisch ingeperkt werd, maar dat men bij het oplossen van niet-proportionele vraagstukken terug viel op proportionele oplossingsmethoden (zie Tabel 1). Er was ook een hoofdeffect van conditie ($\chi^2(1) = 60,87, p < 0,01$). Maar ook al daalde de accuratesse bij tijdsbeperking voor proportionele vraagstukken (van 97% tot 86%; $\chi^2(1) = 35,80, p < 0,01$), voor niet-proportionele vraagstukken was deze daling groter (van 62% tot 43%; $\chi^2(1) = 33,41, p < 0,01$). Dit werd bevestigd door een significant interactie-effect³ tussen type vraagstuk en conditie ($\chi^2(1) = 9,95, p < 0,01$). Eveneens zoals verwacht, waren de fouten op de niet-proportionele vraagstukken vooral proportionele fouten.

Tabel 1

Accuratesse voor type vraagstuk en conditie

	Type vraagstuk			
	Proportioneel		Niet-proportioneel	
	Gemiddelde	<i>n</i>	Gemiddelde	<i>n</i>
L-conditie	0,97	598	0,62	597
K- conditie	0,86	368	0,43	387
Totaal	0,93	966	0,55	984

3.2 Experiment 2

Methode

Honderd achtenveertig studenten van de faculteit Psychologie en Pedagogische Wetenschappen van de Katholieke Universiteit van Leuven namen deel. Zij kregen dezelfde vraagstuktaak als in Experiment 1, en daarnaast nog een bijkomende stippentaak. De stippentaak is een klassieke *spatial storage*-taak (Bethell-Fox & Shepard, 1988; Miyake, Friedman, Rettinger, Shah, & Hegarty, 2001). Een 3×3-matrix met daarin drie tot vier stippen werd kort getoond (Figuur 1). De deelnemers moesten het stippentraject onthouden en reproduceren.

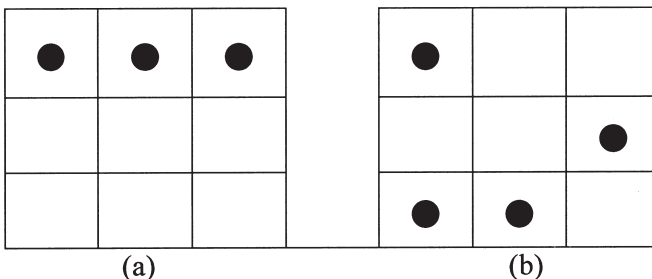
Twee versies van deze stippentaak werden gebruikt, en de deelnemers werden willekeurig toegewezen aan een van de condities: de laad-conditie ($n = 85$) of de controleconditie. In de laad-conditie was de matrix gevuld met complexe vier stippen patronen (deze 'twee-stuk'- of 'drie-stuk'- patronen zijn gebaseerd op Bethell-Fox & Shepard, 1988, en Verschueren, Schaeken, & d'Ydewalle, 2004). Miyake e.a. (2001) toonden dat het onthouden van deze patronen de *executive resources* belast. In de controleconditie bestaan de patronen uit drie stippen op één lijn (deze 'één-stuk'-patronen zijn gebaseerd op het werk van De

Neys, 2006, en belasten de *executive resources* slechts minimaal).

Eerst werd de stippentaak één keer geoefend. Daarna werden de instructies voor de vraagstuktaak gegeven. De instructies vermeldten expliciet dat een correcte reproductie van het stippentraject, dat één seconde lang getoond werd, cruciaal was. Daarna verscheen het vraagstuk, waarop de deelnemers hun antwoord gaven. Hierna verscheen meteen een lege matrix, waarin het stippentraject moest gereproduceerd worden. Hiervoor diende men het numerieke toetsenbord te gebruiken. Elke toets kwam overeen met een vierkantje in de matrix (1 = links onderaan, 9 = rechts bovenaan). Feedback werd enkel gegeven over de reproductie van het stippentraject. Verder was de procedure dezelfde als in Experiment 1.

Resultaten en discussie

Op de stippentaak bedroeg het gemiddelde aantal correct gelokaliseerde stippen 3,58 ($SD = 0,77$) voor de vierstippentrajecten in de laad-conditie en 2,85 ($SD = 0,60$) voor de driestippentrajecten in de controleconditie. De deelnemers van wie de score op de stippentaak meer dan drie standaard deviaties onder het algemene gemiddelde lag werden verwijderd uit de analyse, omdat hun score



Figuur 1. Voorbeelden van de stippenpatronen in (a) de controleconditie en (b) de laad-conditie.

laat vermoeden dat zij minder sterk belast waren dan de andere deelnemers in dezelfde conditie. Dit resulteerde in een eliminatie van 34 deelnemers uit de laad-conditie en 19 deelnemers uit de controleconditie, zodat er uiteindelijk nog respectievelijk 51 en 44 deelnemers in de analyse werden opgenomen.

Op de vraagstukken taak werden onbeantwoorde trials verwijderd uit de analyse (minder dan 1% van de data in beide condities). Zoals verwacht daalde de accuratesse voor niet-proportionele vraagstukken onder werkgeheugenbelasting, terwijl de accuratesse voor proportionele vraagstukken niet veranderde (zie Tabel 2). Een significant interactie-effect⁴ tussen werkgeheugenbelasting en type vraagstuk bevestigde dit ($\chi^2(1) = 6,64, p < 0,01$), terwijl er geen significant hoofdeffect was voor werkgeheugenbelasting ($\chi^2(1) = 0,13, p = 0,71$). Zoals verwacht waren de fouten op de niet-proportionele vraagstukken vooral proportionele fouten (22% van het totale aantal antwoorden in de controleconditie en 34% in de laad-conditie). De resultaten tonen dus dat niet-proportioneel redeneren meer vermogen van het werkgeheugen vraagt dan proportioneel redeneren.

4 Algemene discussie

Deze studie toonde dat ongepast proportioneel redeneren twee van de belangrijkste kenmerken van heuristische processen vertoont. Onder tijdsbeperking en onder werkgeheugenbelasting daalde de accuratesse voor niet-proportionele vraagstukken sterk ten gevolge van het terugvallen op proportionele methoden, terwijl de prestatie op proportionele vraagstukken ongeveer ongewijzigd bleef. We besluiten dus dat het *dual process*-kader

met succes kan toegepast worden om het mechanisme achter het overmatig toepassen van proportionele oplossingsmethoden te begrijpen.

5 De *intuitive rules*-theorie

Het onderscheid tussen intuïtief en analytisch denken wordt sinds decennia ook gemaakt binnen het vakspecifieke onderzoek rond wiskundeleraars en -onderwijzen. Het onderzoek naar de rol van intuïties bij het wiskundig probleemoplossen werd vooral geïnspireerd door het werk van Efraim Fischbein (1920-1998). Hij definieerde een intuïtie als een inzicht dat “implies an extrapolation beyond the directly accessible information” (Fischbein, 1987, p. 13). Met andere woorden: intuïties zijn veronderstellingen die *verder reiken dan de gegeven feiten*. Verdere kenmerken van intuïties zijn volgens Fischbein dat ze zelfevident (onmiddellijk en zonder verdere argumenten aannemelijk) zijn, het denken spontaan en sterk beïnvloeden en dat de probleemsituatie er globaal door benaderd wordt (in plaats van diepgaand wiskundig geanalyseerd). Fischbein (1987) maakte daarbij een onderscheid tussen *primaire* intuïties, die zich ontwikkelen als een gevolg van persoonlijke ervaring en onafhankelijk van enige systematische instructie en *secundaire* intuïties, die verworven worden als gevolg van formele instructie en niet louter als gevolg van persoonlijke ervaring. De aanname achter deze secundaire intuïties is dat er zich nieuwe intuïties kunnen ontwikkelen die geen ‘natuurlijke oorsprong’ hebben. Een primaire intuïtie over kans is bijvoorbeeld het feit dat het toenemen van het aantal voorwaarden voor een bepaalde gebeurtenis de kans vermindert.

Tabel 2
Accuratesse voor type vraagstuk en conditie

	Type vraagstuk			
	Proportioneel		Niet-proportioneel	
	Gemiddelde	<i>n</i>	Gemiddelde	<i>n</i>
Controleconditie	0,96	263	0,76	264
Laad-conditie	0,98	304	0,62	306
Totaal	0,97	657	0,68	570

Een secundaire intuïtie is bijvoorbeeld dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is. Volgens Fischbein is dit geen vanzelfsprekende bewering; men aanvaardt dit op basis van een bewijs. Maar als we *onmiddellijk* inzien dat de som van de hoeken van een driehoek noodzakelijk constant moet blijven hebben we een nieuw intuïtief begrip – een secundaire intuïtie.

Op basis van Fischbein's pionierswerk op het gebied van intuïtief denken ontwikkelden Stavy en Tirosh (2000) de *intuitive rule*-theorie. Volgens deze theorie baseren leerlingen zich bij het oplossen van diverse problemen in de wiskunde en wetenschappen vooral op 'externe' taakkenmerken, in plaats van op de 'interne' wiskundige kernelementen. De reacties van leerlingen op diverse wiskundige of wetenschappelijke taken kunnen dan begrepen worden vanuit het hanteren van een beperkt aantal intuïtieve regels die worden uitgelokt door die externe taakkenmerken. *Intuitive rules*-onderzoekers definiëerden aldus een beperkt aantal intuïtieve regels (bijv. de *more A – more B*-regel en de *same A – same B*-regel). De producten van deze regels zijn vaak correct, maar soms komen ze niet overeen met wiskundige of wetenschappelijke concepten en leiden ze tot incorrecte redeneringen. *More A – more B*-redeneren treedt bijvoorbeeld op bij de meerderheid van zes- tot tienjarigen wanneer ze de zoetheid van suikerwater moeten bepalen. Ze baseren zich vaak op de absolute hoeveelheid suiker (d.i., het *saliënte* maar externe taakkenmerk), en redeneren "hoe meer suiker, hoe zoeter". Ze baseren zich dus niet op de ratio tussen suiker en water (d.i., het relevante interne taakkenmerk) (Stavy, Strauss, Orpaz, & Carmi, 1982). Een voorbeeld van *same A – same B*-redeneren is dat de meerderheid van de 17-jarigen beweert dat de omtrek van een rechthoek gelijk blijft wanneer de verticale zijden verkleinen met 20% en de horizontale zijden verlengen met 20% (Stavy & Tirosh, 2000).

Stavy en Tirosh (2000) bestudeerden deze regels in verschillende domeinen (bijv. fysica, chemie, biologie, wiskunde), met een variëteit aan taken waarin verschillende types van redeneren nodig zijn (bijv. conservatie, proportie, kansrekening, directe functies, in-

verse functies), en in verschillende culturen (bijv. Israëlische, Taiwanese en Australische Aboriginal studenten; Stavy, et al., 2006). Stavy e.a. (2006) verrichtten een crossculturele studie van de ontwikkelingscurven voor *more A – more B*- en *same A – same B*-regels en vonden dat *more A – more B*-antwoorden overall afnamen met leeftijd, terwijl *same A – same B*-antwoorden toenamen.

In het *intuitive rules*-onderzoek van Stavy, Tirosh en hun medewerkers lag de focus tot voor kort op accuratesse en op percentages van intuïtieve antwoorden, op de ontwikkeling van het gebruik van bepaalde intuïtieve regels, en op interculturele verschillen. Recent zijn ze zich ook beginnen toespitsen op de onderliggende processen die zich voordoen wanneer leerlingen intuïtieve regels volgen door onder meer reactietijdgegevens en neurologische evidentie te verzamelen (Babai, Brecher, Stavy, & Tirosh, 2006; Babai, Levyadun, Stavy, & Tirosh, 2006; Stavy, Goel, Critchley, & Dolan, 2006). Zo komt hun onderzoek dichterbij de buurt van het algemeen cognitief-psychologisch onderzoek dat we eerder bespraken. We vatten hun meer recente bevindingen nu samen.

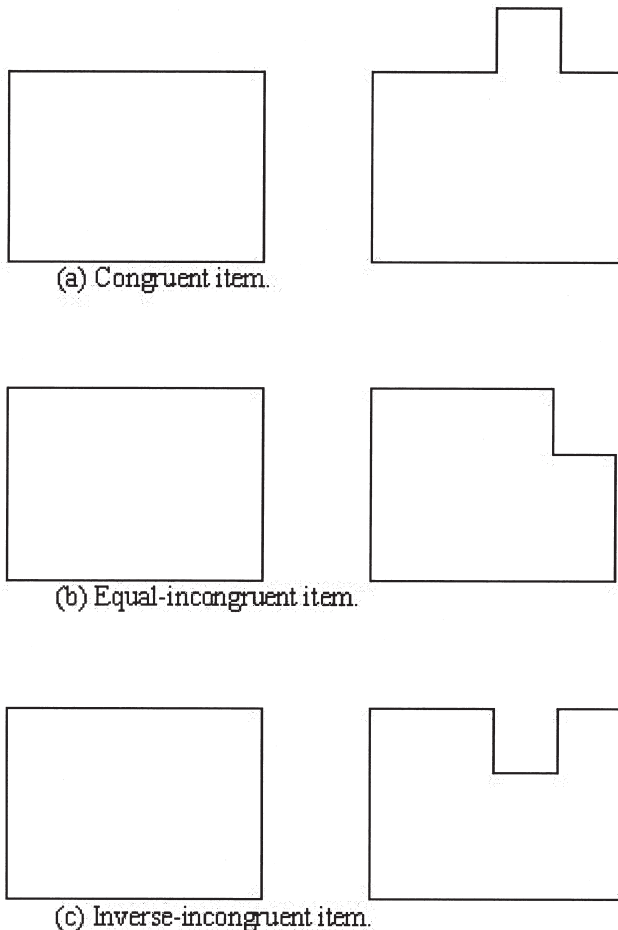
Eén van de meest paradigmatische *more A – more B*-taken die in deze onderzoekslijn gebruikt wordt is de veelhoekentaak. De deelnemers moeten in deze taak de omtrek van twee veelhoeken met elkaar vergelijken. Bij congruente items heeft de veelhoek met de grootste oppervlakte ook de langste omtrek (Figuur 2a). Bij incongruente items heeft de veelhoek met de grootste oppervlakte een omtrek die even groot is of kleiner dan de andere veelhoek (Figuren 2b en 2c). Mensen hebben de neiging om in lijn met de *more A* (oppervlakte) – *more B* (omtrek)-regel te redeneren. Dit gedrag leidt tot een hogere accuratesse voor congruente dan voor incongruente items (Babai, Brecher e.a. 2006; Stavy, Goel e.a., 2006). Omdat oppervlakte meer direct verwerkt wordt dan omtrek, beschouwen *intuitive rules*-onderzoekers de oppervlakte als het *saliënte* kenmerk van een veelhoek. Ten eerste toonden Babai, Levyadun e.a. (2006) dat wanneer deelnemers het verschil in oppervlakte beoordeelden (*oppervlakte-taak*), ze sneller een correct antwoord gaven dan wanneer ze het verschil in omtrek beoor-

deelden (*omtrektaak*). Ten tweede werden de beoordelingen in de oppervlaktetaak niet gemiddeld door omtrek: Er werden bijna geen fouten gemaakt op congruente en incongruente items. Bovendien waren in de oppervlaktetaak de reactietijden voor correcte antwoorden op congruente en op incongruente items gelijk.

Intuitive rules-onderzoekers vonden ook empirische evidentie voor de onmiddellijke aard (*immediacy*) – wat als één van de belangrijke kenmerken van intuïtieve regels beschouwd wordt – van de *more A* (oppervlakte) – *more B* (omtrek)-regel (Babai, Levyadun e.a., 2006; Stavy, Goel e.a., 2006). Ten eerste werden correcte antwoorden die in de lijn lagen van de regel (d.w.z. correcte antwoorden op congruente items) sneller geproduceerd dan correcte antwoorden die *niet* in

lijn liggen met deze regel (d.w.z. correcte antwoorden op incongruente items). Ten tweede waren voor incongruente items incorrecte *more A – more B* – antwoorden sneller dan correcte antwoorden. Deze resultaten komen overeen met bevindingen bij redeneertaken binnen de *dual process*-literatuur (De Neys, 2006).

Stavy, Goel e.a. (2006) vonden ook neurologische evidentie voor de intuïtieve aard van de *more A – more B*-regel in deze omtrektaak. Zij constateerden verschillende activatiepatronen bij het antwoorden op congruente items (activering in de inferieure pariëtale regio) versus incongruente items (activering in de orbitofrontale cortex). De activering bij congruente items werd door deze auteurs geïnterpreteerd als automatische verwerking in de pariëtale kwab van perceptuele input



Figuur 2. Voorbeeld van een (a) congruent item en van (b) en (c) incongruente items.

met betrekking tot de storende saliente eigenschap. De activering bij het antwoorden op incongruente items werd geïnterpreteerd als inhibitie van het storende saliente kenmerk.

Een andere paradigmatische *more A – more B*-taak is een kansrekentaak (Figuur 3). In deze taak moet men beoordelen welke van twee dozen, gevuld met zwarte en witte knikkers, de beste kans biedt om zonder kijken een zwarte knikker te nemen. Mensen hebben de neiging om hun antwoord te baseren op de absolute frequentie van de zwarte knikkers in beide dozen in plaats van op de ratio's (Babai, Brecher e.a., 2006; Falk, Falk, & Levin, 1980; Green, 1983). Mensen negeren dus de noemers in hun beoordeling. Soms is het oordeel gebaseerd op een vergelijking van de absolute frequentie van de zwarte knikkers congruent met het oordeel dat gebaseerd wordt op de ratio's. De taak kan echter aangepast worden om een *incongruent* item te creëren. Het vergelijken van de absolute frequenties van de zwarte knikkers resulteert dan niet meer in een correct oordeel. Ook voor deze taak werd aan de hand van reactietijdgegevens aangetoond dat correcte beoordelingen voor congruente items en incorrecte beoordelingen voor incongruente items (allebei in lijn met de *more A – more B*-regel) sneller gegeven worden dan correct antwoorden voor incongruente items (Babai, Brecher e.a., 2006).

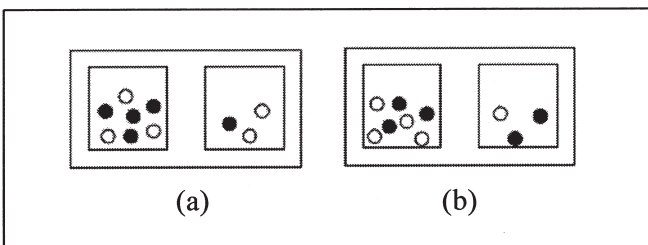
Met betrekking tot het gedrag op deze kansrekentaak trachtten Babai, Brecher e.a. (2006) een verklaring te geven in termen van een parallel model. Ze suggereerden dat gezien de absolute frequentie van de zwarte knikkers de saliente eigenschap is, deze onmiddellijk verwerkt en vergeleken wordt. Dit zou simultaan gebeuren aan de vergelijking van de ratio's. Wanneer de verwerking van de

absolute frequenties van de zwarte knikkers en de ratio's resulteert in dezelfde conclusie (congruente items), zou dit het einde zijn van het verwerkingsproces. Wanneer ze resulteren in twee verschillende antwoorden (incongruent item), moet dit conflict opgelost worden. De analytische processen hebben de capaciteit om het intuïtieve antwoord te inhiberen. Maar de intuïtieve regel kan ook zo hardnekkig zijn dat mensen falen om het intuïtieve antwoord te inhiberen.

6 Conclusies en discussie

Zowel in de algemene cognitieve psychologie als in de vakspecifieke psychologie van het wiskundeleren en -onderwijzen wordt het onderscheid gemaakt tussen heuristische/intuïtieve en analytische redeneerprocessen. In beide domeinen probeert men daarmee te verklaren waarom mensen op een variëteit van taken ondermaats presteren. Fouten zijn vanuit deze invalshoek niet zozeer te wijten aan tekorten in hun vakspecifieke kennisbasis, maar eerder aan het feit dat men vasthoudt aan het foute heuristisch/intuïtief antwoord. In dit artikel plaatsten we het veelgebruikte *dual process*-kader binnen de algemene cognitieve psychologie, naast twee onderzoekslijnen van teams die actief zijn op het specifieke terrein van het wiskundeleren en -onderwijzen.

Het is merkwaardig dat niet enkel voor redeneertaken die in het algemeen cognitief-psychologische onderzoek gebruikt worden mensen vaak heuristisch redeneren, maar dat dit ook wordt vastgesteld in het onderzoek van wiskundeleren en -onderwijzen dat leerlingen bij schoolse wiskundetaken. De taken die leerlingen in dit soort onderzoek voorge-



Figuur 3. Voorbeeld van (a) een congruent en (b) een incongruent item.

schoteld krijgen staan immers verder van het dagelijkse leven, en zijn analoog aan de taken waarmee ze in de wiskundelessen en -toetsen worden geconfronteerd. Een impliciete verwachting (vanwege onderzoekers en onderwijsgeevenden) is dat leerlingen bij het oplossen van dergelijke taken hard en lang nadenken, en hun oplossing ver(ant)woorden. We verwijzen hierbij naar Vinner (1997) die een belangrijke assumptie van heel wat wiskundendidactici in vraag stelt: Men mag er volgens hem niet van uitgaan dat leerlingen in leer- of probleemoplossingssituaties steeds gemotiveerd en cognitief betrokken zijn. Maar wegens het 'didactisch contract' (Brousseau, 1988) worden ze geacht om dat in een onderwijsleersetting niet zomaar te tonen. Onbewust leren ze dan ook om zich in dit systeem te handhaven met minimale inspanning en 'pseudoanalytisch gedrag' (in tegenstelling tot 'analytisch gedrag') te vertonen. Wanneer er tijdens de wiskundelessen routines worden ingeoeffend – met vooral aandacht voor het correct uitvoeren van procedures, eerder dan de keuze of verantwoording voor de toepasbaarheid ervan –, dan kunnen leerlingen associaties gaan vormen tussen oppervlakkige opgavekenmerken (bijv. de ontbrekendewaardestructuur van een vraagstuk) die steevast in een bepaald type problemen aanwezig zijn en manieren om die opgaven op te lossen (bijv. proportionele berekeningen uitvoeren). Het pseudo-analytisch gedrag bestaat er in om de aangeleerde routine te gebruiken telkens wanneer die uiterlijke kenmerken aanwezig zijn, hetgeen in de meeste gevallen ook succesvol zal zijn.

De claim dat heel wat fouten op wiskundige problemen een intuïtief karakter hebben werd enkele decennia geleden uitvoerig beargumenteerd door Fischbein (1987). Maar door de preciezere operationalisering en door toepassing van de onderzoeksmethoden ontleend aan het algemeen cognitiefpsychologisch onderzoek reikten Gillard e.a. (2009), Babai, Brecher e.a. (2006) en Babai, Levядun e.a. (2006) ook empirische evidentie aan voor de claim dat intuïtieve/heuristische processen ten grondslag liggen aan deze fouten, en dat zij bijvoorbeeld niet veroorzaakt zijn door misconcepties, die een analytische basis hebben. Om opnieuw Vinner's (1997) onder-

scheid tussen analytisch en pseudo-analytisch gedrag te gebruiken: "A misconception is a result of cognitive involvement. It is a result of cognitive efforts. These efforts led to a wrong idea." (p. 121), terwijl hij over pseudo-analytisch gedrag zegt "there is no cognitive involvement. The person is looking for a satisfactory reaction to a certain stimulus while cognitive issues do not play a role (at least not a major role)" (p. 121).

De nauwkeurigere modellen en fijnmazigere methoden die het cognitiefpsychologische kader aanreikt zijn nuttig om intuïtieve van analytische wiskundige redeneerprocessen te onderscheiden. Verder maken methoden als reactietijdmeting, *thinking aloud*, *moving windows* (of het eraan gerelateerde oogbewegingsonderzoek) en neurologische evidentie het ook mogelijk om te onderzoeken hoe analytische en heuristische processen precies met elkaar interageren, en of fouten eerder te wijten zijn aan een gebrek aan detectie van een conflict tussen het heuristische en het analytische proces, dan wel aan het feit dat een subject faalt om het heuristische antwoord te inhiberen. Voor intuïtieve fouten op wiskundige problemen is de kwestie niet alleen theoretisch maar ook praktisch van belang. Zo zal de neiging van leerlingen om onterecht proportioneel te redeneren een andere onderwijsaanpak vergen indien blijkt dat er bij deze leerlingen geen conflictdetectie is dan wanneer er wel een probleem wordt gedetecteerd maar leerlingen falen om hun neiging tot proportioneel te reageren te inhiberen. In het eerste geval volstaat het allicht leerlingen te attenderen op het verraderlijke karakter van vraagstukken met een ontbrekendewaardeformulering, terwijl het in het tweede geval wellicht nodig zal zijn om bij leerlingen een soort metabewustzijn te creëren van de manier waarop heuristische en analytische processen met elkaar interageren.

Het toepassen van concepten en technieken uit de algemene cognitieve psychologie op het wiskundig probleemoplossen kan dus onmiskenbare voordelen opleveren. Toch is het vakspecifieke onderzoek naar het wiskundeleren en -onderwijzen geen louter toegepaste algemene psychologie, zoals Freudenthal (1978) en andere pioniers van de *psychology of mathematics education* meer-

maals hebben beargumenteerd (zie ook Sierpinska & Kilpatrick, 1997). Bovendien kan omgekeerd het bestuderen van intuïtieve en analytische oplossingsprocessen bij wiskunde-problemen ook bijdragen tot een verdere ontwikkeling en verfijning van het algemene *dual process*-kader. Kenmerkend voor onderzoek naar de psychologie van het wiskunde-leren en -onderwijzen is immers dat het zich toespitst op inhouden die formeel onderwezen worden. Fischbein (1987) benadrukte het verschil tussen intuïties gevormd door formele instructie (secundaire intuïties) en intuïties die zich manifesteren los van instructie (primaire intuïties). Een centraal onderwerp in het vakspecifieke onderzoek naar de psychologie van de wiskunde is dan ook de ontwikkeling die intuïtieve redeneerprocessen ondergaan. De ontwikkeling van intuïties/heuristieken en de impact van allerlei omgevings- en instructiekenmerken daarop is een aspect dat in *dual process*-onderzoek veelal wordt genegeerd. De meeste *dual process*-theorieën gaan er van uit dat metacognitieve controle toeneemt naarmate de cognitieve ontwikkeling vordert, waardoor (jong-)volwassenen beter in staat zijn heuristische antwoorden te inhiberen. Dit gaat echter maar ten dele op voor intuïties in het wiskundig redeneren, aangezien onderzoek heeft aange-toond dat sommige intuïties afnemen naarmate men ouder wordt of meer instructie krijgt (bijv. diverse *more A – more B*-redeneringen, Stavy, Babai, e.a., 2006) terwijl andere net toenemen (bijv. diverse *same A – same B*-redeneringen, Stavy, Babai, e.a., 2006, en proportionele redeneringen, Van Dooren e.a., 2005). Het bestuderen van intuïties en hun evolutie doorheen de levensloop (en onder invloed van instructie) lijkt dus te kunnen bijdragen aan de algemene cognitief-psychologische theorievorming over heuristische en analytische processen en hun onderlinge interactie.

Het ziet er dus naar uit dat zowel de algemene cognitief-psychologische invalshoek als die van de vakspecifieke psychologie van het wiskundeleren een waardevolle en complementaire bijdrage kunnen leveren om de ondermaatse prestatie van mensen op een variëteit aan taken, en in het bijzonder wiskundige problemen – te verklaren.

Noten

- 1 Dit onderzoek werd deels ondersteund door de geconcerteerde onderzoeksactie (GOA) nr. 2006/01 "Developing adaptive expertise in mathematics education" van de Onderzoeksraad van de Katholieke Universiteit Leuven.
- 2 Merk op dat 'heuristieken' binnen de literatuur rond (wiskundig) probleemoplossen nog een heel andere betekenis hebben. Het gaat dan om het efficiënt aanpakken van probleem-situaties waarvoor de oplosser geen kant-en-klare oplossing ziet, en waarbij hij systematische zoekstrategieën aanwendt om het probleem te ontwarren en zo de kans op het vinden van een oplossing te verhogen (zie bijv. Polya, 1945; Schoenfeld, 1992). Voorbeelden van heuristieken zijn: het maken van een tekening, het opsplitsen in deelproblemen, het voorlopig buiten beschouwing laten van een van de vereisten van de oplossing, enzovoort. In dit artikel gebruiken we de notie heuristiek in de betekenis die de cognitiefpsychologische literatuur er aan geeft, en die in de wiskundendidactische literatuur doorgaans als 'intuïtief' wordt getypeerd. Het gaat dan om de tegenhanger van een analytische aanpak.
- 3 Hierbij dient wel opgemerkt te worden dat er bij de proportionele vraagstukken een plafondeffect optreedt, hetgeen de interactie moeilijk interpreteerbaar kan maken. Het feit dat de gemaakte fouten op de niet-proportionele vraagstukken voornamelijk in overeenstemming zijn met de proportionele oplossingsmethode, maakt de gevonden interactie wel weer interpreteerbaar als steun voor onze hypothese
- 4 Hierbij geldt een gelijkaardige opmerking als bij de resultaten van Experiment 1, zie noot 2.

Literatuur

- Babai, R., Brecher, T., Stavy, R., & Tirosh, D. (2006). Intuitive interference in probabilistic reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4, 627-639.
- Babai, R., Levyadun, T., Stavy, R., & Tirosh, D. (2006). Intuitive rules in science and mathematics: a reaction time study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37, 913-924.

- Bethell-Fox, C. E., & Shepard, R. N. (1988). Mental rotation: Effects of stimulus complexity and familiarity. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 14, 12-23.
- Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: Le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9-3, 309-336.
- Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: research implications. In D. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom* (pp. 159-178). New York: Macmillan.
- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 311-334.
- De Neys, W. (2006). Automatic-heuristic and executive-analytic processing during reasoning: Chronometric and dual-task considerations. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 59, 1070-1100.
- De Neys, W., & Glumicic, T. (2008). Conflict monitoring in dual-process theories of reasoning. *Cognition*, 106, 1248-1299.
- De Neys, W., & Goel, V. (ter perse). Heuristics and biases in the brain: Dual neural pathways for decision making. In O. Vartanian & D.R. Mandel (Eds.), *Neuroscience of decision making*. Hove, Verenigd Koninkrijk: Psychology Press.
- De Neys, W., Vartanian, O., & Goel, V. (2008). Smarter than we think: When our brains detect that we are biased. *Psychological Science*, 19, 483-489.
- Engle, R. W., Tuholski, S. W., Laughlin, J. E., & Conway, A. R. A. (1999). Working memory, short-term memory, and general fluid intelligence: A latent-variable approach. *Journal of Experimental Psychology: General*, 128, 309-331.
- Evans, J. St. B. T. (2006). The heuristic-analytic theory of reasoning: Extension and evaluation. *Psychonomic Bulletin and Review*, 13, 378-395.
- Evans, J. St. B. T. (2008). Dual-processing accounts of reasoning, judgement and social cognition. *Annual Review of Psychology*, 59, 255-278.
- Evans, J. St. B. T., Newstead, S. E., & Byrne, R. M. J. (1993). *Human reasoning: The Psychology of deduction*. Hove, Verenigd Koninkrijk: Lawrence Erlbaum.
- Falk, R., Falk, R., & Levin, I. (1980). A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 181-204.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht, Nederland: Reidel.
- Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 96-105.
- Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing. Preface to a science of mathematical education*. Dordrecht, Nederland: Reidel.
- Gillard, E., Van Dooren, W., Schaeken, W., & Verschaffel, L. (2009). Proportional reasoning as a heuristic-based Process: Time pressure and Dual-task considerations. *Experimental Psychology*, 56, 92-99.
- Goel, V., & Dolan, R. J. (2003). Explaining modulation of reasoning by belief. *Cognition*, 87, B11-B22.
- Green, D. R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett, & G. M. Constantine (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 766-783). Sheffield, Verenigd Koninkrijk: Teaching Statistics Trust.
- Kahneman, D., & Frederick, S. (2002). Representativeness revisited: Attribute substitution in intuitive judgement. In T. Gilovich, D. Griffin, & D. Kahneman (Eds.), *Heuristics and biases: The psychology of intuitive judgment* (pp. 49-81). Cambridge: Cambridge University Press.
- Lieberman, M. D. (2003). Reflective and reflexive judgment processes: A social cognitive neuroscience approach. In J. P. Forgas, K. R. Williams, & W. von Hippel (Eds.), *Social judgments: Implicit and explicit processes* (pp. 44-67). New York: Cambridge University Press.
- Miyake, A., Friedman, N., Rettinger, D. A., Shah, P., & Hegarty, M. A. (2001). How are visuospatial working memory, executive functioning, and spatial abilities related? A latent-variable analysis. *Journal of Experimental Psychology: General*, 130, 621-640.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Roberts, M. J., & Newton, E. J. (2002). *Inspection*

- times, the change task, and the rapid response selection task. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 54A, 1031-1048.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics learning and teaching* (pp. 334-370). New York: Macmillan.
- Sierpinska, A., & Kilpatrick, J. (1997). *Mathematics education as a research domain*. New York: Springer
- Slovan, S. A. (1996). The empirical case for two systems of reasoning. *Psychological Bulletin*, 119, 3-22.
- Stanovich, K. E., & West, R. F. (2000). Individual differences in reasoning: Implications for the rationality debate. *Behavioral and Brain Sciences*, 23, 645-726.
- Stavy, R., Babai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., Lin, F., & McRobbie, C. (2006). Are intuitive rules universal? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4, 417-436.
- Stavy, R., Goel V., Critchley H., & Dolan, R. (2006). Intuitive interference in quantitative reasoning. *Brain Research*, 1073-1074, 383-388.
- Stavy, R., Strauss, S., Orpaz, N., & Carmi, G. (1982). U-shaped behavioral growth in ratio comparisons, or that's funny I would not have thought you were U-ish. In S. Strauss & R. Stavy (Eds.), *U-shaped behavioral growth* (pp. 11-36). New York: Academic Press.
- Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (mis)understand science and mathematics: intuitive rules*. New York: Teachers College Press.
- Stupple, E. J. N., & Ball, L. J. (2008). Belief-logic conflict resolution in syllogistic reasoning: Inspection-time evidence for a parallel-process model. *Thinking and Reasoning*, 14, 168-181.
- Tversky A., & Kahneman D. (1982). Judgments of and by representativeness. In D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 84-100). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Depaep, F., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 113-138.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23, 57-86.
- Verschueren, N., Schaecken, W., De Neys, W., & d'Ydewalle, G. (2004). The difference between generating counterexamples and using them during reasoning. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, A57, 1285-1308.
- Vinner, S. (1997). The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 97-129.
- Wason, P. C., & Evans, J. St. B. T. (1975). Dual-processes in reasoning? *Cognition*, 3, 141-154.

Manuscript aanvaard: 28 juli 2009

Auteurs

Ellen Gillard, Wim van Dooren en Lieven Verschaffel zijn werkzaam bij het Centrum voor Instructiepsychologie en -technologie van de Katholieke Universiteit Leuven. **Walter Schaecken** is werkzaam bij het Laboratorium voor Experimentele Psychologie van dezelfde universiteit.

Correspondentieadres: Ellen Gillard, Centrum voor Instructiepsychologie en -technologie, Katholieke Universiteit Leuven, Vesaliusstraat 2 PB 3770, 3000 Leuven. Email: ellen.gillard@ped.kuleuven.be.

Abstract

Dual process theories applied to mathematical problem solving

The distinction between heuristic/intuitive and analytic types of reasoning is often used to account for the finding that people blatantly fail on a variety of tasks they are supposed to be able to solve correctly given their available domain-specific knowledge and skills. Both within the field of the psychology of mathematics education and in cognitive psychology, this distinction is often made. We first give an overview of the dual process framework in cognitive psychology. We discuss the core of the theoretical assumptions and

discuss some important research lines and -methods. Then we make the link to the field of the psychology of mathematics education. First, we discuss research to the overuse of proportional solution methods, interpreted from a dual process framework. Thereafter, we discuss the intuitive rules theory en we give an overview of the most recent experimental studies in that field.