

# Instrument, orkest en dirigent: een theoretisch kader voor ICT-gebruik in het wiskundeonderwijs

P. Drijvers

## Samenvatting

In het deelonderzoek *Algebra leren in een computeralgebraomgeving* van het aandachtsgebied *Wiskunde en ICT* is het theoretische kader van de instrumentele benadering van ICT-gebruik vruchtbaar gebleken. Daarom is deze benadering in vervolgonderzoek toegepast en uitgewerkt. In dit artikel wordt nagegaan op welke manier dit kader in deze studies is gebruikt. De vraag is welke bijdrage deze benadering levert aan het onderzoek naar de rol van ICT bij het leren van wiskunde. In het eerste deel van dit artikel wordt de instrumentele benadering beschreven. In het tweede deel wordt besproken op welke manier dit kader in het PROO-deelonderzoek en in twee vervolgstudies is gebruikt. De conclusie is dat de instrumentele benadering een breed toepasbaar kader vormt voor het onderzoek naar het gebruik van ICT-gereedschap bij het leren van wiskunde, en specifieke bijdragen levert waarin andere theoretische kaders niet lijken te voorzien. De reikwijdte van deze theorie en de samenhang met andere theorieën verdienen nader onderzoek.

## 1 Inleiding

De inzet van ICT-gereedschap in het wiskundeonderwijs is niet onomstreden. Critici vrezen dat er voor de leerling niet veel te doen resteert als ICT het werk uit handen neemt. Wat blijft er dan te leren over? Met name bij algebra, waar het automatiseren van bewerkingen met pen en papier in de ogen van sommigen te weinig aandacht krijgt, zou de beheersing van basisvaardigheden lijden onder het gebruik van technologie zoals bijvoorbeeld de grafische rekenmachine (Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs, 2007). Vanuit deze optiek is de inzet van computeralgebra, software die algebraïsche bewerkingen tot op een geavanceerd niveau kan uitvoeren, dan ook problematisch. Ande-

ren stellen daar tegenover dat het uitbesteden van routinewerk aan een apparaat juist aandacht vrijmaakt voor essentiële zaken zoals begripsontwikkeling, inzichtelijk redeneren, wiskundig denken, en het ontwerpen en toepassen van modellen en oplossingsstrategieën (Drijvers, 2003a).

We constateren bij het leren van wiskunde dus een spanning tussen de inzet van ICT, vaak gericht op hoge leerdoelen, en de beheersing van basisvaardigheden met pen en papier. Het didactische probleem waar we voor staan is om deze twee aspecten van het leren van wiskunde recht te doen en te integreren in een krachtige ICT-ondersteunde leeromgeving. In het deelonderzoek *Algebra leren in een computeralgebraomgeving* van het aandachtsgebied *Wiskunde en ICT* is de verhouding tussen leren en ICT-gebruik een cruciaal thema. Centrale vragen daarbij zijn: Kan het gebruik van ICT het leren van algebra bevorderen? Op welke manier richt de beschikbaarheid van krachtig ICT-gereedschap voor algebra het denken van de leerlingen en, andersom, hoe bepaalt het denken van de leerlingen het gebruik van dergelijk gereedschap?

Bij aanvang van dit onderzoek is uit literatuurstudie het beeld naar voren gekomen dat het uitbesteden van wiskundig werk aan ICT-gereedschap verre van triviaal is en om een subtiel leerproces vraagt. Dat heeft de behoefte opgeroepen aan een genuanceerd theoretisch kader dat recht doet aan de complexiteit van het integreren van gereedschap in het leren van wiskunde. Vandaar dat de zogeheten instrumentele benadering van ICT-gebruik een steeds centralere rol in het onderzoek heeft gekregen. Deze instrumentele benadering baseert zich op ergonomische en antropologische uitgangspunten en bedient zich van een muzikale metafoer. In deze metafoer ontwikkelt ICT-gereedschap zich tot een instrument voor de individuele gebruiker, in ons geval de leerling (Artigue, 2002; Lagrange, 2005; Trouche, 2004). Deze

individuele ontwikkeling hangt samen met een collectief leerproces dat plaatsvindt in een *community of practice*, die wordt voorgesteld als een orkest. Dit orkest, in ons geval de klas, staat onder leiding van een dirigent in de persoon van de docent.

De toepassing van deze instrumentele benadering in het PROO-deelonderzoek, dat in 2003 is afgerond (Drijvers, 2003b; Drijvers & Gravemeijer, 2004a, b), is voortgezet in vervolgonderzoek (Boon & Drijvers, 2005; Kieran & Drijvers, 2006). Deze sequentie is aanleiding om terug te kijken op de bijdrage die dit theoretische kader in dergelijk onderzoek kan leveren. De vraag die we ons in dit artikel stellen is dan ook: *welke bijdrage levert het theoretisch kader van de instrumentele benadering aan het onderzoek naar de rol van ICT bij het leren van wiskunde?*

We beantwoorden deze vraag door te beschrijven op welke manier het theoretisch kader functioneert in het PROO-deelonderzoek. Daarnaast wordt de bijdrage van deze theorie in twee vervolprojecten kort geschetst. Aangegeven wordt op welke manier het kader is gebruikt, wat dat oplevert en waarom dat type opbrengst juist met deze benadering kan worden bereikt. Daarbij is het goed op te merken dat deze vraag retrospectief wordt gesteld en dat ze dan ook niet rechtstreeks tot uitdrukking is gekomen in de methodologie of de opzet van de verschillende onderzoeken.

In de volgende paragraaf wordt geschetst wat de instrumentele benadering van het gebruik van gereedschap inhoudt. In paragraaf 3 komt de bijdrage van dit theoretisch kader aan het PROO-onderzoek aan de orde. Paragraaf 4 geeft een indruk van de voortzetting hiervan in twee vervolprojecten. Het artikel besluit met een conclusie met betrekking tot de hierboven gestelde vraag en een discussie, waarin de extrapolatie van de bevindingen ter sprake komt.

## 2 De instrumentele benadering van ICT-gebruik

Het gebruik van ICT bij het leren van wiskunde is een speciaal geval van het gebruik van gereedschap voor het uitvoeren van be-

paalde taken. Dat de mens gereedschap ontwikkelt en gebruikt, is natuurlijk een eeuwenoud gegeven. Vygotsky (1978, 1997) stelt dat gereedschap (*tool*) de menselijke activiteit medieert. Zulk cultureel-historisch ontwikkeld gereedschap kan materieel zijn, zoals een zeis, een viool, of een hamer. Het gereedschap vormt dan als het ware een verlengstuk van het lichaam. Daarnaast is er cognitief gereedschap, zoals taal of algebraïsche symbolen, dat we eerder beschouwen als verlengstuk van de geest. Computers en rekenmachines, waar we ons in dit artikel op concentreren, zijn materiële artefacten, maar communiceren met de gebruiker middels taal en symbolen en zijn in die zin dus ook cognitieve tools.

Vygotsky spreekt van instrumentele handelingen. Een instrumentele handeling omvat een probleem dat moet worden opgelost, de mentale processen die op dat oplossen gericht zijn, en het (psychologische) gereedschap dat de coördinatie en de loop van de mentale processen bepaalt. Wat hierin opvalt, is de actieve rol voor het gereedschap: het is immers mede bepalend voor de mentale processen en de objecten die daarbij worden gevormd. Dat gereedschap niet alleen maar passief wacht op de bediening door de gebruiker maar een rol speelt bij coördinatie van mentale en fysieke processen, is voor het leren van wiskunde met ICT-gereedschap een belangrijke constatering.

Cognitieve *tools* bemiddelen dus bij het ontwikkelen van mentale objecten. De instrumentele benadering, zoals in ons onderzoek gebruikt, richt zich op deze ontwikkeling en maakt daarbij gebruik van de begrippen artefact, instrument, instrumentele genese, schema, techniek en orkestratie. Deze begrippen worden hieronder toegelicht.

### 2.1 Artefact en instrument

Een belangrijk uitgangspunt van de instrumentele benadering is het idee dat gereedschap niet neutraal is: vanwege de mogelijkheden en beperkingen die het biedt, zal het invloed hebben op het handelen en denken van de gebruiker. We zien dat op allerlei terreinen terug. Onder invloed van de aanvankelijk beperkte mogelijkheden om beeld en geluid te scheiden, ontwikkelde de videofilm

zich bijvoorbeeld anders dan de traditionele 35-mm cinema. Een tweede voorbeeld vinden we bij Trouche (2000), die beschreef hoe bepaald gereedschap, namelijk een schenknannetje voor rechtshandigen met het schenktuitje aan de linkerkant, linkshandigen dwingt tot het ontwikkelen van nieuwe handelingstechnieken.

Gereedschap is dus niet neutraal. In dit licht wordt onderscheid gemaakt tussen het gereedschap als artefact en als onderdeel van een betekenisvol instrument (Rabardel, 2002; Verillon & Rabardel, 1995). Het *artefact* is het kale gereedschap, het materiële of abstracte voorwerp waarover de gebruiker beschikt, maar dat wellicht een betekenisloos object voor hem is zolang hij nog niet weet welk type activiteit het 'ding' op welke manier kan ondersteunen. Pas nadat de gebruiker inziet hoe het artefact zijn mogelijkheden bij bepaalde typen relevante taken kan vergroten en nadat hij de daarbij behorende vaardigheden heeft ontwikkeld, wordt het onderdeel van een waardevol en bruikbaar instrument dat de activiteit medieert.

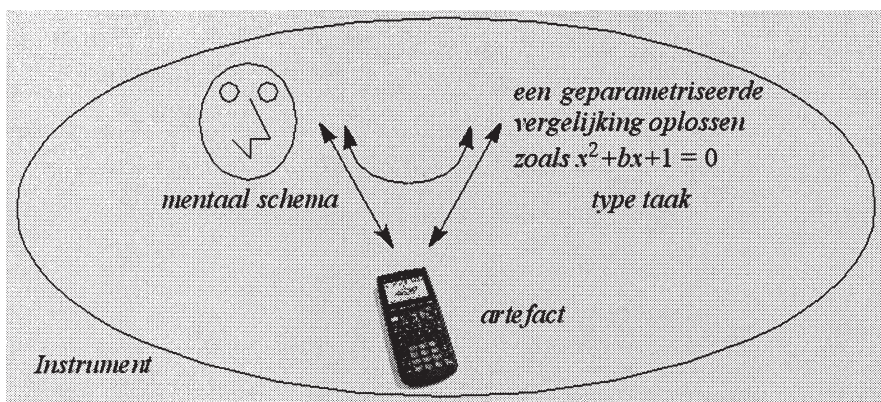
Wat is nu een instrument? In navolging van Rabardel spreken we van een *instrument* wanneer er een betekenisvolle relatie bestaat tussen het artefact en de gebruiker voor het uitvoeren van een bepaald type taken – in ons geval wiskundige taken – dat de gebruiker wil uitvoeren. Als we ons realiseren dat zich tijdens de interactie met het artefact bij de gebruiker mentale processen afspelen, dan valt op dat de drie hoofdrolspelers – het artefact, de mentale processen en de taak –

dezelfde zijn als in de beschrijving van de instrumentele handeling van Vygotsky hierboven. Zeker bij wiskundige artefacten zoals rekenmachines en computers spelen deze mentale processen een centrale rol, en ze vormen ook een belangrijk doel van ons onderwijs. Deze mentale processen krijgen de vorm van schema's, waarover verderop meer.

Het instrument omvat dus het artefact en de mentale schema's die de gebruiker ontwikkelt voor het uitvoeren van een bepaalde klasse van taken. In telegramstijl: instrument = artefact + schema. Figuur 1 geeft dit schematisch weer. Daarbij is het enigszins arbitrair of de taak nu wel of niet deel uitmaakt van het instrument. Omdat het schema wel van de taak af zal hangen, ligt het in onze ogen voor de hand dat wel zo te zien. Van belang voor het vervolg is in elk geval dat de term instrument hier dus een specifieke betekenis heeft die door het omvatten van de mentale schema's afwijkt van de normale betekenis. Ietwat anders dan Vygotsky gebruiken we de woorden gereedschap en tool in dit artikel in neutrale zin, namelijk als we in het midden laten of het artefact of het instrument bedoelen.

## 2.2 Instrumentele genese

Een instrument omvat dus behalve het artefact ook de mentale schema's die de gebruiker nodig heeft om een taak met behulp van het artefact tot een goed einde te brengen. Het proces waarin de gebruiker, in ons geval de leerling, het artefact leert kennen, de bij specifieke taken behorende schema's ontwik-



Figuur 1. Het instrument als artefact en mentaal schema voor een type taak.

kelt en het artefact efficiënt en doelgericht leert gebruiken wordt de *instrumentele genese* genoemd, zeg maar de instrumentwording.

Het proces van instrumentele genese heeft vaak twee kanten, die worden gesymboliseerd door de tweezijdige pijlen in Figuur 1. Aan de ene kant leiden de mogelijkheden en beperkingen van het artefact tot een bepaalde aanpak, die ook een bepaalde kijk op de situatie met zich meebrengt en die een weerslag krijgt in een mentaal schema. Het denken van de gebruiker vormt zich dan onder invloed van het artefact. Aan de andere kant zal de gebruiker ook het artefact naar zijn hand zetten en op die manier vorm geven. Wie bijvoorbeeld een nieuwe versie van een tekstverwerkingsprogramma op een computer installeert of van Windows XP overstapt op Vista, verandert de functionaliteit en breidt daarmee het artefact uit. Hetzelfde geldt voor de leerling die een programmaatje in de grafische rekenmachine zet dat de oplossingen van kwadratische vergelijkingen oplevert. Het denken van de leerling kan dus ook het artefact vormen (Hoyles & Noss, 2003). In de theorie van de instrumentele benadering wordt dit tweerichtingsverkeer aangegeven met *instrumentatie* (het artefact vormt en richt het denken van de gebruiker) en *instrumentalisatie* (het artefact wordt ingericht door acties van de gebruiker).

De ervaringen uit met name Frans onderzoek leren dat de instrumentele genese voor computeralgebra, het artefact van het PROO-deelonderzoek, in het algemeen een tijdrovend en veelomvattend proces is (Artigue 2002; Guin, Ruthven, & Trouche, 2004; Lagrange, 2000; Trouche, 2004).

### 2.3 Schema en techniek

Instrumentele genese behelst dus de ontwikkeling van schema's, door Vergnaud (1996) gedefinieerd als een invariante organisatie van gedrag voor een gegeven klasse van situaties. Anders gezegd: een schema is een min of meer vaste manier om met een bepaald type situaties of taken om te gaan. Om te benadrukken dat we ons hier richten op schema's die onderdeel uitmaken van een instrument, spreken we van *instrumentatieschema's*. Kenmerkend voor de instrumentele benadering is nu de veronderstelling, dat

een schema zowel begripsmatige als technische componenten bevat, die samenhangen en zich bij de instrumentele genese simultaan ontwikkelen.

Een voorbeeld van een instrumentatieschema bij het gebruik van een tekstverwerker is het knip-en-plakschema, dat wordt gebruikt bij het verplaatsen van een alinea in een tekst zoals dit artikel. Een ervaren gebruiker past dit snel en routinematig toe door middel van enkele toetsaanslagen en/of muis klikken. Maar herinnert u zich nog de eerste keer dat u dit deed? U kreeg met zowel technische als begripsmatige aspecten te maken. U moest de weg vinden door een aantal menu's of enkele *shortcuts* kennen, maar ook het beangstigende feit accepteren dat de te verplaatsen alinea halverwege de procedure even verdwenen leek te zijn. Enig inzicht in het verschil tussen de weergave op het beeldscherm en het werkgeheugen van de computer is dus een conceptueel aspect van het bijbehorende schema. Zonder dat is de instrumentele genese van het knip-en-plakschema niet compleet en blijft het toepassen ervan lastig; aan de andere kant roept de knip-en-plaktechniek dit inzicht ook zelf op, want in tweede instantie komt de alinea toch weer tevoorschijn.

Als de taak uit een wiskundig probleem bestaat, omvat het instrumentatieschema inzicht in de wiskundige concepten die ten grondslag liggen aan de probleemaanpak, het overzicht op de oplossingsstrategie en de technieken die met het artefact kunnen worden uitgevoerd om de oplossingsstrategie ten uitvoer te brengen. Kenmerk van de instrumentele benadering is weer dat het mentale beeld van de begrippen, de strategie en de technieken met elkaar verweven zijn en zich ontwikkelen in relatie tot de mogelijkheden en beperkingen van het artefact. Het technische werk met het artefact (in ons geval ICT-gereedschap, namelijk computeralgebra) hangt dus samen met begripsmatig inzicht; de kunst voor de onderwijsontwikkelaar of docent is om deze verwevenheid uit te buiten voor het leerproces.

Een voorbeeld van een instrumentatieschema in een wiskundige context is het instellen van het kijkvenster van een grafische rekenmachine (Goldenberg, 1988). De tech-

nische aspecten die de genese van dit schema veronderstelt, zijn niet moeilijk: het gaat om het vinden van het menu waarin de gewenste afmetingen kunnen worden ingevoerd en het weten wat de verschillende afkortingen in dat menu betekenen. Het invullen van negatieve getallen met de juiste mintoets met het daarbij horende onderscheid tussen de binaire en de unaire min, dus tussen het eerste en het twee minteken in  $2 - 6 = -4$ , is een voorbeeld van een gebruiksschema dat hier als bouwsteen fungeert. Begripsmatig is er echter meer nodig: de leerling moet zich het idee eigen maken dat het scherm van de rekenmachine slechts een relatief klein kijkvenster of raampje is, waardoor we naar een in theorie oneindig groot tekenvlak kijken. De positie en de afmetingen van het raampje bepalen of we een deel van de ook al weer oneindige grafiek te zien krijgen. Ook moeten we over vaardigheden beschikken om een instelling te vinden die een deel van de grafiek in beeld brengt. Op basis van onze ervaringen vermoeden we dan ook dat de moeilijkheden met dit schema eerder een begripsmatig dan een technisch karakter hebben (Drijvers & Doorman, 1996).

Een instrumentatieschema bevat dus naast concepten ook technieken. Wat verstaan we onder een techniek? Een *techniek* zien we als een sequentie van interacties tussen gebruiker en artefact. Omdat de gebruiker bij de uitvoering van de techniek natuurlijk beelden in het hoofd heeft, is de techniek in feite de manier waarop het instrumentatieschema zich manifesteert. Mentale schema's zijn niet rechtstreeks waarneembaar; onze observaties zijn beperkt tot de technieken die leerlingen met het artefact uitvoeren, en de manier waarop ze die opschrijven en daarover praten. Uit deze gegevens proberen we de schema's te reconstrueren, waarbij we ons moeten realiseren dat het niet meer dan reconstructies betreft.

Overigens wordt over het belang van schema's en technieken verschillend gedacht. Binnen de instrumentatietheorie is sprake van twee stromingen: de ene benadrukt de vorming van schema's in de lijn van Rabardel (2002) en de andere concentreert zich in de lijn van Chevallard (1999) op technieken (Monaghan, 2005).

## 2.4 Instrumentele orkestratie

Instrumentele genese is een individueel proces, dat echter plaats vindt in een sociale context. Bovendien richt het onderwijs zich op gedeelde kennis waarover communicatie mogelijk is. Daarom is afstemming nodig van de verschillende instrumenten zoals die zich bijvoorbeeld in een klas leerlingen ontwikkelen, zodat een welluidend orkest ontstaat. Deze afstemming vindt gedeeltelijk plaats door samenwerkend leren en uitwisseling tussen leerlingen; daarnaast ligt hier een belangrijke taak voor de docent die het orkest als het ware dirigeert. De kunst is dan om instrumentele genese in een klas te laten convergeren tot collectieve instrumentatie, zodat een productieve *community of practice* in de zin van Wenger (1998) ontstaat.

Onder een *instrumentele orkestratie* verstaan we de intentionele en systematische organisatie door de docent van de verschillende artefacten in een leeromgeving die tot doel heeft de instrumentele genese van leerlingen te bevorderen (Drijvers & Trouche, in druk). Hierbij parafraseren de auteurs de Franse musicoloog Lavignac, die orkestratie in zijn werk "Les gaietés du conservatoire" uit 1900 omschreef als "de kunst om de verschillende sonoriteiten te laten klinken van het collectieve instrument dat orkest heet." Een instrumentele orkestratie bestaat uit een didactische configuratie – het arrangement van de artefacten in een leeromgeving, aangepast aan de wiskundige taken (en exploitatiemodi van die configuratie) dus de manieren waarop de docent de configuratie kan benutten voor de beoogde instrumentele genese. Het werk van Hoek in een van de andere deelonderzoeken van het PROO-aandachtsgebied maakt duidelijk hoe belangrijk instrumentele orkestratie is en hoezeer deze taak docenten in eerste instantie voor problemen kan stellen (Hoek, in dit nummer; Hoek & Seegers, 2004). Deze instrumentele orkestratie kan worden beschouwd als het creëren en exploiteren van een *learning ecology* in de zin van Cobb, Stephan, McClain en Gravemeijer (2001), waarvan ICT-gereedschap een geïntegreerd deel uitmaakt.



### 3 De instrumentele benadering in het PROO-deelonderzoek<sup>1</sup>

In de vorige paragraaf zijn de belangrijkste ingrediënten van het theoretisch kader weergegeven. De vraag is nu welke bijdrage dit kader heeft geleverd aan het PROO-deelonderzoek *Algebra leren in een computer-algebraomgeving*, dat zich richtte op de vraag hoe het gebruik van computeralgebra het inzicht in het parameterbegrip kan bevorderen. Hieronder beschrijven we eerst kort de methodologie van deze studie. Dan komt een voorbeeld van een schema en de bijbehorende instrumentele genese aan de orde. Deze paragraaf besluit met een algemenere beschrijving van de bijdrage van de instrumentele benadering in dit onderzoek.

#### 3.1 Methodologie

Het deelonderzoek is te typeren als een ontwikkelingsonderzoek in de zin van Gravemeijer & Cobb (in dit nummer). Bij het wiskundige parameterbegrip zijn in een cyclisch proces een hypothetisch leertraject en een leergang ontwikkeld voor klassen 3 en 4 van het vwo, waarbij de leerlingen de beschikking hebben over een symbolische rekenmachine. Een symbolische rekenmachine is een calculator die niet alleen kan rekenen, maar ook grafieken tekent en algebraïsche bewerkingen uitvoert.

Het onderzoek bestond uit een drietal macrocycli in vier vwo-3-klassen en één vwo-4-klas, en een tussencyclus in één vwo-4-klas. De leerlingenpopulatie van de vwo-4-klassen vormde een deelverzameling van de deelnemers uit vwo-3. In totaal waren 110 leerlingen en 4 docenten bij het onderzoek betrokken, allen van dezelfde school en zijn ruim 100 uren geobserveerd.

Gegevens zijn onder andere verzameld door mini-interviews met zo veel mogelijk leerlingen te houden (Gravemeijer & Cobb, in dit nummer). In zo'n mini-interview, dat in de klas plaatsvindt tijdens een periode van zelfwerkzaamheid van de leerlingen, benadert de onderzoeker een tweetal leerlingen met een vooraf bepaalde 'ijkpuntvraag', die het mogelijk moet maken het denken van de leerlingen in combinatie met het gebruik van de symbolische rekenmachine te traceren.

Daarnaast zijn bij een beperkt aantal leerlingen video-opnames gemaakt van de schermen van de symbolische rekenmachines die ze gebruiken. Van alle leerlingen zijn schriftelijk werk en toetsresultaten verzameld.

Het onderzoek richtte zich voornamelijk op het leren van de individuele leerling en minder op de rol van de docent. De individuele instrumentele genese stond dus centraal, terwijl de instrumentele orkestratie minder aandacht heeft gekregen.

Deze instrumentele genese is onderzocht door instrumentatieschema's te identificeren. In lijn met het cyclische karakter van ontwikkelingsonderzoek heeft deze identificatie zich op een iteratieve manier voltrokken. In de voorbereidende fase zijn verwachtingen omtrent de instrumentele genese geformuleerd in samenhang met het ontwerp van de leergang en de kernopgaven daarbinnen. Tijdens de fase van het onderwijsexperiment zijn de observaties, en met name de mini-interviews, gericht op deze hypothetische schemaontwikkeling. In de retrospectieve fase is het leerlingengedrag vanuit deze hypothetische genese geanalyseerd en zijn de waargenomen schema's beschreven. Dit leidde tot *feed forward* voor de volgende macro-cyclus, waarbij de leergang, soms op lokaal en soms op meer globaal niveau, is herzien om de instrumentele genese en daarmee het beoogde leren beter te laten verlopen.

Dit alles resulteerde in een soort ideale schema's, die in 'pure' vorm zelden compleet worden geobserveerd, maar waarvan de elementen het meest gebruikelijke leerlingengedrag beschrijven. Deze schema's maken het mogelijk om leerlingengedrag te duiden en moeilijkheden te verklaren.

#### 3.2 De instrumentele genese van een schema voor het oplossen van vergelijkingen

Als voorbeeld van zo'n schema en de bijbehorende instrumentele genese nemen we het schema voor het oplossen van vergelijkingen die een parameter bevatten (zie ook Drijvers & Gravemeijer, 2004b). Het artefact is in dit geval de symbolische rekenmachine van het type TI89, of, iets preciezer gezegd, de algebramodule van dit apparaat. De taak bestaat uit het oplossen van vergelijkingen

die een parameter bevatten. Dat wil zeggen dat de vergelijking behalve de onbekende, in veel gevallen  $x$  genoemd, ook nog een of meer andere variabelen bevat die van een hogere orde zijn. Het meest bekende voorbeeld is wellicht de algemene kwadratische vergelijking  $ax^2 + bx + c = 0$ , die met de wortel-formule of abc-formule kan worden opgelost.

Het oplossen van zo'n vergelijking met dit artefact lijkt een trivialeiteit: je voert het *solve*-commando in en de rest gaat vanzelf. Niets blijkt echter minder waar. Leerlingen van vwo-3 en vwo-4 maken allerlei fouten bij het toepassen van deze techniek en ervaren obstakels die in veel gevallen een begripsmatige achtergrond hebben. Er dient dus een proces van instrumentele genese plaats te vinden.

De eerste opgave rond dit type taak betreft een functie  $f$  met  $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  en luidt: "Bepaal in het algemeen de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van  $f$  met de  $x$ -as." Dit stelt twee leerlingen uit vwo-4, Ada en Maria, voor problemen.

*Maria:* Dit is een hartstikke moeilijke vraag. Bepaal de algemene coördinaten, hoe kun je nou coördinaten bepalen van iets als het geen getallen heeft [...] dat is toch onmogelijk? [...] Maar hoe kun je nou algemeen weten waar die snijdt? Dat is toch verschillend per...

*Ada:* Snijpunten met de  $x$ -as is gewoon 0 invullen, dat willen ze toch?

*Maria:* Maar je kan toch niks invullen in een formule met  $a$ 's en  $b$ 's en  $c$ 's?

Hoewel Maria technisch gesproken in staat is om de geparametriseerde vergelijking in te typen en die met *solve* naar  $x$  op te lossen, staat een cognitief conflict dat in de weg. De eerste zin van het protocol geeft aan dat zij oplossingen ziet als numerieke resultaten, iets wat "verschillend is per" waarde van  $a$ ,  $b$  en  $c$  in plaats van één algebraïsche uitdrukking in  $a$ ,  $b$  en  $c$ . Om deze vergelijking met de symbolische rekenmachine op te lossen, moet Maria haar conceptie van oplossingen van vergelijkingen uitbreiden van alleen numerieke antwoorden tot algebraïsche expressies. De instrumentele genese van dit schema vraagt dus om een uitbreiding van de visie op wat een oplossing van een vergelijking is.

In een van de vervolgo opdrachten is de

vraag om de nulpunten van de functie  $f$  met  $f(x) = x^2 + b \cdot x + 1$  uit te drukken in de parameter  $b$ . Daarbij de volgende waarneming.

Maria voert in *solve* ( $x^2 + b \cdot x + 1 = 0$ ,  $b$ ) en lost dus op naar  $b$  in plaats van naar  $x$ .

*Maria:* Dus je doet zeg maar  $0 =$  en dan komma  $b$ , want je moet hem naar  $b$  oplossen.

*Observer:* Nou nee.

*Maria:* Je moest toch uitdrukken in  $b$ ?

*Observer:* Ja maar je wilt de nulpunten weten, je wilt de  $x$  weten, maar omdat je  $b$  nog niet weet krijg je dan iets met de  $b$  erin.

*Maria:* Ik denk namelijk al, ik dacht dat je  $b$  eruit moest halen.

Het idee om één variabele uit te drukken in een andere is niet duidelijk voor Maria. Ze onderscheidt de verschillende rollen van de letters niet goed. Ze heeft ook nog niet de juiste taal ontwikkeld. In tweede instantie, gestuurd door het bovenstaande gesprekje waarin de observator zich laat verleiden tot uitleg van de essentie, lost Maria de vergelijking wel naar  $x$  op. Dat is een stap in de instrumentele genese. Bij het overschrijven van het resultaat in haar schrift maakt ze vervolgens het wortelteken in de tweede oplossing te lang (Figuur 2). Ze gebruikt niet de pijl-tjestoetsen van de machine om de tweede expressie geheel in beeld te krijgen en realiseert zich niet dat in de twee oplossingen wel eens dezelfde wortel zou kunnen voorkomen. De notie dat de twee oplossingen van een kwadratische vergelijking dezelfde wortel bevatten, is kennelijk niet aanwezig.

Zoals gezegd leidt de analyse van het proces van instrumentele genese bij de leerlingen tot het formuleren van een 'ideaal' schema, waarin de conceptuele en technische stappen worden samengevat. Figuur 3 visualiseert het schema voor het oplossen van geparametriseerde vergelijkingen. Het schermplaatje in het midden geeft aan hoe bijvoorbeeld de vergelijking  $x^2 + bx + 1 = 0$  met de TI89 symbolische rekenmachine naar  $x$  wordt opgelost. De pijlen symboliseren de stappen die in de instrumentele genese moeten worden gezet. Deze stappen zijn gedeeltelijk technisch van aard en betreffen bijvoorbeeld de syntax van het *solve* commando; tegelijkertijd interfereren ze met inhoudelijke aspecten, die veelal ook de struikelblokken in het proces vormen.

$$\text{nulpunten} = \frac{\sqrt{b^2 - 4} - b}{2} \text{ en } \frac{-\sqrt{b^2 - 4} + b}{2}$$

$$\text{midden} = -\frac{1}{2} b.$$

Figuur 2. Een foutief overgeschreven antwoord.

Het gaat dan met name om de volgende punten.

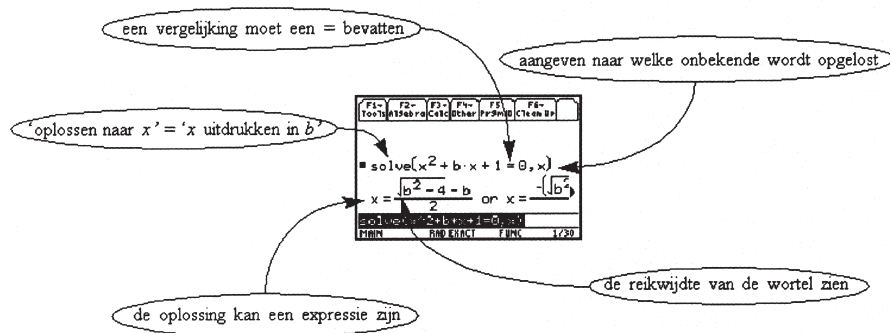
- Inzien dat *solve* leidt naar de oplossing van het probleem, en met name dat het gebruikt kan worden om een variabele uit te drukken in andere. Dat betekent een uitbreiding van de conceptie van oplossen, zodat niet alleen getallen maar ook expressies als oplossing worden beschouwd. In het eerste deel van de observatie van Maria zien we dit naar voren komen.
- Weten waar het *solve*-commando op de machine te vinden is, de syntax kennen en in het bijzonder ook het verschil weten tussen een expressie en een vergelijking als het gaat om een vergelijking van het type *expressie* = 0. Dit is uit observaties naar voren gekomen die niet in dit artikel worden beschreven.
- Zich realiseren dat een vergelijking altijd naar een onbekende wordt opgelost, die niet noodzakelijk *x* heet, en dus de onbekende aan het einde van het commando *solve*(*vergelijking*, *onbekende*) niet vergeten. Dit punt speelt bij het tweede deel van de observatie van Maria een rol.
- Een algebraïsche expressie als oplossing accepteren en interpreteren, en daar met enige algebraïsche expertise naar kunnen

kijken. De overschrijffout die Maria in Figuur 2 maakt, maakt duidelijk dat het hier bij haar nog aan schort.

Een dergelijke schetsmatige opsomming heeft natuurlijk beperkingen: ze kan een rigide indruk maken en beschrijft eerder het beoogde eindproduct dan het groeiproces erheen. Toch is onze ervaring dat een dergelijke inventarisatie een middel is voor onderzoeker én docent om de relatie tussen technische en begripsmatige aspecten te inventariseren. Pas daarna kunnen we het artefact optimaal inzetten voor het leerproces. Tevens helpt een dergelijke schemabeschrijving om de voortgang van de instrumentele genese van een individuele leerling in kaart te brengen.

### 3.3 De bijdrage van de instrumentatietheorie

Het voorbeeld van de geparametriseerde vergelijkingen illustreert hoe de 'lens' van de instrumentatietheorie, en daarbinnen de nadruk op de verwevenheid van technische en conceptuele aspecten die zich hand-in-hand ontwikkelen tijdens de instrumentele genese, een bijdrage levert aan het onderzoek naar het inzicht in het parameterbegrip. Het gebruik van het artefact is aanleiding om de kijk op het oplossen van vergelijkingen op



Figuur 3. Conceptuele aspecten van het gebruik van *solve*.



verschillende manieren aan te scherpen. De mogelijkheden en beperkingen van het artefact, in samenhang met de gestelde taak, benadrukken daarbij andere zaken dan bij het werken met de hand naar voren komen.

In ons onderzoek zijn meer van dergelijke schema's geïdentificeerd. Als aanvulling op de uitgebreidere beschrijving in de vorige paragraaf geven we hiervan een beknopt overzicht, waarbij we ook de essentie van eerdergenoemde schema's samenvatten.

- Het substitueren van expressies.

Het werken in de computeralgebraomgeving vraagt om een helder beeld van substitutie als een zoek-en-vervangproces, waarin alle instanties van de variabele worden vervangen door de aangegeven expressie. Ook speelt hier de objectkijk op algebraïsche expressies een rol. Dit schema is verder uitgewerkt in Drijvers en Gravemeijer (2004a).

- Het oplossen van stelsels vergelijkingen.

Dit is een samengesteld schema. Bij de afstemming en integratie van de verschillende deelschema's bleek het van belang dat elk van deze onderdelen goed beheerst wordt en dat de leerling in staat is het samenspel ervan in de globale oplossingsaanpak goed in het oog te houden. Daarbij speelt het onderscheiden van de rollen van de verschillende variabelen een rol. Dit schema is verder uitgewerkt in Drijvers en Van Herwaarden (2000).

- Het schakelen tussen exacte en benaderende oplossingen.

Het vermogen van de computeralgebraomgeving om exact te rekenen en te manipuleren leidt tot een bewustzijn van het verschil tussen exact/algebraïsch werken en de numeriek/benaderende aanpak. Technieken die bij zo'n schema een rol spelen zijn het benaderen van exacte resultaten met de  $\approx$  toets, het kiezen van de instelling van de machine en het invoeren van een getal als breuk dan wel als decimaal getal. Dit punt is ook door andere onderzoekers gesignaleerd (Trouche, 2004).

- Het invoeren van expressies.

Bij het invoeren van expressies speelt een schema dat als technische component onder meer heeft het vermogen om een

formule lineair in te voeren. Immers, de TI89 beschikt niet over een tweedimensionale *pretty print formule editor*, al wordt de uitvoer wel tweedimensionaal weergegeven. Conceptueel betekent dit dat de leerling in staat moet zijn om de structuur van de in te voeren expressie te doorzien om die om te kunnen zetten naar een lineaire gedaante, wat in praktijk een behoorlijke drempel kan zijn.

- Equivalentie van expressies.

Regelmatig komt het voor dat het resultaat van het werk in de computeralgebraomgeving er anders uitziet dan men zou denken of op basis van andere informatie (werk met de hand, uitkomst in het boek) verwacht. Dit schema doet een beroep op het inzicht in de structuur van de expressies, een type algebraïsche expertise die wel als onderdeel van *symbol sense* wordt beschouwd (Arcavi, 1994; Zorn, 2002) en is verder uitgewerkt in Kieran en Drijvers (2006).

- Het instellen van het kijkvenster.

Het schema voor het instellen van het kijkvenster, dat al in paragraaf 2.3 is aangeduid, is niet specifiek voor computeralgebra, maar speelt ook een rol bij grafische software en grafische rekenmachine. Hiermee bevestigen de ervaringen van dit onderzoek de bevindingen uit de literatuur.

De schema's uit deze opsomming zijn zowel onderwerp- als artefactafhankelijk. Schema's zullen anders zijn wanneer het artefact andere kenmerken heeft. Als bijvoorbeeld het computeralgebrapakket niet vereist dat de onbekende bij een het oplossen van een vergelijking wordt geëxpliciteerd, leidt dat tot een andere schema voor het oplossen van vergelijkingen.

Samengevat is het denken in schema's en instrumentele genese in het PROO-deelonderzoek een middel gebleken om de wisselwerking tussen het gebruik van het gereedschap en het wiskundig denken te onderzoeken, dat in de verschillende fasen van het ontwikkelingsonderzoek kan worden gebruikt. In feite maakt het beschrijven van de instrumentatieschema's onderdeel uit van het ontwerpproces en vormen beschrijvingen

zoals hierboven een belangrijke opbrengst van het onderzoek.

## 4 Uitwerking in vervolgonderzoek

De instrumentele benadering van het gebruik van ICT-gereedschap is na afloop van het PROO-deelonderzoek toegepast in twee vervolprojecten, een kortlopend onderwijs-onderzoek en een onderzoek gefinancierd door de Canadese overheid. Hieronder lichten we kort toe op welke manier het gebruik van dit theoretisch kader zich in deze twee studies verder heeft ontwikkeld.

### 4.1 Algebra en applets, leren en onderwijzen

Het kortlopende onderwijs-onderzoek *Algebra en applets, leren en onderwijzen*<sup>2</sup> richt zich op de vraag in hoeverre het gebruik van oefenapplets de algebraïsche vaardigheden van leerlingen kan bevorderen. Daarnaast is de vraag op welke manier de docent het gebruik van de applets optimaal kan orkestreren.

De methodologie van dit kleinschalige onderzoek omvat het verzamelen van leerlingewerk door middel van screenvideo-opnames. Daarnaast is het digitale werk van leerlingen doorlopend opgeslagen. Om de rol van de docent te onderzoeken, zijn haar interacties met leerlingen opgenomen met behulp van een clipmicrofoon.

Omdat in dit onderzoek bij aanvang is gekozen voor de instrumentele benadering als theoretisch kader, zijn al *a priori* hypothetische instrumentatieschema's opgesteld. Deze hypothetische schema's hangen samen met het hypothetisch leertraject en met de concrete opgaven die aan de leerlingen zijn voorgelegd. Door met name het leerlingengedrag bij kernopgaven te observeren, zijn de hypothetische schema's getoetst en bijgesteld tot geobserveerde schema's.

Een voorbeeld van zo'n schema betreft, net als in de vorige paragraaf, het oplossen van vergelijkingen. De situatie is echter in een aantal opzichten verschillend. Ten eerste wordt een ander artefact gebruikt, namelijk een applet in plaats van een symbolische rekenmachine. Een applet is een kleine interactieve toepassing die via internet toeganke-

lijk is (zie bijvoorbeeld [www.wisweb.nl](http://www.wisweb.nl)). In dit geval gaat het om een sequentie van applets, die het oplossen van vergelijkingen mogelijk maken, maar waarbij in de loop van het leerproces steeds minder hulp wordt geboden. Daardoor benadert het werk in toenemende mate het conventionele oplossen met pen en papier. Dit artefact is minder open en minder didactiekvrij dan de computeralgebra die in het PROO-deelproject werd gebruikt.

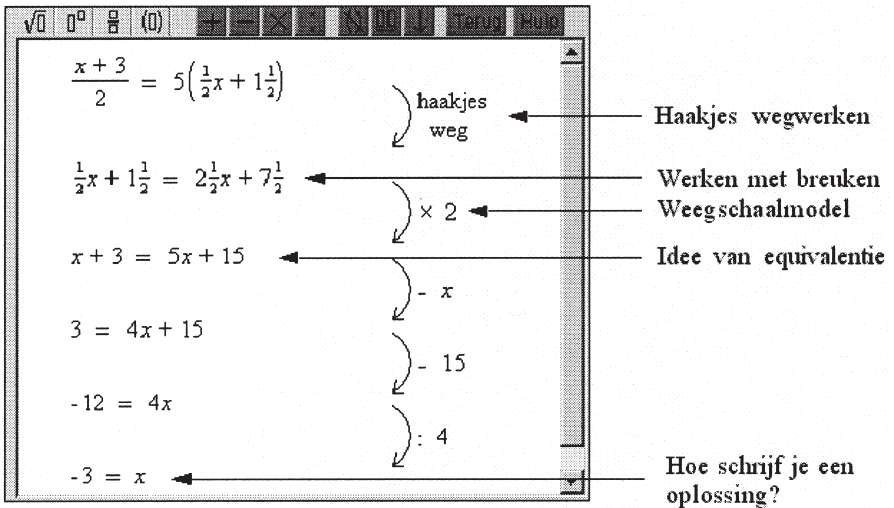
Een tweede verschil is de taak, en met name het type vergelijkingen dat aan de orde komt. De vergelijkingen zijn lineair en bevatten slechts één variabele. Dit hangt samen met de leeftijd en het niveau van de leerlingen: het onderzoek richt zich op klas 2 van havo en vwo.

Het beoogde mentale model dat leerlingen ontwikkelen is dat van de balans: een vergelijking wordt voorgesteld als een balans waarvan de twee zijden in evenwicht zijn. Om dat evenwicht te handhaven moet er aan beide zijden evenveel worden afgehaald of toegevoegd.

Figuur 4 beeldt enkele belangrijke elementen van het instrumentatieschema voor het oplossen van vergelijkingen met het applet weer, zoals dat uit het onderzoek naar voren is gekomen (Boon & Drijvers, 2005; 2006). Het schema omvat de volgende punten:

- weten wat equivalentie van vergelijkingen inhoudt, zoals gesymboliseerd door de verticale pijl in de toolbar boven in het scherm;
- het concept van het balansmodel begrijpen, waarin de bewerkingen worden gesymboliseerd door de gekromde pijlen in het werkvenster;
- zich bewust zijn van de conventies rond de volgorde in algebraïsche vergelijkingen, en  $-3 = x$  als oplossing beschouwen;
- in staat zijn om te gaan met breuken, haakjes en negatieve getallen.

Meer dan in het PROO-deelonderzoek is in deze studie ook aandacht besteed aan de orkestratie door de docent. Zowel in het klassikale onderwijs als tijdens de begeleiding van tweetallen leerlingen die met het applet aan het werk zijn, is het docentengedrag geïnventariseerd. De eerste, en gelet op de beperkte omvang van het onderzoek voor-



Figuur 4. Conceptuele aspecten aan het gebruik van het applet *Vergelijkings Oplossen*.

zichtige, conclusie hiervan is dat de orkestratie vraagt om een veranderend en zich uitbreidend didactisch repertoire van de docent. Het geobserveerde didactische repertoire dat de docent hanteert ten behoeve van de orkestratie staat natuurlijk niet haaks op de praktijk van 'traditionele' lessen. Wel zien we nieuwe elementen en accentverschuivingen, die suggereren dat het didactisch exploiteren van de technieken met het artefact om een specifieke aanpak van de docent vraagt.

Samengevat zien we dat de instrumentele benadering in het KLOO-onderzoek leidt tot het opstellen en evalueren van instrumentatieschema's en tot het inventariseren van het docentgedrag in termen van die verwevenheid tussen wiskundig denken en handelen enerzijds en technieken met de applets anderzijds.

#### 4.2 Computeralgebra en equivalentie

De instrumentele benadering is op een andere manier gebruikt in het onderzoek *Algebra in Partnership with Technology*<sup>3</sup>. In dit project is de nadruk gelegd op technieken in plaats van op schema's. Daarbij is het idee ontstaan om de technieken die leerlingen hanteren bij het gebruik van ICT-gereedschap te confronteren met de technieken die ze met pen en papier gebruiken. In feite is hier dus sprake van twee artefacten: het ICT-gereedschap (net als in de PROO-studie een

symbolische rekenmachine) en de traditionele combinatie van pen en papier. De op het oog vergelijkbare technieken in beide artefacten zijn verschillend en de confrontatie van de twee technieken blijkt het denken van leerlingen te bevorderen, evenals de ontwikkeling van nieuwe pen-en-papier technieken (Kieran & Drijvers, 2006).

Een van de deelonderzoeken van dit project heeft plaatsgevonden in een klas op een school in Montréal, die vergelijkbaar is met een vwo-4-klas in het Nederlandse systeem. Het onderwerp van een van de lessenseries is het ontbinden in factoren van veeltermen van de vorm  $x^n - 1$ , waarbij  $n$  een positief geheel getal voorstelt. De techniek met de symbolische rekenmachine is heel direct: de leerling typt bijvoorbeeld factor ( $x^4 - 1$ ) in en krijgt een antwoord (Figuur 5).

Het punt is echter, dat het voor de leerlingen niet duidelijk is hoe zij dit antwoord zelf zouden kunnen vinden. De pen-en-papier technieken waarover zij beschikken, zijn namelijk beperkt: ze ontbinden  $x^4 - 1$  in

$$\text{factor}(x^4 - 1)$$

$$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1)$$

Figuur 5. Ontbinden in factoren met een symbolische rekenmachine.

$(x - 1) \cdot (x^3 + x^2 + x + 1)$ . Figuur 6 laat enkele uitwerkingen van leerlingen zien op de (Engelstalige) werkbladen. In de linkerkolom van de tabellen staat de ontbinding van de veelterm zoals leerlingen die met pen en papier maken. In de middelste kolom staan de antwoorden die ze met de symbolische rekenmachine vinden. In de rechterkolom staan de manieren waarop ze de twee eerdere antwoorden met elkaar rijmen, als die ten minste verschillend zijn. Als de antwoorden overeenstemmen, hoeft er niets gedaan te worden en antwoorden de leerlingen met 'N/A' (not applicable, niet van toepassing) of laten ze de cel leeg.

In Figuur 6 zien we op welke manier de leerlingen de twee antwoorden met elkaar rijmen:

- Ze vermenigvuldigen de tweede en derde factor van het machineantwoord met elkaar en krijgen zo het pen-en-papierresultaat (bovenste tabel, cel rechtsonder, 8 van de 17 leerlingen).
- Ze ontbinden de tweede factor van het pen-en-papier antwoord in de tweede en derde factor van het machineantwoord door verder groeperen (middelste tabel, cel rechtsonder, 8 leerlingen).
- Een leerling ontbindt  $x^4 - 1$  opnieuw door

het als verschil van twee kwadraten te zien (onderste tabel, cel rechtsonder). De conclusie van dit onderzoek is dat de confrontatie van verschillende technieken met verschillende artefacten aanleiding kan zijn tot theoretische verdieping, zoals het bestuderen van patronen en het ontdekken van structuur in algebraïsche expressies, als ook tot het ontwikkelen van nieuwe technieken.

## 5 Conclusie en discussie

### 5.1 Conclusie

De vraag die aan het begin van dit artikel is gesteld, luidde: *welke bijdrage levert het theoretisch kader van de instrumentele benadering aan het onderzoek naar de rol van ICT bij het leren van wiskunde?* In de beschrijving van het theoretisch kader (paragraaf 2) is aangegeven hoe de instrumentele benadering van ICT-gebruik aansluit op eerdere theoretische ontwikkeling (Vygotsky en anderen) en focust op de integratie van ICT-gereedschap in het leren. Welke handvatten levert deze benadering ons in concreto bij het onderzoek naar de rol van ICT bij het leren van wiskunde?

In het algemeen gesproken kan de instru-

Factorization using paper and pencil	Result produced by FACTOR command	Calculation to reconcile the two, if necessary
$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$	$(x - 1)(x + 1)$	N/A
$x^2 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$	$(x - 1)(x^2 + x + 1)$	N/A
$x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$	$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$	$\frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$

Factorization using paper and pencil	Result produced by FACTOR command	Calculation to reconcile the two, if necessary
$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$	$(x - 1)(x + 1)$	
$x^2 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$	$(x - 1)(x^2 + x + 1)$	
$x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$	$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$	$\frac{x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}$

Figuur 6. Verschillende manieren om de antwoorden met elkaar in overeenstemming te brengen.

mentele benadering voor verschillende perspectieven waardevol zijn. Voor een ontwerper of een auteur van lesmateriaal waarin technologie een rol speelt, is ze een kader om te anticiperen op het verband tussen het werken met het artefact en het beoogde denken. Voor een docent vormt ze een denkraam van waaruit hij in individuele contacten of tijdens klassengesprekken kan reageren op leerlingen, zodat de verwevenheid tussen machinetechniek, wiskundig denken en wellicht ook het gebruik van papier en pen een plaats krijgt. Voor de onderzoeker is de instrumentele benadering een hulpmiddel om aandachtspunten voor observaties te plannen, observaties gericht uit te voeren en data-analyse te structureren.

Meer specifiek levert de instrumentele benadering vijf typen bijdragen aan onderzoek naar de rol van ICT bij het leren van wiskunde. Ten eerste behoedt de theorie de onderzoeker voor de valkuil van een te strikt onderscheid tussen de bediening van de knoppen van het tool en de ontwikkeling van inzicht. De theorie waarschuwt voor *oversimplificatie* van het gebruik van een tool in de geest van het wat naïeve idee 'het denken doet de leerling, het werk doet de machine'. Wellicht klinkt het triviaal, maar het gebruik van tools is complex. De instrumentele benadering doet recht aan deze subtiele complexiteit, die we ermee kunnen beschrijven, begrijpen en voorspellen. De casus van het *solve*-commando (paragraaf 3) vormt een voorbeeld van ICT-gebruik waarvan de toepassing zeer eenvoudig lijkt, maar waarbij leerlingen moeilijkheden blijken te ondervinden die eerder samenhangen met conceptuele ontwikkeling dan met gebrek aan technische toetsvaardigheid.

Ten tweede maakt het centrale uitgangspunt van 'instrument = artefact + schema' het mogelijk om de vakdidactische analyse van het te onderwijzen onderwerp en de analyse van de mogelijkheden en beperkingen van het artefact te *integreren*. De vakdidactische analyse leidt tot de identificatie van zinvolle technieken met het artefact. Dit leidt tot het opstellen van *a priori* hypothetische schema's, waarin conceptuele vakspecifieke en technische artefactspecifieke aspecten zijn verweven. De nadruk op de instrumentele ge-

nese en de verwevenheid van technische en conceptuele elementen in de mentale schema's die zich daarbij ontwikkelen, draagt bij aan een beter beeld van wat er in werkelijkheid gebeurt wanneer een artefact een structurele rol speelt bij het handelen. In het schema voor het gebruik van het *solve*-commando in paragraaf 3 komt deze verwevenheid duidelijk naar voren: de notie dat een vergelijking naar een onbekende wordt opgelost interfereert met de syntax van het commando, die vereist dat deze onbekende expliciet wordt aangegeven. In het voorbeeld van het vergelijkingenapplet in paragraaf 4.1 blijkt dat het conceptuele model van de weegschaal rechtstreeks samenhangt met de mogelijkheden van het applet. De verschillende *levels* in het applet reflecteren het traject in de leergang, dat geïnspireerd is op de hypothetische schema's, die immers een vruchtbare heuristiek vormen voor het ontwerp van een hypothetisch leertraject en een leergang.

Ten derde maakt de notie van instrumentele genese het mogelijk om de interacties van leerlingen met het tool vakdidactisch te *positioneren*. Leerlingengedrag kan worden geobserveerd en geanalyseerd in termen van de ontwikkeling van schema's. Als een leerling een syntactische fout maakt bij de toepassing van het *solve*-commando, kan dit een vergissing zijn, maar kan het ook wijzen op een onvolledige begripontwikkeling. Hetzelfde geldt voor een fout in de toepassing van het weegschaalmodel bij het gebruik van het vergelijkingenapplet. Anderzijds gaat de ontwikkeling van een geavanceerd schema ook vaak gepaard met vakinhoudelijke voortgang. De vraag bij het observeren en analyseren van leerlingengedrag is dus in hoeverre de *a priori* geformuleerde schema's en technieken werkelijk ontstaan bij leerlingen, welke obstakels zich daarbij voor doen, welke varianten ontstaan, en met welk denken dit gepaard gaat. Analyse van de gegevens leidt tot het antwoord op deze vraag en tot bijstelling van de *a priori* geformuleerde schema's.

Ten vierde leidt het theoretisch kader tot een *relevant type opbrengst*. De geschetste aanpak resulteert in a posteriori schema's, die enerzijds het eindresultaat van het beoogde

leerproces in kaart brengen, en anderzijds helpen om voortgang van leerlingen te duiden en problemen te lokaliseren. Haperende en succesvolle leerling–artefactinteracties kunnen uit deze resultaten worden verklaard en voorspeld. In het voorbeeld van het ontbinden in factoren van veeltermen (paragraaf 4.2) blijkt het conflict dat leerlingen ervaren tussen pen-en-papier antwoorden en ICT-antwoorden goed te verklaren te zijn door de verschillen tussen de technieken in beschouwing te nemen. Dergelijke opbrengsten leiden ook tot theorievorming, lokaal over het leerproces van een specifiek onderwerp en de rol daarbij van een specifiek artefact, en meer algemeen over het leren met tools.

Tot slot noemen we *de combinatie van individueel leerlingperspectief, collectief perspectief en docentperspectief* in de instrumentele benadering. Dit is niet uniek voor dit kader, maar wel krachtig. De didactische scenario's en de manieren om die te exploiteren worden geïnventariseerd, maar ook ontwikkeld en geanalyseerd in relatie tot de beoogde individuele instrumentele genese. De resultaten van het KLOO-onderzoek suggereren dat het concept van orkestratie het mogelijk maakt om docentgedrag te onderzoeken in het licht van de individuele en collectieve instrumentele genese. Daarmee vullen deze perspectieven elkaar aan.

## 5.2 Discussie

In deze slotdiscussie worden twee onderwerpen aangestipt: het verband tussen de instrumentele benadering en andere theoretische kaders en de reikwijdte van de instrumentele benadering.

Ten aanzien van *het verband tussen de instrumentele benadering en andere theoretische kaders* valt allereerst op te merken dat in het proces van instrumentele genese elementen naar voren komen van diagrammatisch redeneren en van emergent modelleren, zoals aangestipt in de bijdragen van Bakker en Doorman in dit nummer. Het grote verschil is echter, dat de instrumentele benadering de verhouding tussen het denken van de leerling en de handelingen met het artefact als centraal uitgangspunt neemt, wat in geval van een complexe ICT-rijke leeromgeving naar mijn idee terecht is. Dat neemt niet weg dat

de instrumentele benadering veel kan leren van andere theoretische benaderingen.

Een eerste aanvullend perspectief is dat van semiotiek, symboliseren en modelleren (Cobb, et al., 2001; Gravemeijer, Cobb, Bowers & Whitenack, 2000). Daarbij wordt de dialectische relatie tussen symboliseren en betekenisontwikkeling benadrukt. De beperking van de instrumentele benadering is er mogelijk in gelegen dat ze zich richt op de ontwikkeling van schema's in relatief vaste, bestaande technologische omgevingen, waarin leerlingen weinig ruimte hebben hun eigen symbolisering te ontwikkelen. Aan een vorm van 'symbolische genese' wordt niet veel aandacht besteed, al omvat de instrumentele genese natuurlijk wel een proces van betekenisontwikkeling bij de gegeven representaties en symbolisering.

Een tweede theoretische invalshoek die in relatie gebracht zou kunnen worden met de instrumentele benadering is de handelings-theorie en het idee van de *community of practice* (Engeström, Miettinen & Raija-Leena, 1999; Wenger, 1998). Het gevaar bestaat immers dat de instrumentele benadering zich te zeer richt op de individuele ontwikkeling en daarbij de sociale en collectieve aspecten uit het oog verliest. In dit verband is ook het werk van Yackel en Cobb (1996) interessant, die een interpretatief kader ontwikkelden voor het integreren van een individueel, psychologisch perspectief met het sociale, waarin klassennormen een rol spelen. In het lopende PROO-onderzoek *Tool use in innovative learning arrangements for mathematics*<sup>4</sup> wordt geprobeerd deze perspectieven sterker met de instrumentele benadering te integreren om zo ook meer aandacht te besteden aan de collectieve instrumentele genese en de orkestratie. De overeenkomsten en verschillenpunten met de diverse theoretische benaderingen zijn interessant en verdienen nadere uitwerking in de toekomst.

Ten aanzien van *de reikwijdte van de instrumentele benadering* merken we op dat de instrumentele benadering binnen het gepresenteerde onderzoek op een vruchtbare wijze heeft gefunctioneerd. Maar is deze benadering specifiek voor het gebruik van computeralgebra of applets, of kan ze ook worden toegepast bij ander ICT-gereedschap? De



eerste ervaringen met de instrumentele benadering van het gebruik van software voor dynamische meetkunde zijn veelbelovend (Laborde, 2003; Mariotti, 2002;). Ook is deze benadering gebruikt in onderzoek naar de inpassing van spreadsheets in het algebra-onderwijs (Haspékian, 2005) en lijken er voor statistische software ook mogelijkheden te liggen. Bakker (in dit nummer) beschrijft hoe applets een rol kunnen spelen in de ontwikkeling van statistisch inzicht. De vraag is in hoeverre het instrumentatieperspectief bij dergelijke lokale ICT-omgevingen vruchtbaar is, aangezien ze veelal kort worden gebruikt, waardoor schemaontwikkeling wellicht niet zo aanwijsbaar plaatsvindt. Van de toepassing van de instrumentele benadering bij grotere omgevingen voor dynamische modellen (denk bijvoorbeeld aan Powersim of Co-lab) verwachten we meer, mits ze lang genoeg worden gebruikt om schemaontwikkeling mogelijk te maken. Al met al is het mogelijk dat de instrumentele benadering krachtiger is als het gaat om breed toepasbaar, didactiekvrij ICT-gereedschap dan wanneer het specifieke didactische tools betreft, die slechts op incidentele basis worden gebruikt. Nader onderzoek zal hierover meer duidelijkheid moeten brengen.

Samengevat lijkt de instrumentele benadering een krachtig kader om interacties tussen leerling en machine en met name het samenspel tussen technische vaardigheden en wiskundig inzicht, in kaart te brengen en te bestuderen. Wel is het van belang dat de relatie met andere theoretische perspectieven aan nader onderzoek wordt onderworpen, evenals de reikwijdte ten aanzien van de verschillende typen ICT-gereedschap van dit theoretisch kader.

## Noten

- 1 Gesubsidieerd door NWO onder projectnummer 575-36-003E.
- 2 KLOO projectnummer 04.1.3.II.
- 3 Gesubsidieerd door de Social Sciences and Humanities Research Council van Canada – INE Grant # 501-2002-0132.
- 4 Gesubsidieerd door NWO onder projectnummer 411-04-123.

## Literatuur

- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245-274.
- Boon, P., & Drijvers, P. (2005). *Algebra en applets, leren en onderwijzen*. Utrecht: Freudenthal Institute / ISOR.
- Boon, P., & Drijvers, P. (2006). Chaining operations to get insight in expressions and functions. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 969-978). Barcelona: Universitat Ramon Llull.
- Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs. (2007). *Rijk aan betekenis, visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Utrecht: Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 221-266.
- Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *Journal of the Learning Sciences*, 10, 113-163.
- Drijvers, P. (2003a). Algebraïsche vaardigheden, symbol sense en ICT. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 23 (1), 38-42.
- Drijvers, P. (2003b). *Learning algebra in a computer algebra environment, design research on the understanding of the concept of parameter*. Dissertatie. Utrecht: CD-β Press. Ook beschikbaar via [www.fi.uu.nl/~pauld/dissertation](http://www.fi.uu.nl/~pauld/dissertation).
- Drijvers, P., & Doorman, M. (1996). The graphics calculator in mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 425-440.
- Drijvers, P., & Gravemeijer, K. P. E. (2004a). Artefact en instrument: Computeralgebra en algebraïsche schema's. *Tijdschrift voor didactiek der bètawetenschappen*, 21 (1), 47-68.
- Drijvers, P., & Gravemeijer, K. P. E. (2004b). Instrumentation of computer algebra: examples of algebraic schemes. In D. Guin, K. Ruthven,

- & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 171-206). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Drijvers, P., & Trouche, L. (in druk). From artifacts to instruments, a theoretical framework behind the orchestra metaphor. In M. K. Heid, & G. W. Blume (Eds.), *Research on technology in the learning and teaching of mathematics: Syntheses and perspectives*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Drijvers, P., & Van Herwaarden, O. (2000). Instrumentatie van ICT-gereedschap: algebra met computeralgebra. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 20(1), 38-43.
- Engeström, Y., Miettinen, R., & Raija-Leena, P. (1999). *Perspectives on activity theory*. New York: Cambridge University Press.
- Goldenberg, E. P. (1988). Mathematics, metaphors, and human factors: mathematical, technical, and pedagogical challenges in the educational use of graphical representation of functions. *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 135-173.
- Gravemeijer, K. P. E., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J. (2000). Symbolising, modeling, and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolising and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225-273). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Guin, D., Ruthven, K., & Trouche, L. (Eds.) (2004). *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Haspékian, M. (2005). An "instrumental approach" to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10, 109-141.
- Hoek, D. J., & Seegers, G. (2004). Het gebruik van de grafische rekenmachine tijdens samenwerkend leren in het middelbaar beroeps- onderwijs. *Tijdschrift voor didactiek der bèta-wetenschappen*, 21 (2), 93-106.
- Hoyles, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (Vol 1, pp. 323-349). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Kieran, C., & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11, 205-263.
- Laborde, C. (2003). *The design of curriculum with technology: Lessons from projects based on dynamic geometry environments*. Paper presented at the CAME 2003 conference, Reims, France. Retrieved on 4 February 2004 from <http://ltsn.mathstore.ac.uk/came/events/reims/>.
- Lagrange, J. B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics*, 43, 1-30.
- Lagrange, J. B. (2005). Curriculum, classroom practices, and tool design in the learning of functions through technology-aided experimental approaches. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10, 143-189.
- Mariotti, M. A. (2002). The influence of technological advances on students' mathematics learning. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 695-723). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Monaghan, J. (2005). Computer algebra, instrumentation and the anthropological approach. Paper presented at the CAME5 conference, Roanoke, 19-20 oktober 2005. Retrieved January 5, 2007, from [www.lonklab.ac.uk/came/events/CAME4/](http://www.lonklab.ac.uk/came/events/CAME4/).
- Rabardel, P. (2002). *People and technology – a cognitive approach to contemporary instruments*. Retrieved January 5, 2007, from <http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr>.
- Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur: étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 239-264.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Compu-*

- ters for *Mathematical Learning*, 9, 281-307.
- Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation. In R. Noirfalise & M. J. Perrin (Eds.), *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 174-185). Clermont-Ferrand, France: Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Université de Clermont-Ferrand II.
- Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and Artefacts: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10, 77-103.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Vygotsky, L. S. (1997). The instrumental method in psychology. In R. W. Rieber & J. Wollock (Eds.), *Problems of the theory and history of psychology, Vol. 3, Collected works of L.S. Vygotsky* (pp. 85-89). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Wenger, E. (1998) *Communities of practice*. New York: Cambridge University Press.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.
- Zorn, P. (2002). *Algebra, computer algebra and mathematical thinking*. Contribution to the 2nd international conference on the teaching of mathematics, 2002, Hersonissos, Crete. Retrieved June 5, 2007, from [www.stolaf.edu/people/zorn/](http://www.stolaf.edu/people/zorn/).

Manuscript aanvaard: 20 juli 2007.

## Auteur

**Paul Drijvers** is senioronderzoeker aan het Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen van de Universiteit Utrecht.

*Correspondentieadres:* P. Drijvers, Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht, Postbus 9432, 3506 GK Utrecht. E-mail: [p.drijvers@fi.uu.nl](mailto:p.drijvers@fi.uu.nl)

## Abstract

### **Instrument, orchestra and conductor: a theoretical framework for IT use in mathematics education**

In the research study *Learning algebra in a computer algebra environment*, part of the project *Mathematics and ICT*, the theoretical framework of the instrumental approach to tool use turned out to be fruitful. Therefore, this approach is applied and elaborated in follow-up studies. In this paper we investigate the way in which this framework is used in these studies. The question at stake is what contribution the framework provides to research into the role of technology in mathematics education. The first part of the paper describes the instrumental approach. In the second part, the way in which this framework is used in the PROO-study and two follow-up studies is discussed. The conclusion is that the instrumental approach provides a widely applicable framework for investigation of the use of ICT-tools in mathematics education, and that it offers specific contributions which other theoretical perspectives do not seem to offer. The scope of the theory and its relation to other theoretical frameworks need further investigations.