

Diagrammatisch redeneren als basis voor begripsontwikkeling in het statistiekonderwijs¹

A. Bakker

Samenvatting

Het theoretisch uitgangspunt van dit onderzoek over statistiekonderwijs is dat diagrammatisch redeneren een basis vormt voor begripsontwikkeling. Diagrammatisch redeneren wordt gedefinieerd als het maken van een diagram, ermee experimenteren en het reflecteren op de opgedane ervaringen. Twee belangrijke processen bij het reflecteren zijn predikatie en abstractie. Het specifieke vermoeden dat getest werd in het hier beschreven onderwijsexperiment, is dat leerlingen een begrip van statistische verdeling kunnen ontwikkelen door diagrammatisch redeneren over groeiende steekproeven. De onderzoeksvraag die in dit artikel centraal staat, is hoe een serie onderwijsactiviteiten met minitools (Java-applets) het diagrammatisch redeneren van leerlingen in een tweede klas havo-vwo ondersteunde en hoe dit leidde tot een begrip van verdeling in relatie tot andere statistische begrippen en diagrammen. Het genoemde vermoeden over groeiende steekproeven werd bevestigd en daarmee is empirische ondersteuning gevonden voor genoemd theoretisch uitgangspunt over diagrammatisch redeneren.

1 Inleiding

De ontwikkeling en het gebruik van ICT hebben ertoe geleid dat burgers en werknemers andere vaardigheden nodig hebben dan vroeger. Een van de vakgebieden die steeds meer in het bedrijfsleven en de overheid toegepast worden, is statistiek (Does, Van den Heuvel, & De Mast, 2001; Hoyles, Bakker, Kent, & Noss, in druk; Pyzdek, 1991). Om kennis te vergaren uit een overvloed van informatie of om gegevens te verzamelen die nodig zijn om bepaalde vragen te beantwoorden, is statistiek een essentieel hulpmiddel en statistieksoftware is daarbij niet meer weg te denken. Er is dus behoefte aan statistische geletterd-

heid: het vermogen om statistische informatie te interpreteren, kritisch te evalueren en erover te communiceren (Gal, 2002). Onderzoek naar statistiekonderwijs laat echter zien dat leerlingen over het algemeen onvoldoende inzicht ontwikkelen om statistisch geletterd genoemd te kunnen worden (Zawojewski & Shaughnessy, 1999). Statistiekonderwijs richt zich vaak op *number crunching* en het vak wordt veelal aangeboden als een serie statistische begrippen en grafieken (gemiddelde, modus, mediaan, staafgrafiek, histogram, boxplot etc.) met weinig aandacht voor hun onderlinge relaties.

Mijn promotieonderzoek (Bakker, 2004), waarvan dit artikel een deel bespreekt, is een bijdrage aan de ontwikkeling van een onderwijstheorie op het gebied van statistiekonderwijs aan 12-14-jarigen. Hierbij werden eenvoudige computerprogramma's ingezet, zogenaamde minitools. Dit zijn computerprogramma's in de vorm van Java-applets die via internet gebruikt kunnen worden. Zie voor voorbeelden de Figuren 1 t/m 4 en www.wisweb.nl. Het onderzoek is een vervolg op ontwikkelingsonderzoek dat Cobb, McClain en Gravemeijer (2003) hebben uitgevoerd in Nashville (Verenigde Staten) met oudere versies van die minitools (Cobb, Gravemeijer, Bowers, & Doorman, 1997). Dat onderzoek was vooral op het begrip verdeling gericht, maar omdat voor het oplossen van de meeste statistische problemen ook inzicht in steekproeven nodig is, heb ik behalve het redeneren over verdeling ook redeneren over steekproeven centraal gesteld.

Hiertoe zijn bij de minitools behorende onderwijsactiviteiten ontworpen die leerlingen moesten ondersteunen bij het redeneren met steeds complexere begrippen en grafische representaties. Het centrale begrip dat ik in de analyse heb gebruikt, is *diagrammatisch redeneren* (Peirce, 1976), dat bestaat uit drie handelingen: een diagram maken, ermee experimenteren en reflecteren op de observaties. Het theoretisch uitgangspunt dat

in dit artikel centraal staat, is dat diagrammatisch redeneren een basis vormt voor begripsontwikkeling. Aanwijzingen hiervoor zijn gevonden in het tweede brugklasexperiment uit mijn promotieonderzoek (Bakker & Hoffmann, 2005). Dit uitgangspunt wordt hier onder de loep genomen aan de hand van een onderwijsleerproces in een tweede klas havo-vwo waarin het doel was dat leerlingen leerden redeneren over verdeling in relatie tot andere statistische begrippen zoals centrummaten, spreiding en steekproeven. De centrale tweeledige vraag in dit artikel is: *hoe ondersteunde de serie onderwijsactiviteiten met de minitools het diagrammatisch redeneren van leerlingen in een tweede klas havo-vwo en hoe leidde dit tot een begrip van verdeling in relatie tot andere statistische begrippen en diagrammen?*

De beschrijving van de ontwikkeling van een serie onderwijsactiviteiten en van het verloop van de micro- en macrocycli in ontwikkelingsonderzoek (Gravemeijer & Cobb, dit nummer) leidt over het algemeen tot *thick descriptions* (het artikel van Cobb et al., 2003, over één macrocyclus is maar liefst 78 pagina's lang). In dit artikel heb ik daarom gekozen voor slechts één aspect van mijn onderzoek, namelijk het diagrammatisch redeneren van leerlingen in enkele lessen van de laatste cyclus van het onderzoek. Na een schets van het gebruikte theoretische kader en de analysemethode volgt een analyse van het diagrammatisch redeneren en de begripsontwikkeling van leerlingen in de eerste vier lessen van een serie van tien en in de slot-interviews. Tot slot bespreek ik de rol van de minitools bij het diagrammatisch redeneren.

2 Theoretisch kader

Bij onderzoek waarin het ontwerpen van onderwijsactiviteiten en -middelen een belangrijke rol speelt, zijn vaak verschillende theorieën vereist, van algemene leertheorieën tot specifieke theorieën over het leren van bepaalde onderwerpen. Het algemene kader dat ik hier gebruik, is de semiotiek van Peirce (1976). Zijn begrip *diagrammatisch redeneren* is een geschikt middel gebleken om de ontwikkeling van statistische begrippen in

relatie tot opeenvolgende statistische (externe) representaties te analyseren (Bakker & Hoffmann, 2005). Behalve dit algemene kader (2.1), heb ik bij het ontwerpen van het lesmateriaal gebruikgemaakt van domeinspecifieke theorieën op het gebied van het wiskunde- en statistiekonderwijs (2.2). Nog specifiek is het zogenaamde hypothetisch leertraject (2.3). Een hypothetisch leertraject bestaat uit de verwachte voorkennis van leerlingen, de te verwachten mentale activiteiten van de leerlingen wanneer ze participeren in de opeenvolgende onderwijsactiviteiten en de einddoelen van een lessenserie (Simon, 1995).

2.1 Diagrammatisch redeneren

Peirce (1976) definieert een *diagram* als een representatie die als belangrijkste functie heeft om relaties te representeren. Diagrammen zijn uiterst belangrijk in wetenschappen zoals wiskunde en statistiek waarin structuren, patronen en relaties tussen objecten een cruciale rol spelen. Voorbeelden van diagrammen zijn: grafieken, modellen, meetkundige figuren en algebraïsche vergelijkingen. (Peirce gebruikt het begrip diagram dus in een ruimere betekenis dan gebruikelijk is in alledaags Nederlands.)

Diagrammatisch redeneren bestaat uit drie handelingen die niet noodzakelijkerwijs apart of in een bepaalde volgorde hoeven op te treden: een diagram maken, ermee experimenteren en reflecteren op de observaties.

1. Een diagram maken. We hebben een representatie nodig om de beschikbare gegevens en onze gedachten erover te ordenen. De functie van een diagram is om iets zichtbaar te maken wat eerst onzichtbaar was, bijvoorbeeld bepaalde relaties tussen elementen in een verzameling of een patroon in statistische gegevens. Een diagram kan uiteraard behalve met pen en papier ook met een computerprogramma gemaakt worden.
2. Met een diagram experimenteren. Bij het experimenteren met een diagram of diagrammen stuiten we mogelijk op relaties die we nog niet eerder hadden opgemerkt. Overigens hoeft dit experimenteren niet per se op papier of op een computerscherm te gebeuren: we kunnen

ook mentaal experimenteren.

3. Reflecteren. Tijdens de eerste twee handelingen doen we observaties waarop we kunnen reflecteren. Reflectie is cruciaal voor begripsontwikkeling omdat hier eigenschappen (predikaten) van wiskundige objecten worden geformuleerd en mogelijk zelfs nieuwe objecten (begrippen) worden gevormd.

Het toekennen van een predikaat aan een object heet *predikatie*. Nu kan een predikaat zo interessant en belangrijk zijn dat we het nader willen onderzoeken. Een van de belangrijkste handelingen in de wiskunde om tot nieuwe objecten (begrippen) te komen is het verzelfstandigen van een interessante eigenschap (Peirce, 1976, Vol. IV, p. 160). Het predikaat 'verspreid' bijvoorbeeld wordt verzelfstandigd tot een object dat zelf weer eigenschappen kan hebben: de spreiding is groot. Spreiding is een begrip geworden dat beschreven en zelfs gemeten kan worden. De beschreven handeling is volgens Peirce een belangrijke vorm van *abstractie*.² In het spreidingvoorbeeld is spreiding het object waarvan gezegd kan worden dat het groot is. Ook verzamelingen, getallen en meetkundige figuren zijn voorbeelden van het resultaat van genoemde vorm van abstractie. Het gaat dus niet alleen om de overgang van een bijvoeglijk naar een zelfstandig naamwoord.

Het is de lezer misschien opgevallen dat diagrammatisch redeneren gelijkenissen vertoont met modelleren. Modelleren impliceert immers dat een model gemaakt wordt (een diagram in Peirces definitie).

2.2 Domeinspecifieke theorieën over statistiekonderwijs

Diagrammatisch redeneren wordt hier onderzocht binnen het statistiekonderwijs, vandaar de noodzaak om enkele deelvragen over begripsontwikkeling binnen het onderzoek naar statistiekonderwijs te formuleren. Statistiek houdt zich bezig met patronen in variatie en relaties tussen data, en daarom zijn diagrammen zo belangrijk in de statistiek. Leerlingen met weinig statistische voorkennis zijn echter geneigd om een dataverzameling als een collectie losse waarden te zien in plaats van als een geheel dat weer eigenschappen kan hebben (Hancock, Kaput, & Goldsmith,

1992; Konold & Higgins, 2003). Ze dienen dus een verzameling meetwaarden als een geheel met een patroon te leren zien, bijvoorbeeld als een verdeling. Verdeling is namelijk een begrip waarmee een dataverzameling als een geheel gezien kan worden in plaats van als een verzameling losse elementen (Cobb, 1999; Gravemeijer, 1999; Petrosino, Lehrer, & Schauble, 2003). De vraag is dus hoe verdeling voor leerlingen een object (begrip) zou kunnen worden dat weer bepaalde eigenschappen heeft en waarmee geredeneerd en gemanipuleerd kan worden. Dit was de eerste deelvraag van de centrale vraag.

Begripsvorming is een belangrijk onderwerp in de wiskundendidactiek. Eén observatie waar onderzoekers het over eens lijken te zijn, is dat leerlingen vaak eerder de proceskant van een wiskundig begrip begrijpen dan de objectkant (Dubinsky, 1991; Sfard, 1991; Tall, Thomas, Davis, Gray, & Simpson, 2000). Zo is een functie $f(x)$ voor leerlingen vaak eerst alleen een rekenproces dat een getal x in een getal y transformeert. Pas later, en dan nog niet altijd, zien leerlingen een functie als een object met eigenschappen en als een object dat gemanipuleerd kan worden (zie ook Drijvers, 2003). De tweede deelvraag was wat de proceskant van het begrip verdeling zou kunnen en zijn en hoe die door leerlingen ontwikkeld zou kunnen worden.

Een derde deelvraag was de vraag naar een didactische oplossing voor het probleem dat begrippen als centrum en spreiding informele begrippen zijn die met formele maten worden gemeten. In de onderwijspraktijk worden spreidingsmaten meestal ingevoerd voordat leerlingen een informeel begrip van spreiding hebben ontwikkeld. Dat geldt ook voor centrummaten: het gemiddelde wordt als rekenprocedure geleerd, maar dat wil niet zeggen dat leerlingen begrijpen dat een gemiddelde als een maat van het centrum van een dataverzameling of verdeling gebruikt wordt om bijvoorbeeld twee verdelingen met elkaar te kunnen vergelijken (Konold & Higgins, 2003). Een van de doelen in het hypothetisch leertraject in mijn onderzoek was dat leerlingen zouden inzien dat centrum- en spreidingsmaten formele maten zijn van informele noties die ze al hebben van gemiddelde en spreiding. Verder moesten re-

laties tussen centrum en spreiding duidelijk worden met betrekking tot de hele verdeling om meer begripsmatige samenhang te creëren, ook met betrekking tot steekproeven.

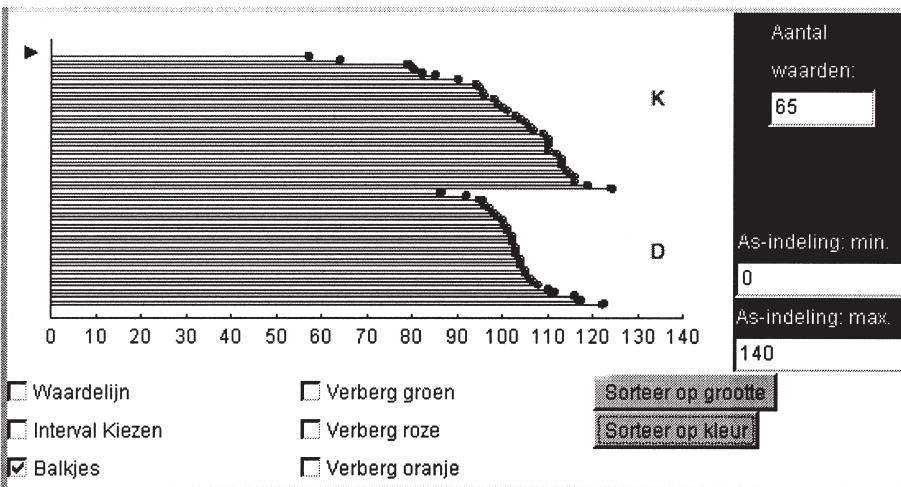
Het is verder belangrijk om grafiektypen te kiezen waarin de verschillende verdelingsaspecten voor leerlingen aan de vorm te zien zijn. Met conventionele grafieken als histogram en boxplot blijken leerlingen vaak moeite te hebben (Friel, Curcio, & Bright, 2001). Grafieken die leerlingen makkelijk interpreteren zijn staafigrafieken (Figuur 1) en *dot plots* (Cobb et al., 2003). In een dot plot wordt iedere meetwaarde gerepresenteerd door een bolletje op de juiste plaats op de horizontale as (Figuur 2). Leerlingen spreken van ‘bolletjesgrafieken’ of ‘stippendiagrammen’. De hoogte van zo’n bolletje heeft geen andere betekenis dan dat het bolletje niet lager kan zakken door de aanwezigheid van een ander bolletje met ongeveer dezelfde waarde. Er is dus geen verticale as. De hoogte van de grafiek is slechts een informele maat voor frequentie of dichtheid, tenzij de bolletjes door afronding van de meetwaarden netjes opstapelen. Een normaal verdeelde dataverzameling heeft in een dot plot dus ongeveer de bekende klokvorm.

2.3 Hypothetisch leertraject

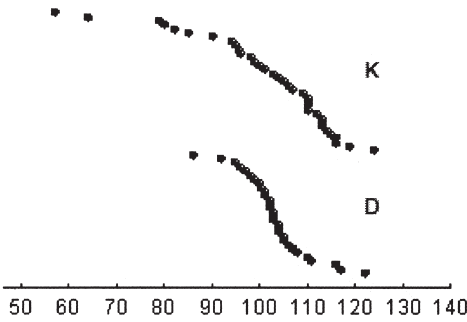
Gravemeijer (1999) en collega’s (Cobb et al., 2003) hebben een hypothetisch leertraject

ontwikkeld waarlangs leerlingen van 12-14 jaar een begrip van verdeling kunnen ontwikkelen. Figuren 1 tot en met 3 geven een overzicht van de minitoolrepresentaties die de ruggengraat van hun hypothetisch leertraject vormen.

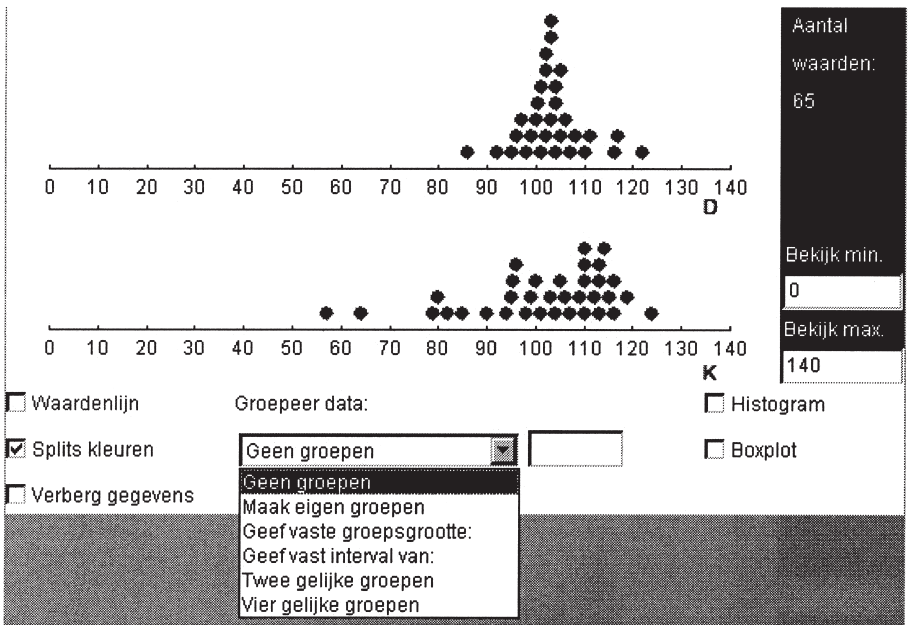
1. Elke waarde wordt weergegeven met een staaf waarvan de relatieve lengte correspondeert met de waarde. Dit levert de staafigrafiek op van minitool 1 (Figuur 1a). Horizontale staven representeren op een natuurlijke manier variabelen als remafstand, levensduur van batterijen en spanwijdte van vogels.
2. In minitool 1 kunnen leerlingen de staven verbergen zodat alleen de eindpunten overblijven (Figuur 1b).
3. Als de eindpunten denkbeeldig op de as vallen (puur verticaal) dan ontstaat een dot plot (Figuur 2). De mogelijkheid van deze overgang van horizontale staven via de eindpunten naar dot plots is ook de reden dat er in minitool 1 alleen horizontale en geen verticale staven mogelijk zijn.
4. In minitool 2 kunnen leerlingen de datapunten organiseren in verschillende groepen. Met vaste intervallen hebben we een voorloper van het histogram te pakken. De optie van twee even grote groepen laat zien waar de mediaan zit. Met vier even grote groepen zien we een voorloper van



Figuur 1a. Minitool 1. Een grafiek uit minitool 1, waarin iedere waarde door een staaf gerepresenteerd wordt waarvan de lengte evenredig is met de waarde (levensduur in uren).



Figuur 1b. Met de optie 'verberg staven' blijven alleen de eindpunten van de staven over, wat de relatie met minitool 2 kan vergemakkelijken. De eindpunten hoeven dan alleen nog naar beneden te vallen zoals in Figuur 2.



Figuur 2. Minitool 2. Een dot plot uit minitool 2 van dezelfde dataverzameling als in Figuur 1 (levensduur in uren van batterijenmerken D en K).

het boxplot. Binnen mijn promotieonderzoek zijn de minitools vertaald en uitgebreid met histogram- en boxplotopties (Figuur 3).

Omdat leerlingen in de onderbouw van het voortgezet onderwijs er nog niet aan toe zijn om over kansdichtheidsverdelingen (zoals de normale verdeling) te spreken, is ervoor gekozen om de aandacht eerst op frequentie-

verdelingen te richten en later op de vorm van verdelingen en de dichtheid van data, bijvoorbeeld in boxplots (Figuur 3).

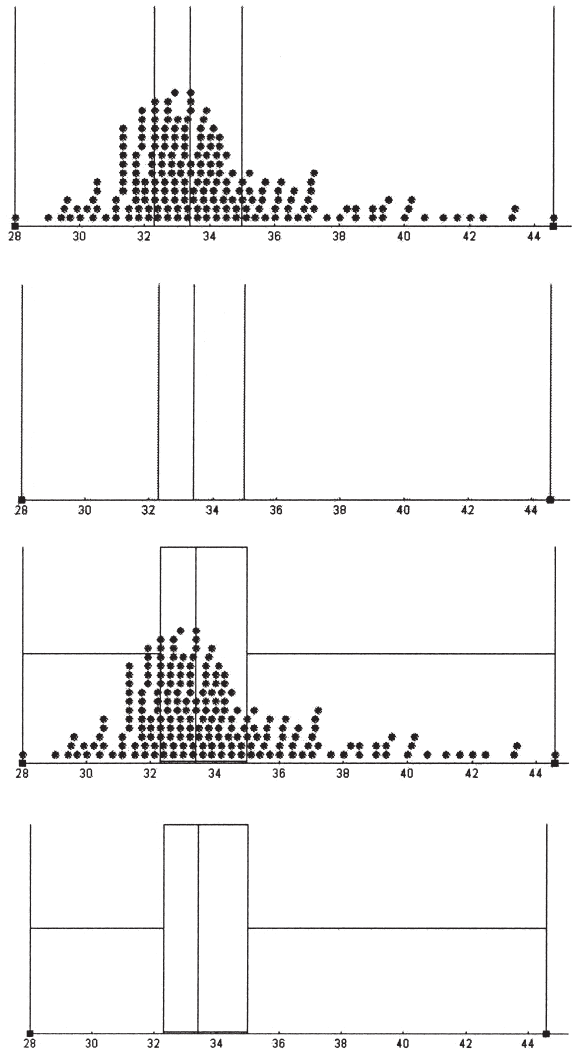
Het startpunt van mijn hypothetisch leertraject is de voorkennis van Nederlandse tweedeklassers (havo-vwo) en het eindpunt is een begrip van verdeling. Leerlingen zouden over verdelingen als objecten moeten gaan spreken in relatie tot steekproeven, en cen-

trum- en spreidingsmaten als kenmerken van een verdeling gaan zien. Op basis van de vier onderwijsexperimenten in brugklassen was een goed beeld ontstaan van de statistische voorkennis die ik kon verwachten in een tweede klas havo-vwo. De leerlingen hadden weinig moeite om de representaties van de minitools te lezen en konden hun gemiddelde cijfer voor een schoolvak uitrekenen, maar hadden verder nauwelijks enige statistische voorkennis. Bij wiskunde waren lijngrafieken behandeld.

De belangrijkste verwachting van het hypothetisch leertraject was dat leerlingen een begrip van verdeling konden ontwikkelen door diagrammatisch redeneren over groeiende steekproeven. In een voorafgaand onderwijs-experiment in een havo-brugklas had ik namelijk gemerkt dat het redeneren over steeds grotere dataverzamelingen leerlingen uitnodigde om relevante statistische eigenschappen van verdelingen te formuleren en erop te reflecteren in relatie tot steekproeven. Bij de meeste onderwijsactiviteiten in het hypothetisch leertraject werd daarom gevraagd naar eigenschappen van grotere steekproeven die met verdelingen te maken hadden.

3. Datacollectie en analysemethode

De gehanteerde methode was ontwikkelingsonderzoek (Gravemeijer & Cobb, dit nummer). Dit artikel gaat alleen over het laatste onderwijsexperiment (met 30 leerlingen, tien lessen van 50 minuten) en de analyse hiervan. Een belangrijk deel van de analyse bestond in het toetsen van de verwachtingen die in het hypothetisch leertraject waren geformuleerd. Daarnaast gebruikte ik een methode die lijkt op de constant comparatieve methode (Strauss & Corbin, 1998). Ik las de uitgewerkte protocollen, bekeek de videobanden en formuleerde vermoedens³ over begrip-ontwikkeling in de verschillende episodes. Deze vermoedens werden getoetst aan andere episodes van de protocollen en de videobanden, maar ook aan de rest van het data-materiaal (triangulatie met observaties, leerlingmateriaal en toetsen). Deze werkwijze werd herhaald op hetzelfde materiaal om te kijken of er tegenvoorbeelden van ver-



Figuur 3. Minitool 2. In deze dataverzameling van spijkerbroekmaten (in inches) van 100 mannen is gekozen voor vier even grote groepen (bovenste twee), verberg data (tweede en vierde grafiek) en boxplot (onderste twee).

moedens waren te vinden. De bevestigde vermoedens zijn in de appendix als conclusies C1 – C10 samengevat.

Deze analyses hebben onder andere inzicht verschaft in de intuïties die leerlingen hebben van statistische begrippen. Ze blijken bijvoorbeeld veel dataverzamelingen (vooral hypothetische en unimodale) onder te verdelen in lage, “gemiddelde” en hoge waarden (C1). Een ander voorbeeld van een vermoeden was dat leerlingen in de eerste les allemaal dachten dat een steekproef van een of

twee batterijen voldoende was om te bepalen welke van twee batterijenmerken een langere levensduur had. Dit vermoeden werd bevestigd door de analyse van het leerlingmateriaal, audio- en videomateriaal, wat leidde tot de conclusie (C3) dat leerlingen geneigd zijn kleine steekproeven te kiezen als ze iets moeten onderzoeken, met name in industriële contexten waarin ze weinig variatie verwachten. Alle interessante protocolfragmenten, waaronder die in dit artikel, zijn besproken met collega's (*peer examination*) om mijn interpretaties te staven.

Verder heb ik bij de analyse van de hier beschreven cyclus in klas 2 alle protocollen van de tien lessen en de interviews gecodeerd met codes C1 tot en met C10. Ongeveer een kwart daarvan is met drie assistenten (docenten in opleiding) besproken. Er was een hoge mate van consensus want van de 35 besproken episodes met codes werden slechts twee niet unaniem beoordeeld. Alleen als alle vier het over de codering eens waren, bleef die overeind. Ter illustratie volgen twee episodes, een waarover we het eens waren en een die werd afgekeurd.

In de zevende les gebruikten twee leerlingen de optie in minitool 2 om vier even grote groepen te maken (Figuur 3). De opdracht was om advies aan de fabrikant te geven over de percentages van te produceren spijkerbroekmaten.

Interviewer: Waarom koos je voor vier even grote groepen, Sofie?

Sofie: Omdat je dan het beste de spreiding ziet, hoe het is verdeeld.

Interviewer: Hoe het is verdeeld. En hoe zie je dat hier dan [in de grafiek]? Waar kijk je dan naar?

Sofie: Nou, je kan zien dat, bijvoorbeeld als je hier een lijn zet, hier een lijn en hier een lijn. Dan zie je hier [twee lijnen rechts, van 34-44 inch] dat er een erg grote spreiding in dat deel is bij wijze van spreken.

Deze episode had twee codes gekregen waarover de vier beoordelaars het eens waren:

C2: leerlingen karakteriseren spreiding als spreidingsbreedte of heel lokaal ("erg grote spreiding in dat deel").

C7: leerlingen maken geen duidelijk onderscheid tussen de begrippen spreiding,

verdeling en dichtheid. Als ze uitleggen hoe data verspreid zijn, beschrijven ze vaak de verdeling of de dichtheid, of andersom.

De code C1 (over het onderverdelen in drie groepen) voor het volgende voorbeeld met betrekking tot dezelfde figuur werd echter afgekeurd:

Interviewer: Wat zegt dit je? Die vier even grote groepen?

Melle: Nou, ik denk dat de meeste spijkerbroekmaten tussen 32 en 34 [inch] zijn.

Ik meende aanvankelijk dat aan deze observatie het idee ten grondslag lag dat er kleine, gemiddelde en grote maten zijn. Kleiner is onder de 32 inch, gemiddeld tussen 32 en 34, en groot boven de 34. Maar zoals een andere beoordelaar opmerkte, valt uit de episode rond het citaat niet af te leiden dat Melle inderdaad zo dacht. Daarom is C1 uiteindelijk niet toegekend aan deze episode.

4. Analyse

In deze paragraaf omschrijf ik steeds kort de onderwijsactiviteit met de verwachtingen volgens het hypothetisch leertraject, en vervolgens hoe het opgeroepen diagrammatisch redeneren tot begrip van verdeling heeft geleid in relatie tot andere statistische begrippen en diagrammen. Ik beperk me tot de eerste vier lessen en de eindinterviews, omdat die voldoende materiaal bieden om het theoretisch uitgangspunt te ondersteunen.

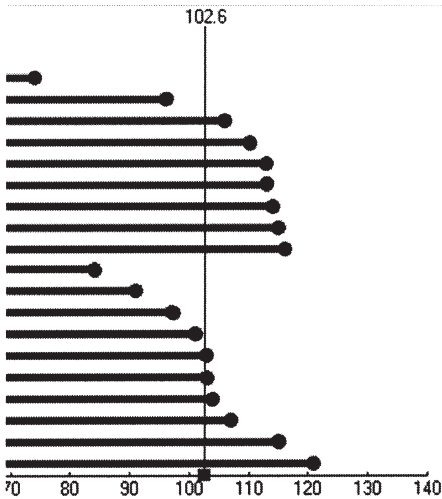
4.1 Eerste drie lessen: kleine steekproeven van batterijen

Onderwijsactiviteiten en verwachtingen

In alle voorgaande cycli is een onderwijsactiviteit over twee batterijenmerken gebruikt, zij het in steeds iets andere bewoordingen. De vraag luidde: "De Consumentenbond test twee merken batterijen. Van ieder merk meten ze van tien batterijen de levensduur in uren. Er is steeds hetzelfde apparaat gebruikt om de batterijen te testen. De batterijen zijn even duur en je hoeft alleen op de levensduur te letten. Gebruik ook een geschikte grafiek om de argumenten toe te lichten. Het belangrijkste is de kwaliteit van je argumenten. Schrijf namens de Consumentenbond een

verslag waarin je uitlegt welk merk beter is en waarom.”

De vraag werd steeds eerst mondeling geïntroduceerd om de context tot leven te wekken en zo oppervlakkige antwoorden te voorkomen. In het onderwijsexperiment dat hier beschreven wordt, wilden we verder weten welke steekproefomvang leerlingen acceptabel vonden voordat ze een dataverzameling in een minitool openden (Figuur 4).



Figuur 4. Schatten van gemiddelde met de verticale waardelijijn (merk K boven, merk D beneden).

Het didactische idee achter deze batterijen-opgave is dat leerlingen leren redeneren over groeiseigenschappen van de dataverzamelingen. De data zijn zo gekozen dat ze conflicterende reacties kunnen oproepen: merk K is scheef verdeeld, heeft meer hoge waarden, maar het gemiddelde is iets lager dan van merk D. In de vorige cycli deden leerlingen inderdaad observaties als: D heeft de hoogste waarde; het gemiddelde van D is hoger dan van K; D is betrouwbaarder; K heeft uitschieters; spreiding van K is groter. Behalve de eerste observatie (D heeft de hoogste waarde) zijn het groeiseigenschappen die we inderdaad onder de aandacht wilden brengen.

Een andere ontdekking van eerdere experimenten was dat het nuttig bleek om leerlingen niet steeds een bestaande dataverzameling te geven, maar om ze ook dataverzamelingen te laten verzinnen bij bepaal-

de groeiseigenschappen. Zo vroegen we leerlingen om data te verzinnen van batterijmerken die een lange levensduur hebben, maar niet zo betrouwbaar of consistent zijn. Op deze manier verwachtten we namelijk een hechtere band te creëren tussen statistische begrippen en eigenschappen van diagrammen. Om dezelfde reden, stelden we veel ‘wat-als-vragen’ zoals: “Stel je eerste twee metingen zijn 85 en 105 uur. Bij wat voor soort vervolgmetingen zou je zeggen ‘dit merk is goed’ en wanneer zou je zeggen ‘dit merk is onbetrouwbaar’?”

Resultaten

Tot mijn verrassing vonden alle leerlingen het voldoende om één of twee batterijen per merk te testen. Die tweede batterij was dan nuttig ‘als reserve’ of als het apparaat er meer dan één nodig had. Dit illustreert conclusie C3 dat de leerlingen kleine steekproeven noemen. Waarschijnlijk had dit hier te maken met het feit dat ze geen of minieme variatie verwachtten in zulke industriële contexten (C4).

De observaties die de tweedeklassers deden over de batterijensteekproeven, waren vergelijkbaar met die we verwacht hadden op grond van de vorige experimenten (zie boven). Het was dus gelukt om de aandacht te vestigen op allerlei groeiseigenschappen zoals het gemiddelde en de spreiding, of het hebben van meer hoge waarden (merk K). Dit zou in les 6 tot een gesprek over scheefheid van verdelingen leiden.

Leerlingen waren succesvol bij het verzinnen van diagrammen bij conceptuele eigenschappen: de ‘wat-als-vragen’ leidden er inderdaad toe dat ze groepskenmerken representeerden (C5). Bij het mentaal voortzetten van de groeiende steekproef die met 85 en 105 uur begon (dus $N = 2$), gaven leerlingen twee typen antwoorden. Het ene type refereerde alleen aan spreiding en het andere type had betrekking op concrete waarden of proporties van waarden boven of onder een bepaalde waarde. Twee voorbeelden van elk type:

1. “Het merk is goed als alle batterijen lang leven, als je 10 batterijen neemt. Het merk is slecht als er erg veel verschil zit tussen de batterijen, ook bij 10 batterijen.”

2. “Goed: als je 10 batterijen test, moeten er minstens 7 langer dan 100 uur meegaan en dezelfde levensduur hebben. Dan mogen er een paar slechte tussen zitten.

Slecht: als je 10 batterijen test, en er zijn vier slecht, dan is het niet een goed merk.”

Het diagrammatisch redeneren over de batterijenmerken heeft allerlei predikaten tot onderwerp van gesprek gemaakt die statistisch relevant zijn, zoals 'gemiddeld', meer of minder 'verspreid' en 'betrouwbaar'. Steekproefgrootte werd gaandeweg een onderwerp van aandacht, al moesten we hier nog vele malen op terugkomen. Ook hadden verschillende leerlingen door dat ze met de verticale waardelijntje het gemiddelde van bijvoorbeeld merk D konden schatten, ondersteund door de waardelijnoptie in minitool 1 (Figuur 4). Wat er aan de ene kant 'te veel' was, konden ze mentaal aan de andere kant 'plakken'. Verder gebruikten leerlingen het gemiddelde om twee groepen te vergelijken, iets wat volgens de onderzoeksliteratuur (zie 2.2) lastig te bereiken is, maar hier wel gelukt is. Waarschijnlijk hebben de onderwijsactiviteiten en minitoolopties hieraan bijgedragen.

4.2 Les 4: steeds grotere steekproeven over gewicht

Onderwijsactiviteit en verwachtingen

De docente en ik wilden leerlingen laten zien dat steekproeven van een tot tien waarden wel erg klein zijn om een goed beeld te krijgen van een fenomeen. We kozen daarom een onderwijsactiviteit die in het laatste brugklasexperiment de gewenste effecten had: door het redeneren over steeds grotere steekproeven, toonden leerlingen een intuïtief begrip van verdeling in een bekende context (gewicht) en leerden ze te spreken over gemiddelde en spreiding als eigenschappen van dataverzamelingen en verdelingen. Omdat we wisten dat leerlingen in eerste instantie tevreden zouden zijn met kleine steekproeven, vroegen we ze om te voorspellen hoe een kleine dataverzameling van het gewicht van tien tweedeklassers eruit zou kunnen zien en deze te vergelijken met echte data. Dit werd herhaald met steeds grotere verzamelingen en tot slot voorspelden leerlingen de vorm van de grafiek van de hele populatie van het gewicht van leerlingen.

Door deze onderwijsactiviteit weer te gebruiken in deze tweede klas verwachtten we ook dat de vorm van de gewichtsverdeling van tweedeklassers een onderwerp van gesprek zou worden (deze verdeling is bijvoorbeeld niet symmetrisch).

Om reflectie te stimuleren, iedereen in het predikatieproces te betrekken en de klassendiscussies niet te lang te maken, lieten we de leerlingen steeds individueel hun observaties opschrijven. Tijdens een korte klassendiscussie probeerden we predikatie en daarmee abstractie van essentiële eigenschappen uit te lokken met vragen als: “Je zegt dat de stipjes hier meer als een kluitje bij elkaar staan, zijn er nog andere verschillen? Wie is het met Rik eens? Wat bedoel je met ...?”

Resultaten

De leerlingen maakten allemaal een diagram dat ze vervolgens vergeleken met drie echte verzamelingen van tien gegevens (Figuren 5 en 6). Dit leidde tot drie staafgrafieken als in minitool 1 en acht grafieken met alleen de eindpunten zoals in minitool 1 met 'verberg staven' (Figuur 1b); de overige grafieken waren dot plots als in minitool 2.

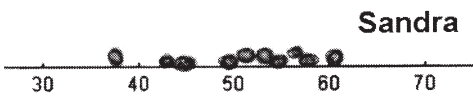
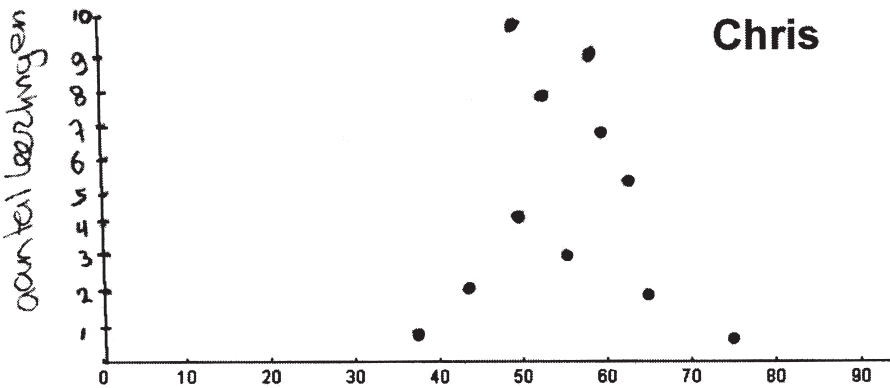
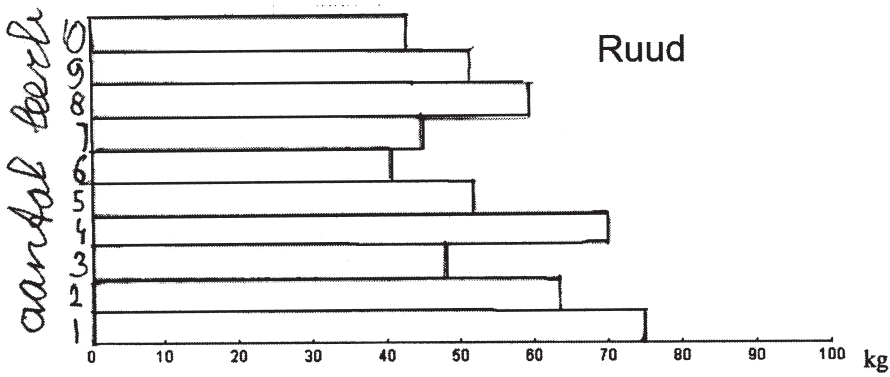
Hier zijn twee voorbeelden van wat leerlingen over hun grafieken opschreven (Sandra haalde goede cijfers voor alle vakken, Ruud behoorde tot de zwakste 30%):

Ruud: Mijn grafiek ziet eruit zoals die op het bord.

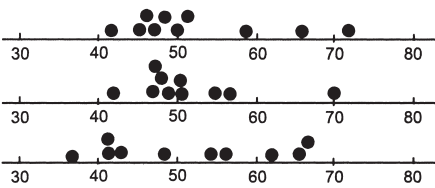
Sandra: De andere [echte data] zijn meer gewichten bij elkaar en mijne zijn verder uit elkaar.

Wat opvalt aan de beschrijvingen van leerlingen bij deze eerste deelopdracht in les 4 is dat ze nogal vaag zijn, maar Sandra gebruikt predikaten die statistisch relevant zijn: bij elkaar en uit elkaar. Die bereiden namelijk voor op een begrip van spreiding.

De variatie tussen de drie verschillende kleine steekproeven (Figuur 6) is voor een expert een teken dat de steekproeven te klein zijn: belangrijke eigenschappen als gemiddelde en spreiding variëren te veel om een betrouwbaar beeld te geven van de populatie, maar voor de leerlingen was deze reden nog te abstract. Wel dachten ze een betrouwbaarder beeld te krijgen als ze meer dan tien leerlingen wogen. We vroegen ze daarom een



Figuur 5. Ruud's grafiek lijkt op minitool 1, Chris' op minitool 1 met 'verberg staven' en Sandra's grafiek op minitool 2.



Figuur 6. Drie kleine steekproeven ($n = 10$) van echte dataverzamelingen als feedback.

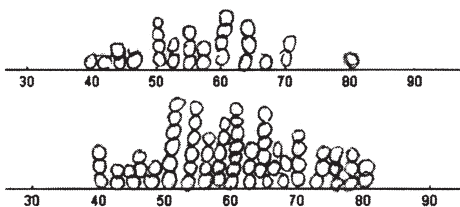
schets te maken van een dataverzameling met gegevens van één klas en van drie klassen (zie Figuur 7) en dit vervolgens te vergelijken met grafieken van echte data (Figuur 8). Bij deze grotere dataverzamelingen gingen alle leerlingen over op dot plots, vermoedelijk omdat dit veel minder werk is en omdat de

docente als feedback op de eerste grafieken dot plots op het bord had laten zien (Figuur 6). Hoewel de leerlingen tot nu toe alleen woorden als 'bij elkaar' en 'verspreid' hadden gebruikt, beschreven ze hun nieuwe grafieken in termen van onder andere spreiding. Bijvoorbeeld (we volgen nog even dezelfde twee leerlingen):

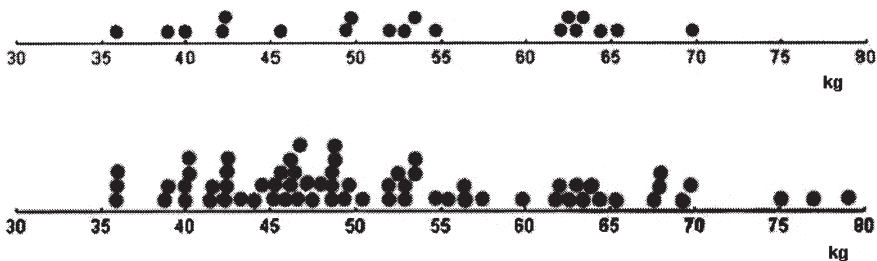
Ruud: Mijn spreiding is anders.

Sandra: Met de 27 [leerlingen, één klas] zijn er uitschieters en er is spreiding. Met de 67 [drie klassen] zijn ze dichter bij elkaar en meer rond het gemiddelde.

Wat hier relevant is voor de begripontwikkeling van de leerlingen, is dat ze voor het eerst het woord spreiding gebruikten om verschillen tussen hun eigen diagrammen en de echte data te beschrijven. Ook uitschieters



Figuur 7. Voorspelling van een en drie klassen (vrijwel alle leerlingen hadden iets wat hierop leek).



Figuur 8. Echte data in minitool 2 van een en drie klassen (merk op dat de schaal hier meer uitgerekt is waardoor de bolletjes minder hoog opstapelen dan in de leerlingvoorspellingen).

en gemiddelde worden hier als niet-formeel geformuleerde eigenschappen van de data-verzamelingen genoemd. Het verzoek om steeds een voorspelling te doen was bedoeld om mentaal experimenteren uit te lokken. Uitgaande van wat leerlingen weten over gewicht in termen van gemiddelde, spreiding of verdeling, stimuleerden we ze erover na te denken hoe dergelijke eigenschappen er in een diagram uit kunnen zien. Door predikatie op te roepen werd ook abstractie gestimuleerd. In plaats van te zeggen dat de stipjes 'verspreid' waren, deden leerlingen uitspraken als 'de spreiding is anders' (zoals Ruud hierboven). Dit is een voorbeeld van abstractie: een predikaat (verspreid) wordt verzelfstandigd zodat het weer eigenschappen kan hebben (spreiding). Dat wil natuurlijk niet zeggen dat alle leerlingen nu hetzelfde, correcte begrip spreiding hadden ontwikkeld. Er was alleen een aanzet gemaakt, en in het redeneren met het begrip konden leerlingen hun begrip nu gaan verfijnen en zonedig (laten) corrigeren.

Vervolgens maakten we de stap naar nog een grotere steekproef: de hele populatie van tweedeklassers in Utrecht. De bedoeling hiervan was dat leerlingen zouden nadenken

over de vorm van de gewichtsverdeling. Figuur 9 laat enkele voorbeelden zien. In hun uitleg schreven leerlingen bijvoorbeeld:

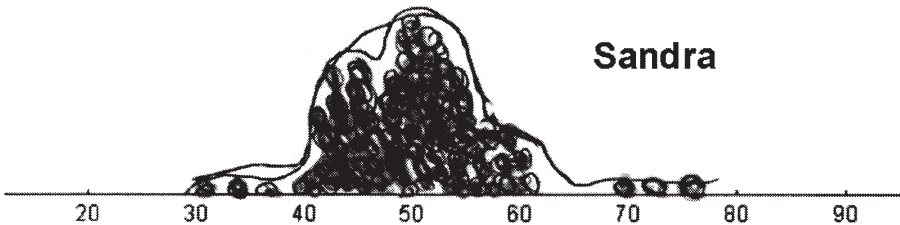
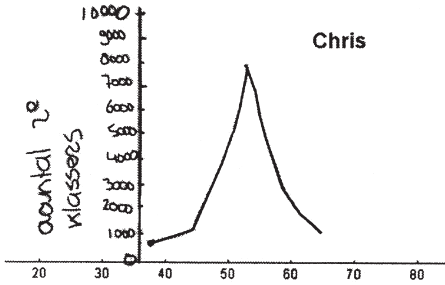
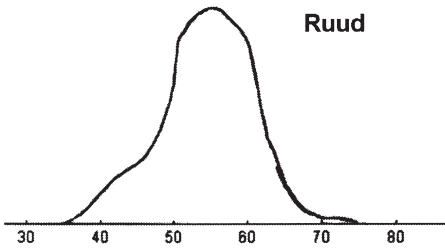
Ruud: Omdat het gemiddelde ongeveer tussen 50 en 60 kg zit.

Chris: Ik denk dat het een piramide is. Ik heb mijn grafiek zo getekend omdat ik dat makkelijk te maken vond en makkelijk te lezen.

Sandra: Omdat de meeste rond het gemiddelde zitten en er uitschieters zijn van 30 en 80.

De vormen die expliciet genoemd werden, waren: piramide (3 leerlingen), halve cirkel (1) en klokvorm (4). Maar liefst 23 van de 28 aanwezige leerlingen tekenden een klokvorm, hoewel die in het onderwijs nog niet aan bod was geweest (de normale verdeling wordt meestal twee jaar later behandeld). De normale verdeling was hiermee nog niet geleerd maar leerlingen waren wel op weg: de meesten hadden door dat veel data rond het gemiddelde lagen en er maar weinig heel lage of hoge waarden voorkomen (C1). Ook begrepen ze hoe deze eigenschappen in de vorm van de grafiek gerepresenteerd werden.

Wat zou de klokvorm betekend hebben voor deze leerlingen als ze niet deelgenomen



Figuur 9. Ruuds klokvorm, Chris' piramide en Sandra's combinatie van stippen en een continue schets.

hadden in onderwijsactiviteiten zoals die in deze paragraaf beschreven zijn? Op basis van de brugklasexperimenten is aannemelijk te maken dat de vorm vooral een iconische representatie van een heuvel of klok was geweest – een afbeelding in plaats van een diagram (Bakker & Hoffmann, 2005). De exploratieve interviews laten zien dat veel leerlingen zouden begrijpen dat de hoogte iets met frequentie te maken heeft, maar ze hadden waarschijnlijk nog geen taal gehad om de statistische eigenschappen van deze verdeling te beschrijven (Bakker, 2004).

4.3 Eindinterviews

Na de tien lessen van het onderwijsexperiment, interviewde ik tien leerlingen in tweetallen gedurende tien minuten per paar over onder andere de volgende vragen:

Wat is een verdeling?

Kun je in deze verdeling (Figuur 10) aan-

geven waar het gemiddelde, de modus en de mediaan ongeveer zitten?

De bedoeling van deze vragen was om te kijken in hoeverre leerlingen een taal ontwikkeld hadden om over verdelingen als objecten te spreken en of ze centrummaten als kenmerken van een verdeling zagen. Dat waren namelijk einddoelen van het hypothetisch leertraject (2.3).

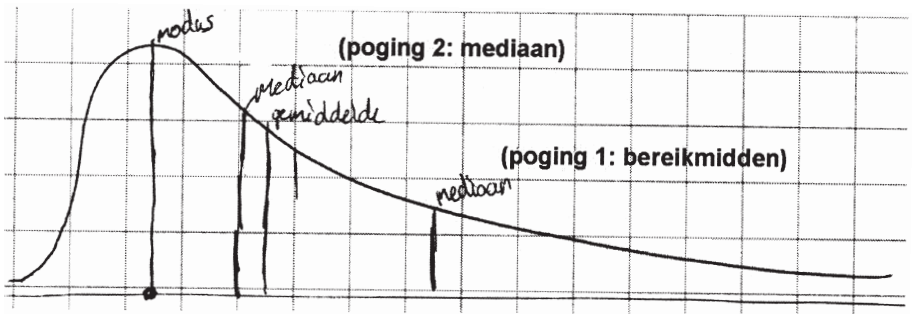
Wat is een verdeling?

Bij de analyse van de lessen bleek dat veel leerlingen – begrijpelijkerwijs – geen duidelijk onderscheid maakten tussen spreiding en verdeling (C7), maar bij de eindinterviews leken enkelen zich er wel bewust van te zijn:

Natalie: Hoe zeg maar alles, niet de spreiding, maar hoe de balletjes zitten in de grafiek.

En:

Sanne: Als je bijvoorbeeld een grafiek



Figuur 10. Schatten van centrummaten in een scheve verdeling.

hebt met allemaal bolletjes, dan kunnen ze allemaal op één stapeltje liggen, zal ik maar zeggen. Dan is het een hele kleine verdeling, omdat ze allemaal dicht bij elkaar liggen, maar als ze aan het eind liggen en aan het begin, dan is het een hele grote verdeling omdat ze heel verspreid liggen over die lijn.

Fleur: Is dit niet de spreiding? Of is dat hetzelfde?

Interviewer: Nee, dat is niet helemaal hetzelfde. Waarom dacht jij spreiding, Fleur?

Fleur: Ligt eraan hoe het verspreid is, of het op een kluitje zit of verspreid. Ik denk de verdeling is bijvoorbeeld hoe je, hoe je bijvoorbeeld een eh, op zo'n lijntje, hoe je het verdeeld hebt, met 5 en dan krijg je 10, 15, en dan 20. Hoe je het verdeeld hebt.

Ook andere leerlingen uitten vaak een visie op verdelingen die ik als procesmatig interpreteer:

Sandra: Ik denk dan aan de verdeling van de data over de grafiek.

Sander: Hoe je het dan in een grafiek zet, de verdeling van de eh, de balletjes dan in de grafiek... waar ze staan.

Interessant met betrekking tot de kwestie over de proces- en objectkant van wiskundige begrippen (2.2) is ook de opmerking van John:

John: Je hebt een grafiek, met gevallen bolletjes. En dan heb je onder zo [wijst as aan] getallen, en dan de verdeling is, hoe het over eh, hoe zeg je dat? (...) Hoe het erop is gelegd, bijvoorbeeld 20, 30, 40, 50, 60 en dan liggen bolletjes bij eh, dan heb je bijvoorbeeld 40 bolletjes en dan zijn er bijvoorbeeld vijftien 20 en eh, vijftien 60 enzo. Maar dan verdeel je het daarover. Dat is de verdeling.

Voor aanvang van het onderzoek was het niet duidelijk wat de proceskant van het begrip verdeling kon zijn, maar door de onderwijsactiviteiten rond groeiende steekproeven en de citaten van leerlingen in de eindinterviews, is die procesaspect geïdentificeerd als het toevoegen van data aan een grafiek. Zo ontstaat in minitool 2 een verdeling als een vorm, een object met eigenschappen (scheef, normaal et cetera).

Leerlingen hadden geleerd om vormen van verdelingen te omschrijven als scheef, normaal of uniform. Hoewel ze nog steeds op zoek waren naar een taal om dit soort eigenschappen te beschrijven, was er een duidelijke vooruitgang waar te nemen ten opzichte van het begin van de lessenserie en de resultaten in de brugklas. Bovenstaande antwoorden (vooral van John) vormen ook een aanwijzing dat de overgang van minitool 1 naar minitool 2 via de optie 'verberg staven' een vrij natuurlijke is die ook past in het beeld dat een verdeling ontstaat als je data als bolletjes op een as laat vallen (2.3).

Aangeven van centrummaten in een verdelingschets

De schatting van de modus in de schets van Figuur 10 vonden leerlingen makkelijk: de modus is de waarde waar de top van de grafiek zit. Het gemiddelde schatten ze ook redelijk nauwkeurig. Hun strategie leek te zijn om in het midden van het bereik te beginnen en dan te kijken of veel hoge of lage waarden het gemiddelde omhoog of omlaag trokken. Het is aannemelijk dat de ervaringen met de beweegbare verticale waardelijnen in de minitools hiertoe hebben bijgedragen. De

mediaan was problematischer. Negen van de tien leerlingen wezen eerst het bereikmidden aan in plaats van de mediaan (dit is een algemene observatie, ook in de brugklasexperimenten: C8). In deze klas is dat niet verrassend omdat de mediaan alleen kort en schriftelijk aan bod was geweest in de negende les. Wel lijkt de ervaring met minitool 2 het redeneren van leerlingen te ondersteunen. Ik vroeg namelijk of leerlingen nog wisten hoe ze de mediaan in minitool 2 kregen. De meesten begrepen toen waar de mediaan dan wel moest liggen (Figuur 10, poging 2). Fleur redeneerde als volgt, en verbond dus haar ervaring met discrete waarden (de bolletjes) met de continue vorm van de geschetste verdeling (zie ook Figuur 3):

Fleur: Dus stel dat je hier in totaal 100 bolletjes hebt, dan moeten er daar [links] 50 zitten en dan doe je ongeveer daar een streep zetten en dan zitten er daar [rechts] ook 50.

Haar schatting was behoorlijk accuraat. Mentaal zag ze 100 bolletjes die de oppervlakte onder de grafiek overdekten, zodat ze die in twee gelijke delen kon verdelen. Dit mentaal experimenteren moet haast wel geworteld zijn in haar ervaring met minitool 2.

Zoals beschreven is in 2.2, worden centrummaten in het onderwijs vooral aangeleerd als rekenprocedures, en niet als kenmerken van verdelingen. De antwoorden op de laatste interviewvraag laten zien dat er wel degelijk aanzetten in die richting gemaakt kunnen worden. In dit kader is het ook verheugend dat leerlingen statistiek niet als *number crunching* leken op te vatten. Na de lessenserie karakteriseerde een leerling statistiek als volgt: “Statistiek is een klein beetje rekenen en heel veel nadenken.”

5 Discussie

5.1 Hoofd- en deelvragen

De centrale vraag van dit artikel was: hoe ondersteunde de serie onderwijsactiviteiten met de minitools het diagrammatisch redeneren van leerlingen in een tweede klas havo-vwo en hoe leidde dit tot een begrip van verdeling in relatie tot andere statistische begrippen en diagrammen? De onderwijsactiviteiten met de minitools leidden ertoe dat statistische be-

grippen als spreiding en de vorm van verdeling objecten werden die weer eigenschappen toegedicht werden.

In de batterijenactiviteiten richtten leerlingen hun aandacht op gemiddelde, spreiding en uitschieters in relatie tot staafdiagrammen en dot plots. In les 4 is te zien hoe aanvankelijk vooral informele termen als ‘bij elkaar’ en ‘verspreid’ gebruikt werden, maar gaandeweg spreiding gekarakteriseerd werd. Dit is een voorbeeld van abstractie: een eigenschap wordt tot object gemaakt dat weer eigenschappen kan hebben. Ook de vorm van verdelingen werd een object met eigenschappen. Uiteraard wil dit nog niet zeggen dat leerlingen dit allemaal correct deden, maar ze raakten wel betrokken in een redeneerproces over allerlei echte en hypothetische situaties.

De antwoorden op de deelvragen uit 2.2 kunnen als volgt worden samengevat. Ten eerste blijkt dat het redeneren over de vorm van steeds grotere steekproeven een veelbelovende onderwijsactiviteit is om de ontwikkeling van het verdelingsbegrip te ondersteunen. Ten tweede helpt het dynamische perspectief dat ontstaat door waarden op een as te laten vallen bij een groeiende dataverzameling leerlingen kennelijk bij het ontwikkelen van een proceskant van het begrip verdeling. Ten derde heeft de serie onderwijsactiviteiten ertoe geleid dat leerlingen over het algemeen centrummaten als kenmerken van verdelingen zijn gaan zien, conform een van de einddoelen van het hypothetisch leertraject. Met het begrip spreiding hebben we minder succes behaald: leerlingen karakteriseerden spreiding als spreidingsbreedte of ze keken heel lokaal. Er zijn geen voorbeelden van leerlingen die spreiding zagen als afwijking van een centrummaat (C2), maar in contexten waarin een duidelijke werkelijke waarde aanwezig is zoals bij metingen, zou dit anders kunnen zijn (Petrosino et al., 2003).

In het vervolg van de discussie volgen enkele opmerkingen over de rol van de minitools bij het diagrammatisch redeneren.

5.2 Diagrammen maken

Zoals de voorbeelden uit les 4 illustreren, zijn de diagrammen die leerlingen maken beïnvloedbaar door hun voorgeschiedenis. In dit

geval maakten alle leerlingen diagrammen die sterk leken op de minitools waar ze twee lessen mee gewerkt hadden. Zelfs de volgorde van representaties van de oorspronkelijke leerlijn (Figuren 1-3) is te herkennen in de diagrammen die leerlingen maakten. Met kleine steekproeven waren er nog leerlingen die staafgrafieken tekenden, met grotere steekproeven tekenden alle leerlingen dot plots en bij de populatiegrafieken tekenden vrijwel alle leerlingen continue grafieken (sommigen zoals Sandra tekenden er bolletjes onder).

Het feit dat leerlingen bij de kleine steekproeven nog staafgrafieken (drie leerlingen) of alleen de eindpunten van de staven (acht) gebruikten en daarna alleen nog dot plots, kan op minstens twee manieren geïnterpreteerd worden. Eén interpretatie is dat het werken met de minitools hun eigen creaties wel erg sterk gestuurd heeft. Een andere interpretatie is dat de grafieken zoals die in de minitools verwerkt zijn, kennelijk zo betekenisvol en overtuigend zijn voor leerlingen dat ze die gemakkelijk overnemen. Dit zou juist pleiten voor het oorspronkelijke ontwerp van de minitools en de daarbij horende onderwijsactiviteiten. Ervaringen met flexibeler software met meer mogelijkheden zoals TinkerPlots (Konold & Miller, 2005) zal uit moeten wijzen welke van de twee interpretaties aannemelijker is.

5.3 Experimenteren

Leerlingvriendelijke software is geschikt om te experimenteren met allerlei situaties en relaties, zeker in de statistiek waarin het tekenen van een grafiek met grote hoeveelheden gegevens zoveel werk vergt. Een voordeel van de minitools was dat het nauwelijks nodig was om leerlingen iets over de tools te onderwijzen. Bij het leren gebruiken van computergebrassyten is dit heel anders: daar vergt het instrumentatieproces veel aandacht (Drijvers, dit nummer). Software heeft echter ook zijn beperkingen: de mogelijke transformaties en representaties liggen te voren vast, en de valkuil bestaat om vooral naar bestaande dataverzamelingen te kijken en het mentale experimenteren te verwaarlozen.

Om het mentaal experimenteren te stimu-

leren hebben de docente en ik veel 'wat-als-vragen' gesteld: hoe zou de grafiek eruitzien als...? Leerlingen werden daardoor uitgedaagd om zich hypothetische situaties voor te stellen of die te schetsen (C5). Het voordeel daarvan is dat ze zich niet zo druk hoeven maken over waar precies die ene waarde komt, maar uitgaande van algemene conceptuele eigenschappen een globaal beeld moeten geven. Overigens moesten leerlingen wel gewend raken aan 'wat-als-vragen': een klascultuur waarbinnen dit een begrijpelijke en productieve vraag is, moest in alle betrokken klassen eerst gevormd worden (Bakker, 2004).

5.4 Reflecteren

Hoewel de docente en ik ons best hebben gedaan om in de schriftelijke vragen zo veel mogelijk reflectie op te roepen, bleken toch steeds de klassendiscussies de beste redeneringen uit te lokken. Dit geeft te denken over de tendens om leerlingen zelfstandig te laten werken. In de praktijk wordt zelfstandig leren vaak zo ingevuld dat leerlingen kleine sommetjes afwerken en niet voldoende diepgang daarin bereiken. Als er een antwoord staat, is het in de ogen van leerlingen vaak goed genoeg (Van den Boer, 2003). Tijdens groeps- of klassendiscussies kan de docente echter doorvragen en processen als predikatie en abstractie sturen. Daarmee wil ik niet zeggen dat het gemakkelijk is: het vergde in mijn onderzoek steeds enkele lessen voordat leerlingen geneigd waren serieus deel te nemen aan discussies.

Het belang van diagrammatiseren en experimenteren onderstreept het idee dat leerlingen zelf moeten modelleren (Doorman, dit nummer). Het belang van reflectie en interactie voor leren is al vele malen benadrukt (Nelissen, 1987). Het gebruikte analysekader suggereert verder dat het nuttig is om leerlingen zelf te laten beschrijven wat ze opvalt aan diagrammen en te komen tot een gezamenlijk onderwerp van gesprek: een object waaraan allerlei eigenschappen worden toegekend en die een rol speelt in een redeneerproces. Zo kunnen statistische begrippen ontwikkeld worden door predikatie en abstractie tijdens diagrammatisch redeneren.

Noten

- 1 Het promotieonderzoek waarop dit artikel is gebaseerd, is gesubsidieerd door NWO onder nummer 575-36-003B. Mijn dank gaat uit naar mijn promotoren Koeno Gravemeijer, Gellof Kanselaar en Jan de Lange, en naar mijn projectcollega's Paul Drijvers, Michiel Doorman, Dirk Hoek en Monique Pijls. Verder heb ik de samenwerking met docente en onderzoekster Corine van den Boer en haar klas zeer gewaardeerd evenals met Carolien de Zwart, Sofie Goemans en Yan-Wei Zhou, die geholpen hebben met interviews, video-opnamen en de analyse. De referenten en Bart Ormel ben ik verder dankbaar voor hun constructieve suggesties.
- 2 Een andere belangrijke vorm van abstractie is het *weglaten* van een eigenschap, bijvoorbeeld de breedte van een lijn.
- 3 Ik maak een kunstmatig onderscheid tussen *verwachtingen* die vooraf in het hypothetisch leertraject en *vermoedens* die achteraf bij de analyse geformuleerd werden.

Literatuur

- Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools*. Utrecht, the Netherlands: CD Beta Press.
- Bakker, A., & Hoffmann, M. (2005). Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: A semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 333-358.
- Boer, C. van den. (2003). *Als je begrijpt wat ik bedoel. Een zoektocht naar mogelijke verklaringen voor achterblijvende prestaties van allochtone leerlingen in het wiskundeonderwijs*. Utrecht, the Netherlands: CD Beta Press.
- Cobb, P. (1999). Individual and collective mathematical development: The case of statistical data analysis. *Mathematical Thinking and Learning*, 1, 5-43.
- Cobb, P., Gravemeijer, K. P. E., Bowers, J., & Doorman, M. (1997). *Statistical Minitools [applets and applications]*. Nashville & Utrecht: Vanderbilt University, TN & Freudenthal Institute, Utrecht University.
- Cobb, P., McClain, K., & Gravemeijer, K. P. E. (2003). Learning about statistical covariation. *Cognition and Instruction*, 21, 1-78.
- Does, R., Van den Heuvel, E., & De Mast, J. (2001). *Zes Sigma zakelijk verbeterd*. Dordrecht: Kluwer.
- Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter*. Utrecht, the Netherlands: CD Beta Press.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32, 124-158.
- Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-51.
- Gravemeijer, K. P. E. (1999). *An instructional sequence of analysing univariate data sets*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Education Research Association, Montréal, Canada. Unpublished manuscript.
- Hancock, C., Kaput, J. J., & Goldsmith, L. T. (1992). Authentic enquiry with data: Critical barriers to classroom implementation. *Educational Psychologist*, 27, 337-364.
- Hoyles, C., Bakker, A., Kent, P., & Noss, R. (in druk). Attributing meanings to representations of data: The case of statistical process control. *Mathematical Thinking and Learning*.
- Konold, C., & Higgins, T. (2003). Reasoning about data. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 193-215). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Konold, C., & Miller, C. (2005). *TinkerPlots. Dynamic data exploration. Statistics software for middle school curricula*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.
- Nelissen, J. M. C. (1987). *Kinderen leren wiskunde. Een studie over constructie en reflectie in het basisonderwijs*. Gorinchem, the Netherlands: De Ruiter.
- Peirce, C. S. (1976). *The new elements of mathe-*

- matics (Eisele, C., Ed.) (Vol. I-IV). The Hague-Paris/Atlantic Highlands, N.J.: Mouton/Humanities Press.*
- Petrosino, A. J., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Structuring error and experimental variation as distribution in the fourth grade. *Mathematical Thinking and Learning, 5*, 131-156.
- Pyzdek, T. (1991). *What every manager should know about quality*. New York: Marcel Dekker, Inc.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 114-145.
- Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research. Techniques and procedures for developing grounded theory*. Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.
- Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., & Simpson, A. (2000). What is the object of the encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behavior, 18*, 223-241.
- Zawojewski, J. S., & Shaughnessy, J. M. (1999). Data and chance. In E. A. Silver, & P. A. Kenney (Eds.), *Results from the seventh mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress* (pp. 235-268). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Manuscript aanvaard: 20 juli 2007.

Auteur

Arthur Bakker is postdoctoraal onderzoeker aan het Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen van de Universiteit Utrecht en Research officer aan het London Knowledge Lab, Institute of Education, University of London.

Correspondentieadres: A. Bakker, Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht, Postbus 9432, 3506 GK Utrecht. E-mail: a.bakker@fi.uu.nl

Abstract

Diagrammatic reasoning as a basis for conceptual development in statistics education

The theoretical position explored in this research in statistics education is that diagrammatic reasoning is a basis for conceptual development. Diagrammatic reasoning is defined as making a diagram, experimenting with it and reflecting on the observations made. Two important processes during reflection are predication and abstraction. The conjecture tested in the design experiment described in this paper is that students can develop a concept of distribution by diagrammatic reasoning about growing samples. The central question in this paper is how the series of instructional activities with two minitools (Java applets) supported students' diagrammatic reasoning and how this led to a concept of distribution in relation to other statistical concepts and diagrams. The conjecture was confirmed, which provides empirical evidence for the theoretical position.

Appendix

Conclusies van de analyse

- C1. Leerlingen verdelen data vaak onder in drie groepen van lage, "gemiddelde" en hoge waarden.
- C2. Leerlingen karakteriseren spreiding als spreidingsbreedte of ze kijken heel lokaal naar een interval van het domein. Er zijn in het datamateriaal geen voorbeelden van spreiding als afwijking van een centrummaat.
- C3. Leerlingen zijn geneigd om een kleine steekproefomvang te kiezen als ze voor het eerst iets moeten testen (levensduur batterijen, gewicht).
- C4. Leerlingen verwachten geen of minieme variatie in industriële contexten zoals de levensduur van batterijen.
- C5. 'Wat-als-vragen' stimuleren leerlingen om te denken over groepeigenschappen van data-verzamelingen in bepaalde contextsituaties.
- C6. Als leerlingen hun eigen grafieken tekenen, gebruiken ze vaak verticale staafgrafieken ondanks hun ervaring met minitool 1 (die alleen horizontale staven biedt).
- C7. Leerlingen maken geen duidelijk onderscheid tussen de begrippen spreiding, verdeling en dichtheid. Als ze uitleggen hoe data verspreid zijn, beschrijven ze vaak de verdeling of dichtheid van een bepaald deel van een dataverzameling.
- C8. Bijna alle leerlingen verwarren mediaan en bereikmidden.
- C9. Zelfs als leerlingen een grote steekproef van een bepaalde verdeling zien, herkennen ze vaak niet de vorm die experts erin zien.
- C10. Leerlingen hebben geen duidelijke voorkeur voor minitool 1 of 2 bij het oplossen van statistische problemen.