

## Samenvatting

Deze discussiebijdrage is een kritische bespreking van zes artikelen die voortgekomen zijn uit het NWO-aandachtsgebied *ICT als hulpmiddel bij het zelfstandig leren van wiskunde*. In het eerste artikel werd de gemeenschappelijke basis van ontwikkelingsonderzoek besproken, vervolgens kwamen er drie artikelen waarin de computer gebruikt wordt bij het leren van wiskundige begrippen en in de laatste twee werd samenwerkend leren met de computer en de rol van de docent daarbij besproken. Het onderzoek getuigt van een nauwgezette beschrijving van ontwikkelingsonderzoek dat op een uitstekende wijze ontworpen is door de onderzoekers. In de discussie wordt gereflecteerd op de mogelijkheden en grenzen van ontwikkelingsonderzoek, de wijze waarop de computer ingezet wordt en de centrale rol van de docent. Mogelijkheden van de computer om feedback te geven in plaats van de docent worden niet gebruikt, terwijl de docent nauwelijks getraind wordt in de didactiek voor het te geven onderwijs. De bereikte leerresultaten demonstren inzicht in de onderwezen begrippen.

## 1 Inleiding

In dit themanummer worden de studies besproken die zijn voortgekomen uit een NWO-aandachtsgebied dat in 1998 is begonnen. Dit aandachtsgebied, onder de titel *ICT als hulpmiddel bij het zelfstandig leren van wiskunde*, is bij het verschijnen van dit themanummer succesvol afgesloten met vier proefschriften en publicaties van de postdoc op het aandachtsgebied. In de bijdragen in dit themanummer worden niet de proefschriften samengevat, maar wordt telkens een bepaald onderdeel uit het materiaal van het proefschrift gekozen en gedeeltelijk opnieuw doordacht en beschreven. Deze discussiebijdrage is bedoeld als een kritische reflectie op de bijdragen in dit themanummer en niet

als een bespreking van de overigens uitstekende proefschriften.

## 2 Design research of ontwikkelingsonderzoek

Het themanummer begint met een inleiding op *design research* of ontwikkelingsonderzoek. Deze onderzoeksbenadering vormt dan ook een belangrijk gemeenschappelijk uitgangspunt van de studies die in dit themanummer zijn gepresenteerd. Zij heeft verschillende historische wortels.

Een van die wortels is terug te vinden in het wiskundig-didactische principe dat werd aangehangen door Freudenthal (1983, 1991), namelijk *guided reinvention*. Freudenthal vatte wiskunde leren op als een begeleide ontdekkingsstocht, startend vanuit alledaagse problemen, of wat we nu authentieke contexten noemen. Het leren van wiskunde zag hij dan als het gaandeweg leren verwoorden van alledaagse problemen in mathematische termen (mathematiseren). Het begeleiden had bij Freudenthal vaak de vorm van gesprekken die gevoerd werden tussen de docent en het lerende kind. Op die manier werd duidelijk dat het bestuderen en het beschrijven van wiskunde leren – of in Freudenthals woorden: didactische fenomenologie – eigenlijk niet zonder interventie kan gebeuren: slechts door een interessante leersituatie te creëren en daarin actief in te grijpen wordt het mogelijk om leerprocessen te bestuderen en beter te begrijpen.

Deze aandacht voor ontwikkelingsgericht onderwijs en het benadrukken van de procesmatige aspecten van het leren en onderwijzen deelde Freudenthal in de zeventiger jaren met zijn collega-hoogleraar leerpsychologie in Utrecht, Carel van Parreren, die de term *onderwijsproceskunde* invoerde. Vanaf het midden van de jaren tachtig heeft Koeno Grave-meijer op het Freudenthal Instituut zich ingespannen om de wetenschappelijke onderzoeksbenadering van het reken-wiskun-

de onderwijs, die ontwikkelingsonderzoek genoemd werd, verder te ontwikkelen en te verdedigen (Gravemeijer, 1994). In de competitie om onderzoeksgelden had ontwikkelingsonderzoek het tot het begin van de jaren negentig erg moeilijk. Het ontwikkelingswerk mocht dan uitstekend gevonden worden, over de wetenschappelijke onderzoekskwaliteit waren veel collega's vanuit de sociale wetenschappen in die tijd minder positief. Inmiddels is er een aantal zaken veranderd. Het besef is gegroeid dat er – door het centraal stellen van de leeractiviteit van de lerende in het (socio-)constructivisme – grenzen zijn aan het expliciet en welomlijnd kunnen plannen van onderwijs vanuit een *instructional design*-perspectief (bijvoorbeeld Van Merriënboer & Kanselaar, 2006; Wilson, 1997). Verder is de waardering voor kwalitatief onderzoek naast kwantitatief onderzoek sterk toegenomen. Ook internationaal zien we een veel bredere waaier van methodologische uitgangspunten in het onderwijsonderzoek. Ook de goede prestaties op reken-wiskundegebied van Nederland in internationaal vergelijkend onderzoek hebben een positieve uitstraling op het beeld van het Freudenthal Instituut en het (wiskunde)onderwijs en onderzoek dat het voorstaat. De wetenschappelijke verdediging van ontwikkelingsonderzoek is onder andere door Gravemeijer (1994) in zijn proefschrift gedaan, maar ook op bijeenkomsten van NWO, het hart van de harde wetenschap in Nederland. En tot slot is er ook de onmiskenbare rol die enkele recente proefschriften, zoals die van Drijvers (2003), Bakker (2004) en Doorman (2005), hebben gespeeld in de wetenschappelijke erkenning van ontwikkelingsonderzoek.

Rond de methode van ontwikkelingsonderzoek is echter ook een aantal vragen te stellen. De doelen van ontwikkelingsonderzoek zijn:

1. theorievorming (het ontwikkelen van een lokale onderwijstheorie);
2. product (de ontwikkeling van een leer-gang);
3. didactiek (aanwijzingen voor het ondersteunen van het leerproces).

Deze drie doelen probeert men te bereiken door een onderzoek in drie fasen op te zetten: een voorbereidende fase, een uitvoerende

fase (onderwijsexperiment genoemd) en een retrospectieve of reflectiefase, waarna deze cyclus eventueel in gewijzigde vorm herhaald kan worden. De vraag blijft of het onderscheid tussen het ontwikkelingsonderzoek en bijvoorbeeld experimenteel onderzoek in de sociale wetenschappen wel zo groot is als sommigen menen. Immers ook daar is vaak sprake van een voorbereidende fase waarin een onderwijsleersituatie wordt ontworpen met als bedoeling om bepaalde theoretische veronderstellingen (hypothesen) te toetsen. Dit proces heeft veel overeenkomst met het formuleren van een hypothetisch leertraject in ontwikkelingsonderzoek. Ook de interpretatie en reflectie op de resultaten heeft veel overeenkomst, evenals het iteratieve karakter van de onderzoekscyclus. Er zijn echter ook enkele onmiskenbare, essentiële punten van verschil.

Het grootste verschil zit wellicht in de uitvoering van het onderzoek. Bij de experimentele methode dient bij de uitvoering zo min mogelijk afgeweken te worden van de vooraf geplande uitvoering, om de verkregen resultaten zo duidelijk mogelijk te kunnen toeschrijven aan de experimentele manipulatie. Bij ontwikkelingsonderzoek vindt er vaak bijsturing plaats tijdens de uitvoering, op grond van (be-reflecteerde) waarneming van het gedrag van leerlingen of docent, niet zelden mede op basis van overleg met deze laatste. De hoofdbedoeling van de onderwijs-experimenten is doorgaans niet om een interventie te creëren die werkt. Toch zijn dergelijke bijsturingen tijdens de uitvoering er meestal wel op gericht om de gewenste resultaten maximaal te bereiken: ontwikkelingsonderzoekers trachten het uitvoeringsproces zo nauwkeurig mogelijk vast te leggen om de resultaten daarna toch nog aan de ingrepen van de onderzoeker (of docent) te kunnen toeschrijven en vooral om te weten hoe de ingrepen precies tot de verkregen resultaten hebben geleid. Zo kan men alsnog greep (proberen te) krijgen op de procesgerichte causaliteit van de onderliggende mechanismen van de interventie. Een hieraan gerelateerde kwestie is dat in ontwikkelingsonderzoek doorgaans geen parallele vergelijking tussen onderzoekscondities (verschillende inrichtingen van de onderwijsleer-

situatie) plaatsvindt. De vergelijking gebeurt eerder in na elkaar gerealiseerde onderwijsarrangementen in een iteratieve cyclus. Het gevolg van deze twee verschillen is dat het uitsluiten van alternatieve interpretaties voor de resultaten van ontwikkelingsonderzoek vaak lastiger is dan bij een meer gecontroleerd experiment en de validiteit van uitspraken binnen de theorie minder evident is.

Een tweede aspect is dat in ontwikkelingsonderzoek vaak een beperkte selectie wordt gemaakt van de verschijnselen voor de interpretatie van het gedrag van leerlingen en/of docenten, waarbij die selectie op zich sterk afhankelijk is van de inhoudelijke deskundigheid van de onderzoeker en minder van 'geobjectiveerde' procedures (beproefde observatie-instrumenten of toetsen). Deze eigenschap vinden we ook terug in de rapportering over ontwikkelingsonderzoek, die vaak (noodzakelijkerwijze) selectief is. Vooral wanneer gerapporteerd wordt in artikelvorm is het voor onderzoekers bijzonder moeilijk om op een overtuigende wijze aan te tonen dat de beschreven casussen paradigmatisch zijn, en dat claims gebaseerd zijn op een grondige, systematische en objectieve retrospectieve analyse van alle data. Elk van de bijdragen in dit themanummer is een voorbeeld van hoe creatief met deze moeilijke balans tussen een systematische grondige analyse en een selectieve uitdieping van casussen kan worden omgegaan.

Het laatst aangehaalde punt lijkt ons minder essentieel dan het eerste punt van de adaptieve uitvoering van het onderzoek. Dit punt is voor Philips en Dolle (2006) fundamenteel: in hun bijdrage tot het festschrift voor Erik De Corte getiteld "From Plato to Brown and beyond: Theory, practice and promise of design experiments" stellen zij dat "(...) design research can produce practical innovations or artifacts (...), but to discover the reasons for the effectiveness of the resulting artifacts or programs requires work that adheres more closely to the traditional research advice to 'control the variables'" (p. 290). Dit brengt hen tot het besluit dat "(...) it is time to abandon the rhetoric of simultaneity [= dit is de gedachte dat ontwikkelingsonderzoek tegelijk een praktische en theoretische bijdrage kan leveren] and the

notion that design experiments can serve as a self-contained research program" (p. 290). Zij sluiten hun bijdrage dan ook af met een instemmende overname van de conclusie van De Corte and Verschaffel (2002, p. 529) dat design experiments "can be beneficially complemented by more analytic research, such as studies in which different versions of complex learning environments are systematically contrasted and compared with a view to the identification of those aspects which contribute especially to their high power and success". Niettemin tonen beide aangehaalde punten aan hoe cruciaal de inhoudelijke deskundigheid van de onderzoeker/onderwijsontwerper bij ontwikkelingsonderzoek is (zie ook Wittmann, 1995). Deze deskundigheid komt naar voren bij het ontwerpen en het voortdurend herontwerpen van het onderwijs, maar evenzeer bij het interpreteren, analyseren en rapporteren van de resultaten van een reeks interventiestudies. De verschillende studies in dit themanummer geven daar interessante en fraaie voorbeelden van.

### 3 Een thema, verschillende invalshoeken

Hoewel de artikelen binnen dit themanummer verwijzen naar hetzelfde aandachtsgebied, is de focus van de artikelen bepaald niet overal dezelfde: Bakker, Doorman en Drijvers onderzoeken hoe het gebruik van ICT het *leren van bepaalde wiskundige begrippen* kan ondersteunen, terwijl Pijls, Dekker, Van Hout-Wolters en Veenman, en Hoek in eerste instantie nagaan hoe het *zelfstandig en/of samenwerkend* leren aan de computer ondersteund kan worden, en waar de rol van de docent hierin ligt.

We bekijken de eerste groep van bijdragen eerst apart en we wijzen daarbij op een aantal implicaties en spanningsvelden in dit type onderzoek. Later doen we hetzelfde voor de tweede groep van bijdragen.

#### 3.1 ICT voor *guided reinvention*

De drie bijdragen die voortspruiten uit het Freudenthal Instituut (van Bakker, Doorman en Drijvers) refereren sterk aan het door

Freudenthal geïnspireerde en hierboven beschreven principe van *guided reinvention*. De leerlingen leren gaandeweg meer greep te krijgen op de probleemsituaties waarmee ze geconfronteerd worden, door deze te verwoorden in (gaandeweg meer formele, algemene, abstracte) mathematische termen. Door de leerlingen voortdurend tot reflectie aan te zetten worden ze stap voor stap begeleid naar de meest geschikte voorstellingswijzen, en leren ze om deze beredeneerd te gebruiken. ICT blijkt in elk van de gevallen een betekenisvolle rol te kunnen spelen in dit proces van begeleid heruitvinden.

Bij Bakker leren de leerlingen binnen statistiekonderwijs de begrippen verdeling, spreiding en centrummaten als gemiddelde en mediaan. In de traditie van Freudenthal heeft Bakker een interessante historische analyse gedaan van de ontwikkeling van deze begrippen (Bakker, 2004, hoofdstuk 4; Bakker & Gravemeijer, 2006). Hij stuitte onder andere op de relatie tussen de begrippen *averij* (scheepvaart) en *average* (gemiddelde), maar ook blijkt in die analyse dat het begrip (rekenkundig) gemiddelde waarschijnlijk veel eerder gebruikt werd dan het ogenschijnlijk eenvoudiger begrip van de mediaan. Centraal in het artikel van Bakker staat het diagrammatisch redeneren als basis voor de begripsontwikkeling in het statistiekonderwijs. Dit diagrammatisch redeneren ontwikkelt zich door de leerlingen met behulp van Java-applets (kleine computerprogramma's) zelf diagrammen van verschillende vormen van verdelingen te laten maken, daarmee te experimenteren en daarover te reflecteren. Daarbij wordt geprobeerd om begrippen als centrummaten en verdeling ook te koppelen aan een begrip als steekproef, waarbij de leerlingen in de loop van het leerproces over verdelingen als objecten gaan spreken.

Ook bij Doorman zien we dit leren diagrammatisch redeneren bij bijvoorbeeld afstand-tijdgrafieken. De leerling werkt eerst met een situatiespecifieke weergave (eigen constructie) van een grafiek (een model *van* een specifieke situatie) waarbij er vaak misverstanden kunnen optreden, bijvoorbeeld een hobbel in de grafiek wordt geïnterpreteerd als een heuvel in het terrein van de fiet-

ser. Door te werken met verschillende situaties, en door het onderzoeken van de relatie tussen verschillende representaties van die situaties (waarbij de computer telkens een goed hulpmiddel kan zijn) en door de cyclus van construeren, experimenteren en reflecteren enkele malen te doorlopen, kan een grafiek veranderen van een voorstelling van een specifieke situatie naar een object als dusdanig, een model *voor* een verzameling van situaties waarbij de grafiek een wiskundig object om mee te werken en over te denken wordt. Het ontwerpprincipes 'van model *van* naar model *voor*' ligt ten grondslag aan heel wat ontwikkelingsonderzoek aan het Freudenthal Instituut (Gravemeijer, 1994).

Daar waar bij Bakker en Doorman de programmatuur ondersteunend is voor de begripsontwikkeling gaat Drijvers een stap verder. Vanuit de instrumentatietheorie ziet hij de ontwikkeling van de wiskundige begripsontwikkeling en het begrijpen van de mogelijkheden van de wiskundeprogrammatuur in de rekenmachine als een geïntegreerd geheel. Het wiskundige redeneerproces en de mogelijke operaties die met de calculator uitgevoerd worden vormen één mentaal schema bij de leerling. Dit is een interessante benadering, die de stelling dat leerlingen eerst de wiskunde moeten begrijpen en daarna pas de machine mogen gebruiken als te simpel afdoet. Hij werkt dit uit in een situatie waarbij de symbolische rekenmachine de oplossing letterlijk achter het scherm uitvoert en waarbij de stappen van het oplosproces om didactische redenen niet op het scherm getoond worden. Dit roept de vraag op of, wanneer het algoritme van de machine op een andere wijze verloopt (geprogrammeerd is) dan het oplosproces in het mentale handelen van de leerling, aan dit verschil in het onderwijs aandacht moet worden besteed. Met andere woorden: moet de leerling het computerprogramma begrijpen om beide typen oplosprocessen in één mentaal schema te gebruiken? Of hoeft hij slechts de uiterlijke functionaliteit te begrijpen en slechts input en output vanuit zijn eigen mentaal schema te benaderen op dezelfde manier als je auto rijdt zonder precies te weten hoe de motor werkt? Zo komen Halasz en Moran (1983, p. 215) in een onderzoek naar gebruik van de reken-

machine tot de conclusie: "These results indicate that explicitly teaching naive users an appropriate mental model of a system can provide a psychologically effective and robust basis for operating the machine." Ook al blijven er dus nog didactische vragen, de instrumentatietheorie biedt duidelijk een origineel en nuttig beschrijvingskader voor leersituaties waarin ICT een belangrijke rol speelt.

In elk van de drie besproken onderzoeken zien we hoe leerlingen – soms langzaam – vorderingen maken en hoe van te voren opgestelde hypothetische leertrajecten worden bijgesteld op grond van het al dan niet bereiken van de gewenste stappen in de begripsontwikkeling. Telkens komt daarbij de interessante vaststelling naar voren dat de beoogde begripsontwikkeling die via het geleid heruitvinden tot stand is gekomen verstrengeld raakt in het werken met de aangeboden ICT-tools. De verworven inzichten zijn met andere woorden onlosmakelijk verbonden met de manier waarop en de context waarin ze verworven zijn.

Hoewel elk van de bijdragen zich toespitst op de mogelijkheden van de computer bij het leren van wiskunde, en hoewel de drie onderzoeken grotendeels op eenzelfde onderzoekstraditie bogen, is er toch een duidelijk verschil waarneembaar. In het onderzoek van Bakker is sprake van software die specifiek ontwikkeld werd voor de context van het beschrijven van verdelingen, steekproeven en centrummaten. De mogelijkheden van de software in het onderzoek van Doorman (om verschillende grafieken te maken voor de variabelen afstand, tijd en snelheid) komen al meer overeen met standaard softwarepakketten. Beide verschillen echter grondig van de bijdrage van Drijvers, waarin de symbolische calculator wordt gebruikt die niet is ontworpen voor didactische doeleinden. De symbolische calculator is een bestaand artefact: het goed intypen van de formules en het *solve*-commando geeft de oplossing. We zien in de volgorde van deze drie artikelen een verandering van sterk gedidactiseerde software naar algemene software. De theoretische invalshoeken die worden aangebracht lijken daarmee hand in hand te gaan: van diagrammatisch redeneren conform de semiotische theorie van Peirce, over *emergent modelling*

als onderdeel van een realistische wiskunde-didactiek, tot een sterk Vygotskiaans geïnspireerde instrumentatietheorie.

Wanneer we de verschillende bijdragen grondig bekijken, lijkt er een spanningsveld te zijn dat herhaaldelijk terugkeert. Van leerlingen wordt verwacht dat zij de verschillende grafische representaties en/of oplossingsstrategieën onderliggend aan de software zelf heruitvinden of reconstrueren, maar de onderzoekers stellen vast dat de manipulatiemogelijkheden en de representaties in de computerprogramma's soms met de leerlingen op de loop gaan, waardoor zij af en toe te snel en te oppervlakkig te werk gaan. Met andere woorden, het geleid heruitvinden balanceert tussen de soms 'onjuiste' eigen constructies van de leerlingen – of de afwezigheid van een construerende activiteit door de leerlingen *tout court* – en het uitlokken van de gewenste richting van de begripsontwikkeling door de aangeboden instrumenten (*emergent modelling*).

Deze spanning wordt uitgewerkt in de bijdrage van Doorman. Hij maakt immers een onderscheid tussen een benadering van *geleid exploreren* van software (waarbij de software als gegeven wordt beschouwd, en de leerlingen de onderliggende modellen moeten zien te achterhalen) en *geleid construeren* (waarbij de modellen idealiter worden geconstrueerd door de leerlingen zelf, al dan niet met behulp van daarvoor ontwikkelde software). Daarbij geeft Doorman aan de laatste benadering na te streven, zodat leerlingen de nieuw ontwikkelde representaties en modellen als eigen uitvindingen zouden ervaren. Echter, wanneer een leergang in hoge mate gebruikmaakt van (voorgemaakte) software, dan lijkt de spanning tussen geleid exploreren en geleid construeren niet te vermijden, omdat de software juist representaties aanbiedt die (vooraf) geconstrueerd werden door anderen. Wellicht ook daarom geeft Doorman aan dat het onderscheid tussen geleid exploreren en geleid construeren in de klassenpraktijk niet zo strikt te maken is. Ook Bakker geeft aan dat de minitools die hij gebruikte de creaties van de leerlingen mogelijk (te) sterk stuurden. En de spanning komt ten slotte ook duidelijk naar voor in de instrumentatiebenadering zoals voorgesteld door Drijvers.

Bestaande software als dusdanig wordt enkel gezien als een artefact, dat vervolgens een (denk)instrument kan worden.

### **3.2 De cruciale rol van de docent en klassikale reflectie**

Het spanningsveld van *guided exploration* en *guided reinvention* dat ontstaat door het introduceren van ICT in het wiskundeonderwijs is dus duidelijk een weerkerend thema. Dat geldt ook voor de manier waarop met dit spanningsveld wordt omgegaan in de diverse onderwijsexperimenten. In geen enkele studie werd gekozen voor het inbouwen van inhoudelijke hulp, hints, feedback et cetera in de software als dusdanig. De hulp werd eerder van buitenaf voorzien, met name via de docent. Bakker spreekt over de docent/onderzoeker die leerlingen moest aanzetten om systematisch te experimenteren via gerichte opdrachten, en over de grote rol die klassendiscussies hadden om bij de leerlingen reflectie op het leerproces uit te lokken. Drijvers heeft het over *instrumentele orkestratie* en refereert naar de sociale context waarin het leren plaatsvindt, waar de docent verantwoordelijk is voor het systematisch, harmonieus dirigeren van de diverse leeractiviteiten, de samenwerking tussen leerlingen en het werken met de software. Tekenend is de vaststelling van Doorman dat – om de computertaken ten volle tot hun recht te laten komen – leerlingen expliciet op het werk met de computer moesten worden voorbereid, dat de representaties die in de software gebruikt zouden worden vooraf in een klassikale context moesten worden opgebouwd, en dat de nodige reflectie achteraf moest worden voorzien, hetgeen hij operationaliseerde door het aanbieden van voldoende open opgaven met veel constructieruimte.

Tijdens de momenten van klassikale constructie blijken de verschillen tussen de leerlingen overigens vaak heel groot te zijn. De vraag is dan of de docent in de klassikale bespreking wel voldoende recht kan doen aan die verschillen en of hij alle leerlingen wel bereikt. De controle daarop blijkt niet uit de beschrijvingen van het onderzoek. Met andere woorden, de centrale positie van de docent en klassikale reflectie laat bij de gegeven beschrijvingen wel enig resultaat zien, maar al-

ternatieve mogelijkheden, zoals in de software ingebouwde mogelijkheden van (onmiddellijke en geïndividualiseerde) feedback, worden niet onderzocht. Dit is, zoals in paragraaf 2 uitvoerig toegelicht, kenmerkend voor veel ontwikkelingsonderzoek. Hierbij komt dat we weinig zien van doelgerichte trainingen van de docenten als onderdeel van het onderzoek. De docent, en de expliciete beïnvloeding van de manier waarop de docent de reflectie bij (groepjes van) leerlingen kan beïnvloeden komt echter wel duidelijker aan bod in de twee bijdragen die tot nu toe niet expliciet besproken werden, namelijk die van Pijls e.a. en die van Hoek.

### **3.3 ICT en zelfstandig/samenwerkend wiskunde leren**

De laatste twee artikelen gaan ook over het gebruik van de computer bij het leren van wiskunde, maar onderscheiden zich van de andere door een sterke focus op het leren samenwerken tussen leerlingen die zelfstandig de computer gebruiken in de wiskundeles. Over leren samenwerken bij computergebruik zijn de laatste jaren veel proefschriften verschenen, maar de meeste gaan over de communicatiemogelijkheden die computers bieden bij het samenwerkend leren. In de onderzoeken in dit themanummer gebruiken de samenwerkende leerlingen de computer voor het oplossen van de wiskundeopgaven, en dus niet als communicatiemiddel, al is het uitvoeren van de taak aan de computer in deze gevallen natuurlijk wel de *aanleiding* om tot communicatie tussen leerlingen te komen. In beide onderzoeken wordt zowel het samenwerkingsproces van de leerlingen gevolgd als de rol van de docent daarbij.

In het onderzoek van Pijls e.a. en Pijls (2007) worden twee leerlingen gevolgd en hun dialogen geanalyseerd, waarbij aangetoond wordt dat deze leerlingen in de loop van het proces beter zelfstandig en samen bepaalde problemen leren aanpakken en oplossen. De hoofdvraag betreft echter de rol van de docent in het geven van proceshulp (gericht op het leren samen problemen aan te pakken) en producthulp (vakinhoudelijke feedback). Hierbij zijn drie zaken opvallend: 1. Net als bij de eerder beschreven studies worden de verschillende vormen van hulp

aan de docent toevertrouwd, en op geen enkele wijze ingebouwd in de gebruikte software.

2. De docent blijkt, zeker in het begin, nauwelijks over een gedragsrepertoire te beschikken om procesfeedback of hulp te geven.
3. In het kader van het onderzoek is de docent daarin ook nauwelijks getraind. Hij kreeg drie gouden regels (laat elkaar je (denk)werk zien; leg elkaar je werk uit; geef elkaar kritiek), maar uit de protocolluitreksels bleek hij deze nauwelijks te gebruiken.

De vraag die dit oproept is of de leerlingen sneller leren in het samen wiskunde problemen aanpakken en oplossen als zij betere proceshulp hadden gekregen. Dit is een belangrijke vraag nu in de massamedia de overdracht van de vakdidactische kennis door de docent opnieuw als belangrijker wordt gezien dan zijn pedagogisch-didactische vaardigheden in het stimuleren van meer zelfstandig (met een medeleerling) leren leren (bijvoorbeeld de punten 3 en 6 van de organisatie Beter Onderwijs in Nederland in NRC, 3-6-2006, p. 16).

Veenhoven (2004, p. 147-148) onderscheidde acht begeleidingsstrategieën van de docent aan samenwerkende groepjes leerlingen. Hij gebruikte drie begeleidingsstrategieën: productgerichte hulp (inhoudelijk), procesgerichte (op samenwerken gerichte) hulp en een combinatiestrategie. Het onderwerp van zijn studie was de begeleiding door de docenten bij het leren onderzoek doen door leerlingen bij aardrijkskunde. De docenten konden de strategie kiezen die volgens hen het beste bij hen paste en kregen daarin vervolgens door de onderzoeker ook begeleiding (training). Desondanks bleken ook deze docenten in het begin problemen te hebben met de uitvoering van de begeleiding en de mate van structurering van de begeleiding van de leerlingen. Een conclusie uit zijn onderzoek is: "Een opvallend patroon in deze studie is dat de docent meer invloed op het leerproces lijkt te hebben als hij/zij zich richt op het begeleiden van de samenwerking van leerlingen in plaats van op vakinhoudelijke of procesmatige ondersteuning van leren onderzoek doen." (p. 269) en dat docenten daar veel minder in geschoold zijn.

De bijdrage van Hoek ten slotte richt zich juist op de beïnvloeding van het gedrag van de docent door de onderzoeker. De docent wordt hierbij ook op het spoor van de begeleiding van het samenwerkingsproces van de leerlingen gezet. Opvallend hierbij is dat de beïnvloeding van de docent zeer langzaam geschiedt en plaatsvindt op basis van reflecties op het gedrag van de docent samen met de onderzoeker. Het hele proces duurde ongeveer een jaar. De resultaten op de interacties tussen de leerlingen zijn in de loop van het jaar duidelijk in de gewenste richting (meer exploratieve dialogen, dat wil zeggen gericht op co-constructie van kennis). De keuze voor deze langzame strategie wordt niet expliciet gelegitimeerd, maar het lijkt of de principes van realistisch reken-wiskunde-onderwijs ook hier kunnen worden toegepast: een iteratief proces van uitlokken van eigen constructies, experimenteren en op basis van gesprekken een reflectie op het eigen gedrag. Het gaat hier echter niet om het leren van wiskunde maar om het leren begeleiden van leerlingen in de vorm van proceshulp bij samenwerkend leren. De vraag is dan of van een volwassen professional (de docent) gevraagd mag worden een efficiënte en effectieve training hierin te volgen en of dan sneller het gewenste resultaat bereikt wordt. Dergelijke trainingen worden volop verzorgd, in Nederland door de lerarenopleidingen en landelijke pedagogische diensten; in Amerika zijn de trainingen van docenten voor coöperatief leren van Kagan (<http://www.kaganonline.com/Training/index.html>) heel bekend. Interessant zou hier een discussie zijn over de vraag of het leren van docenten in bepaalde vormen van begeleiden van leerlingen binnen ontwikkelingsonderzoek op dezelfde principes gestoeld moet zijn als die van realistisch reken-wiskundeonderwijs.

#### 4 Algemeenheid van principes van realistisch wiskundeonderwijs en lokale onderwijstheorieën

Aan het eind van de vorige paragraaf kwam de vraag al naar voren of bepaalde principes van het leren van rekenen-wiskunde een overeenkomst hebben met het leren van be-

geleidingsvaardigheden van docenten. In het kader van de bespreking van de bijdragen aan dit themanummer dringt de vraag zich op naar de specificiteit van de principes die ten grondslag liggen aan het realistisch reken-wiskundeonderwijs. Met andere woorden: is er cumulatie in kennisgroei met betrekking tot het ontwikkelen van realistisch reken-wiskundeonderwijs en wel zodanig dat die cumulatie niet een verzameling van losse elementen van lokale theorieën is, maar waarbij de som meer is dan het geheel der delen? Door de onderzoekers van het Freudenthal Instituut wordt de domeinspecificiteit sterk benadrukt. Deze specificiteit geldt niet alleen het domein van het reken-wiskundeonderwijs als zodanig, maar ook voor de daarbinnen onderscheiden onderwerpen, als diagrammatisch leren redeneren of breuken. Gravemeijer spreekt in het inleidende artikel over lokale onderwijstheorieën met als voorbeeld het optellen en aftrekken boven de twintig. ‘Lokaal’ slaat hierbij op de principes achter een leergang voor een dergelijk onderwerp uit het reken-wiskundeonderwijs. Hierbij wordt niet voor de gemakkelijkste weg gekozen door gebruik te maken van het systematische bouwwerk dat de wiskunde biedt. Of zoals Doorman in de laatste alinea van zijn bijdrage zegt: “Het gaat daarbij om onderwijs dat niet direct ontstaat vanuit de structuur van de vakdiscipline, maar vanuit betekenisvolle situaties voor de leerlingen”. Het lokale heeft daarbij niet alleen betrekking op het wiskundige onderwerp, maar ook op het kiezen van specifieke, betekenisvolle vertrekpunten voor een wiskundige leerlijn.

Als we de bijdragen in dit themanummer overzien, zijn er veel gemeenschappelijke elementen:

- belangrijke rol van de docent;
- klassikale momenten in de instructie, vooral voor reflectie;
- iteratieve cyclus van uitlokken van eigen constructies (geleid heruitvinden), experimenteren met die constructies, en reflectie op proces van begripsontwikkeling;
- meer aandacht voor begripsontwikkeling en symbolisering dan voor het uitvoeren van (algoritmische) rekenoperaties;
- computer als *tool* voor eigen constructies, van situatiespecifieke representaties naar

bijvoorbeeld de grafiek als wiskundig object;

- interactie tussen leerlingen;
- zorgvuldige analyse van het leerproces van de leerling en deze informatie continu gebruiken voor het bijstellen van de leergang.

Aan deze opsomming zijn nog meer aspecten toe te voegen. Wat intrigerend blijft, is waarom de nadruk sterk ligt op het lokaal zijn van de onderwijstheorie. Gravemeijer onderscheidt in zijn inleiding 1) algemene onderwijstheorieën, die vakoverstijgend zijn, 2) domeinspecifieke onderwijstheorieën, zoals een theorie van het reken-wiskundeonderwijs, en 3) lokale onderwijstheorieën, bijvoorbeeld over optellen en aftrekken boven de twintig. De lokale onderwijstheorie beschrijft hoe het leerproces verloopt en hoe dit ondersteund kan worden bij een bepaald onderwerp. Het leggen van verbindingen tussen lokale onderwijstheorieën en een domeinspecifieke onderwijstheorie van het reken-wiskundeonderwijs lijkt ons een belangrijke uitdaging voor onderzoekers in het wiskundedomein. Gravemeijer geeft in het inleidende artikel als voorbeeld van een domeinspecifieke theorie *progressief mathematiseren*. Een ander voorbeeld is de behandeling van het symboliseren (Gravemeijer, Lehrer, Van Oers, & Verschaffel, 2002), waarvan ook voorbeelden in de bijdragen van Bakker en Doorman zijn te vinden. Maar de bijdragen in dit themanummer versterken evenzeer de vraag naar hoe op een systematische wijze de relaties tussen de lokale onderwijstheorie en/of de domeinspecifieke onderwijstheorie en de meer algemene onderwijstheorie verder ontwikkeld kunnen worden.

## Literatuur

- Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education. On symbolizing and computer tools*. Proefschrift. Universiteit Utrecht. CD-β Press, nr. 50.
- Bakker, A., & Gravemeijer, K. P. E. (2006). An historical phenomenology of mean and median. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 149-168.
- Corte, E. de, & Verschaffel, L. (2002). High-



- powered learning communities: Design experiments as a lever to bridge the theory-practice canyon. *Prospects*, 32, 517-531.
- Doorman, L. M. (2005). *Modelling motion: from trace graphs to instantaneous change*. Proefschrift. Universiteit Utrecht. CD-β Press, nr. 51.
- Drijvers, P. H. M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment*. Proefschrift. Universiteit Utrecht. CD-β Press, nr. 48.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- Gravemeijer, K. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Proefschrift. Universiteit Utrecht. CD-β Press, nr. 14.
- Gravemeijer, K. P. E., Lehrer, R., Oers, B. van, & Verschaffel, L. (Eds.). (2002). *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Halasz, F., & Moran, T. P. (1983). Mental models and problem solving in using a calculator. In R. N. Smith, R. W. Pew, & A. Janda (Eds.). *Proceedings of the ACM CHI 83 Human Factors in Computing Systems Conference*. December 12-15, 1983, Boston, Massachusetts, United States. p. 212-216. (ACM 0-89791-121-0/83/012/0212).
- Merriënboer, J. J. G. van, & Kanselaar, G. (2006). Waar staan we na 25 jaar onderwijstechnologie in Vlaanderen, Nederland en de rest van de wereld?. *Pedagogische Studiën*, 83, 278-300.
- Phillips, D. C., & Dolle, J. R. (2006). From Plato to Brown and beyond: Theory, practice, and the promise of design experiments. In L. Verschaffel, F. Dochy, M. Boekaerts, & S. Vosniadou (Eds.), *Instructional psychology: Past, present and future trends. Sixteen essays in honour of Erik De Corte* (pp. 277-292). Oxford/ Amsterdam: Elsevier.
- Pijls, M. (2007). Collaborative mathematical investigations with the computer: learning materials and teacher help. Proefschrift. Universiteit van Amsterdam: Instituut voor de Lerarenopleiding.
- Veenhoven, J. (2004). Begeleiden en beoordelen van leerlingonderzoek. Een interventiestudie naar het leren ontwerpen van onderzoek in de tweede fase bij aardrijkskunde. Dissertatie, Universiteit Utrecht.
- Wilson, B. G. (1997). Reflections on Constructivism and Instructional Design. In: C. R. Dills, & A. J. Romiszowski (Eds.). (1997). *Instructional Development Paradigms*. Englewood Cliffs, NJ: Educational Technology Publications.
- Wittmann, E. Ch. (1995). Mathematics education as a design science. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 355-374.

## Auteurs

**Gellof Kanselaar** is emeritus hoogleraar en als honorair hoogleraar verbonden aan de afdeling onderwijskunde van de Universiteit Utrecht.

**Wim Van Dooren** is postdoctoraal onderzoeker bij het Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek-Vlaanderen, en als buitengewoon gastdocent verbonden aan het Centrum voor Instructiepsychologie en -technologie van de Katholieke Universiteit Leuven.

**Lieven Verschaffel** is als gewoon hoogleraar verbonden aan het Centrum voor Instructiepsychologie en -technologie van de Katholieke Universiteit Leuven.

*Correspondentieadres:* Prof. dr. Gellof Kanselaar, Universiteit Utrecht, afdeling Onderwijskunde, Heidelberglaan 1, 3584 CS, Utrecht. E-mail: g.kanselaar@uu.nl.

## Abstract

### Mathematics and ICT: A discussion

We discuss six articles based on research of a 'concerted action' funded by the Netherlands Organisation for Scientific Research (NWO). The first article presents design research as a common methodology of the following articles. The next three articles are about the role of computer software in learning certain mathematical concepts, such as mean and median, time-distance graphs, or the manipulation of algebraic expressions. The last two articles relate to cooperative learning and the role of the teacher when two students solve mathematical problems with the computer. The described research projects demonstrate the expertise of the researchers in design

research in mathematics. In the discussion we reflect on the potentials and the limits of design research, the way the computer is used, the role of the computer and the teacher. The learning results demonstrate the acquisition of the mathematical concepts.