

Samenwerkend computerondersteund wiskunde leren en de rol van de docent in havo-4

M. Pijls, R. Dekker, B. van Hout-Wolters en M. Veenman

Samenvatting

Als onderdeel van een promotieonderzoek rond samenwerkend, onderzoekend wiskunde leren met behulp van de computer hebben we een studie uitgevoerd gericht op de rol van de docent in havo-4 bij wiskunde A. In een van de twee condities werden de leerlingen uitsluitend begeleid op hun interacties (proces-hulp) en kregen ze geen inhoudelijke (wiskundige) hulp van de docent. Leerlingen hadden grote moeite met deze manier van werken en verwachtten van de docent meer uitleg. Twee leerlingen gaven echter ook aan dat ze geleerd hadden om “zelf meer en beter na te denken”. Van deze twee leerlingen wordt in dit artikel geïllustreerd hoe ze onder invloed van de gegeven proceshulp tot het inzicht kwamen dat ze door zelf meer en beter na te denken een wiskundig probleem konden oplossen. Hiervoor werden geluidsopnamen van de leerlingen en hun geschreven opdrachten geanalyseerd. Zowel voor de leerlingen als de docent bleek het een moeizaam proces waarbij de motivatie en de werkhouding van de leerlingen van belang bleek. Aansluitend bij de problemen en successen van dit tweetal en hun docent worden enige aanbevelingen gedaan voor het begeleiden van samenwerkend onderzoekend wiskunde leren in havo-4.

1 Inleiding

Na een onderwijskundig experiment in havo-4 bij wiskunde A¹, waarin leerlingen samenwerkten aan wiskundeopdrachten met de computer en van de docent minder uitleg kregen dan ze gewend waren, gaven twee leerlingen aan dat ze geleerd hadden meer en beter na te denken. Deze leerlingen waren niet representatief voor de hele groep leerlingen, want deze verandering in werkhouding is bij de rest van de leerlingen uit de klas niet opgetreden. We beschrijven in dit artikel

hoe de verandering van werkhouding is verlopen en we laten zien hoeveel weerstand ook deze twee leerlingen en hun docent ervoeren toen de docent voor het eerst de leerlingen geen inhoudelijke uitleg meer gaf. Uiteindelijk lukte het toch om de leerlingen weer zelf op gang te laten komen. Hoe kwam het dat dit bij deze twee leerlingen wel gebeurde en bij de rest niet?

1.1 Zelfstandig onderzoek doen bij wiskunde

De bedoeling van zelfstandig leren is dat leerlingen niet alleen kennis krijgen aangeboden, maar ook handvatten om zelf kennis te vergaren. Wanneer leerlingen samenwerken en van elkaar leren is de voornaamste rol van de docent het leerproces op gang te houden. Voor sommige leerlingen en hun docent blijkt het zelfstandig leren moeilijk in praktijk te brengen.

Zo hadden leerlingen in havo-4 in de profielen Economie & Maatschappij en Cultuur & Maatschappij in de eerste experimenten rond praktische opdrachten in het studiehuis (Project Invoering Nieuwe Technologieën, 1998; Praktische Opdrachten en Nieuwe Technologieën, 1999) moeilijkheden met het zelfstandig uitvoeren van onderzoek met de computer. Dit in tegenstelling tot de leerlingen in 4 vwo en havo-4 wiskunde B. Ook bij andere vakken is onderzoek doen voor leerlingen in havo-4 niet vanzelfsprekend succesvol (Rijborz, 2003). Wat het uitvoeren van onderzoek bij wiskunde betreft was het vermoeden dat de bestaande computersimulaties rond een wiskundig onderwerp te abstract waren. Het betrof vaak wiskundige modellen die voor deze leerlingen te weinig betekenis hadden en daarom te weinig speelruimte boden voor onderzoek. Om toch te proberen de leerlingen in havo-4 bij wiskunde A onderzoekend te laten leren, hebben we enkele jaren geleden een computersimulatie ontworpen waarbij leerlingen ook echt een aantal spelletjes konden spelen en hiermee

konden experimenteren (Pijls, Dekker & Van Hout-Wolters, 2000).

De bedoeling was om een onderwerp uit de kansrekening toegankelijk te maken. Bij de spelletjes werden opdrachten ontwikkeld die leerlingen de mogelijkheid gaven om te reflecteren op wat ze hadden ervaren in de simulatie en ervan te leren. Verschillende versies van dit lesmateriaal hebben we met elkaar vergeleken in een studie in 2001 (Pijls, Dekker & Van Hout-Wolters, 2003) en op grond van de resultaten werden de opdrachten verder ontwikkeld. Vervolgens werd een onderzoek uitgevoerd met de vraag welk type hulp van de docent het meest leerzaam was voor leerlingen die in tweetallen werkten met onderzoeksopdrachten rond de computersimulatie.

1.2 Verricht onderzoek en vraag van dit artikel

Het leren werd gemeten met een voor- en na-toets op *niveauperhoging*, gedefinieerd als de overgang van het perceptuele niveau naar het conceptuele niveau (zie 2.2). De toetsen bestonden uit twaalf open wiskundige vragen die op verschillende niveaus beantwoord konden worden. Tweetallen werden zo samengesteld dat er leerzame samenwerking verwacht werd, namelijk door leerlingen aan elkaar te koppelen die verschillen qua niveau op de voortoets en die met elkaar overweg konden. Twee typen hulp van de docent werden onderscheiden, naar analogie van een studie van Dekker en Elshout-Mohr (2004) in vwo-5 bij wiskunde B. Het betrof de condities *producthulp* (hulp van de docent die gericht is op het wiskundige product waar leerlingen aan werken) en *proceeshulp* (hulp die gericht is op de interactie tussen leerlingen). Van proceeshulp werd verwacht dat deze zou leiden tot meer niveauperhoging bij de leerlingen, net als bij de leerlingen in vwo-5 wiskunde B.

De resultaten in havo-4 wiskunde A lieten een ander beeld zien (zie Pijls, Dekker & Van Hout-Wolters, in druk). In beide condities bereikten de leerlingen evenveel niveauperhoging en in beide condities verwachtten leerlingen van de docent meer uitleg dan ze kregen wanneer ze een vraag stelden. Ook de docenten in beide condities vertelden achteraf dat ze iets meer uitleg hadden willen

geven. Opvallend is wel, dat ondanks de vraag om uitleg van de leerlingen en de neiging tot uitleggen van de docent, de leerlingen in de conditie waarin meer uitleg werd gegeven niet meer niveauperhoging bereikten. De mate van niveauperhoging in beide groepen was echter gering. Alle inspanningen ten spijt bleek het voor deze leerlingen dus nog steeds lastig om zelfstandig wiskundige kennis op te bouwen. De neiging om wiskunde te zien als iets dat door de docent wordt uitgelegd, bleef hardnekkig aanwezig, terwijl meer uitleg van de docent niet tot meer begrip leidde. Het lukte niet om leerlingen zelf kennis te laten construeren en hen hiermee de concepten te laten verwerven die voor het eindexamen van belang zijn. Dit spanningsveld tussen constructies van leerlingen enerzijds en exameneisen anderzijds, komt ook naar voren in de discussie rond het Nieuwe Leren (Wubbels, 2006). Tijdens het experiment ervoeren zowel leerlingen als de docent weerstand. Blijkbaar waren alle betrokkenen eraan gewend dat de docent degene is die uitleg geeft.

In dit artikel bestuderen we twee leerlingen die aan het einde van het project wél aangaven dat ze geleerd hadden "zelf meer en beter na te denken". Twee goudkorreltjes in de woestijn van moeizaam leren. We laten zien hoeveel moeite het deze twee leerlingen en hun docent heeft gekost om proceeshulp effectief te laten zijn (dat wil zeggen leerlingen uit te nodigen tot meer en beter zelf nadenken). Door in detail te kijken naar het leerproces van deze twee leerlingen en hun docent kunnen we ook aangeven waarom het zelfstandig onderzoekend leren bij veel leerlingen niet goed werkt.

2 Theoretisch kader

2.1 Het begeleiden van samenwerkend leren

Samenwerkend leren kan leerlingen de ruimte geven om hun eigen ideeën op te bouwen en te ontwikkelen (Van der Linden & Renshaw, 2004). Daarbij ondersteunen ze elkaar wanneer hun ideeën verschillen. In een leerzame discussie kunnen leerlingen hun eigen ideeën aanscherpen. Daarbij is de voornaam-

ste functie van de docent om erop toe te zien dat het leerproces op gang blijft. Verschillende typen hulp bij samenwerkend wiskunde leren zijn onderzocht. Zo vonden Kramarski, Mevarch en Arami (2002) dat metacognitieve instructie² aan leerlingen die samenwerkend leren, leidde tot hogere leerresultaten dan 'gewone' instructie over de taak zelf. Hoek (1998) vond positieve effecten op de leerresultaten voor zowel de instructie van sociale als van cognitieve activiteiten, maar geen additief effect van deze twee.

Wood (2001) benadrukte dat docenten zich afzijdig moeten houden van de discussies tussen leerlingen, zodat leerlingen echt zelf hun eigen kennis kunnen ontwikkelen. Hierbij is het van belang dat leerlingen met de problemen kunnen worstelen en aan hun eigen en elkaars ideeën kunnen twijfelen. Voor docenten is het niet makkelijk om in zo'n geval niet in te grijpen, omdat het indruist tegen de (zeer menselijke) neiging om uitleg te geven en hulp te bieden door iets van het probleem uit handen te nemen. Daarbij komt nog dat, vanwege het feit dat er meerdere groepjes in een klas aan het werk zijn, een docent niet van alle leerlingen kan horen wat ze gezegd hebben, en daarom niet iedere leerling op zijn of haar eigen niveau een hint kan geven. Brodie (2001) suggereerde hierbij als docent je meer op algemene redeneerprocessen te richten dan op de taak zelf.

Het onderscheid tussen het ondersteunen van algemene processen of hulp bieden die gericht is op de taak zelf, werd ook gemaakt door Marzi (2003) en Veenhoven (2004). Marzi (2003) onderzocht het verschil tussen basisschoolleerlingen die samenwerkten onder begeleiding van een docent die hen inhoudelijk hielp als ze daarom vroegen, en leerlingen die samenwerkten onder begeleiding van een docent die zich afzijdig hield van de inhoud van de opdrachten en hen wel hielp met de planning en het structureren van de taak. Het bleek dat de tweede vorm van hulp door de docent leidde tot meer uitleg en theoretische benadering bij leerlingen dan de eerste. Veenhoven (2004) onderzocht welke componenten van het gedrag van de docent bijdroegen aan de onderzoeksvaardigheden van de leerlingen. Het onderzoek vond plaats in havo-4 en vwo-4 bij praktische opdrachten

aardrijkskunde. Het bleek dat leerlingen die samenwerkten onder begeleiding van een docent die zich richtte op het uitvoeren van onderzoek niet tot een beter onderzoek kwamen dan leerlingen die werkten onder begeleiding van een docent die zich richtte op de interactie. Deze twee studies laten zien dat als een docent zich niet bemoeit met de inhoud van de taak, maar zich richt op de interactie tussen de leerlingen, deze leerlingen even goede of betere leerresultaten bereiken.

Het geven van dergelijke hulp is voor docenten niet eenvoudig. Hoek, Seegers, Grave-meijer en Figueiredo (in druk) voerden een ontwikkelingsonderzoek uit naar de rol van de docent in het MBO bij wiskunde. Zij ervoeren enorme weerstand bij leerlingen en docent wanneer de docent inhoudelijke hulp achterwege liet. Als oplossing hiervoor werd gekozen voor klassengesprekken waarin leerlingen de gelegenheid kregen hun werk te tonen. Het duurde een aantal lessen voordat het de docent lukte om zijn eigen inhoudelijke instructie in de klassengesprekken achterwege te laten en de leerlingen hun eigen werk te laten tonen. Toen dit uiteindelijk lukte, leidde dit tot een meer onderzoekende houding bij de leerlingen, resulterend in meer samenwerking tussen leerlingen en uitleg aan elkaar met behulp van de grafische rekenmachine.

2.2 Wiskundige niveauperhoging

Wiskunde leren wordt in dit onderzoek ge-operationaliseerd als het bereiken van wiskundige *niveauperhoging* (vgl. Van Hiele, 1986). Hiermee bedoelen we het volgende: als een onderwerp nieuw is voor leerlingen, benaderen ze het op perceptueel niveau, op grond van hun voorkennis of naïeve kennis van een bepaald onderwerp. Door te reflecteren op hun eigen en elkaars werk, bouwen ze structuren en kennis op en zullen ze het onderwerp op een conceptueel niveau gaan benaderen: niveauperhoging heeft dan plaatsgevonden. Zo kunnen leerlingen bij het zien van het spelbord in Figuur 2 (zie 3.2) menen dat de kans om in het middelste hokje terecht te komen $1/9$ is, vanwege het feit dat een balletje in negen verschillende hokjes terecht kan komen. Dit is een benadering op het perceptuele niveau van het onderwerp routes en

kansen. Op het conceptuele niveau weten leerlingen dat de kans om in het midden te komen groter is dan aan de zijkanen.

Dekker en Elshout-Mohr (1996, 1998) ontwikkelden een procesmodel waarin ze kernactiviteiten beschrijven die bij samenwerking tussen twee leerlingen leiden tot niveauverhoging. Dit zijn: het *tonen* van het eigen werk, het *uitleggen* van het eigen werk, het *verantwoorden* van het eigen werk en het *reconstrueren* ervan. Al deze activiteiten hebben te maken met reflectie, ofwel omdat ze aanleiding geven tot reflectie (tonen en uitleggen), ofwel omdat ze het resultaat ervan zijn (verantwoorden en reconstrueren). Leerlingen kunnen deze activiteiten bij elkaar oproepen door elkaar te vragen het werk te tonen, elkaar om uitleg te vragen en elkaar te bekritisieren.

De vraag is hoe we leerlingen aanleiding kunnen geven tot reflectie, of meer specifiek tot het uitvoeren van bovengenoemde kernactiviteiten. Cruciaal hierbij is geschikt lesmateriaal. Dekker (1991) stelde vier criteria op waar opdrachten voor samenwerkend leren aan moeten voldoen. Allereerst moeten de taken *realistisch* of betekenisvol zijn voor leerlingen. Daarnaast moet het materiaal *complex* zijn, zodat leerlingen elkaar nodig hebben. Verder is het van belang dat leerlingen iets moeten *construeren*, zodat hun denkwerk zichtbaar kan worden en er iets is om over te praten. Ten slotte moeten de opdrachten gericht zijn op *niveauperhoging*.

2.3 Procehulp en producthulp

Wanneer het lesmateriaal en de computersimulatie zodanig zijn dat leerlingen zelfstandig en met elkaar kunnen leren, kan de rol van de docent minimaal zijn. Dekker en Elshout-Mohr (2004) onderzochten welk type hulp van de docent het meest leidde tot niveauverhoging voor leerlingen in vwo-5 bij wiskunde B. De leerlingen werkten in heterogene drietallen aan opdrachten rond meetkundige transformaties. Van de volgende twee typen hulp van de docent werd het effect op niveauverhoging vergeleken:

1. producthulp: hulp van de docent die gericht is op het wiskundige product waar leerlingen aan werken (wiskundige hints);
2. proceshulp: hulp die gericht is op de interactie tussen leerlingen, in het bijzonder

het optreden van de kernactiviteiten.

Het bleek dat de leerlingen die producthulp kregen tijdens het werken aan de opdrachten meer producten maakten op conceptueel niveau dan leerlingen die proceshulp kregen. Toch bereikten de leerlingen die proceshulp kregen meer niveauverhoging op de natoets. Volgens Dekker en Elshout-Mohr hield de docent die proceshulp gaf alleen de samenwerking op gang en creëerde zo gelegenheid voor reflectie, maar verstoorde de proceshulp het denken van de leerlingen niet.

In het onderzoek van Dekker en Elshout-Mohr hielden de docenten geen klassikale besprekingen. Het ging er echt om om te onderzoeken hoe de leerlingen met behulp van het lesmateriaal en elkaar hun eigen kennis opbouwen en tot niveauverhoging komen en hoe de docent dat proces het beste kan begeleiden.

Zoals in de inleiding beschreven, werd door de auteurs een zelfde soort onderzoek uitgevoerd naar het effect van proceshulp en producthulp op niveauverhoging in havo-4 bij wiskunde A (zie Pijls, Dekker & Van Hout-Wolters, in druk). De leerlingen werkten in dit onderzoek in heterogene tweetallen aan onderzoeksopdrachten bij een computersimulatie rond het onderwerp kansrekening. Er bleek geen verschil in niveauverhoging te zijn tussen de twee condities. In beide groepen vroegen de leerlingen veel meer hulp en verwachtten ze ook meer uitleg van de docent dan de leerlingen in vwo-5 bij Dekker en Elshout-Mohr (2004). Vanuit dit perspectief is het verrassend dat de conditie waarin de docent ook meer uitleg gaf, het niet beter deed dan de conditie waarbij de docent zich hier afzijdig van hield. Zoals gezegd blijft het zelfstandig onderzoeken van een wiskundig onderwerp voor deze leerlingen dus moeilijk. Kennelijk komen de leerprocessen niet goed op gang. Proceshulp leidde niet tot diepere verwerking en niveauverhoging, waardoor proceshulp niet van producthulp differentiateerde, zoals in vwo-5 het geval was.

Om meer inzicht te krijgen in de rol van de docent bij het zelfstandig wiskunde leren bij leerlingen in havo-4 wiskunde A, volgen we in deze studie twee leerlingen die proceshulp kregen en bij wie de leergang gunstig heeft gewerkt. Deze twee leerlingen vielen op omdat ze aangaven dat ze geleerd hadden

om zelf meer en beter na te denken. Beiden bereikten ook niveauverhoging, zij het niet in dezelfde mate.

3 Methode

3.1 Selectie van de leerlingen

De in dit artikel beschreven leerlingen, Roos en Stella, zitten op het Montessori Lyceum, waar de leerlingen gewend zijn aan zelfstandig leren. Ze zijn geselecteerd omdat er bij hen een verandering in werkhouding is opgetreden die we bij de andere leerlingen misten. In Figuur 1 zien we hoe ze zelf terugkijken op de lessen.

Roos en Stella zijn aan elkaar gekoppeld op grond van enigszins verschillende resultaten in de voortoets (maximaal 46 punten te halen) die ze hebben gemaakt. Roos had 8 punten, dat is gemiddeld, en Stella scoorde 15 punten, dat is hoog. We verwachtten dat enig niveauverschil tot verschillende antwoorden en zo tot interactie tussen de leerlingen zou leiden, vandaar dat deze leerlingen aan elkaar gekoppeld zijn. Verder werd bij de samenstelling van de tweetallen gekeken of de leerlingen met elkaar overweg konden, hetgeen bij deze twee leerlingen het geval was. Ze zijn vriendinnen en zitten gewoonlijk samen in de wiskunde klas bij docent Albert, die hun nu proceshulp geeft. De globale indruk van hun inzet in het opdrachtenboekje is heel goed en ze waren tijdens alle lessen aanwezig.

Op de natoets (maximaal 46 punten te halen) scoorde Roos 11 punten en Stella 28 punten. Stella behaalde hiermee het op een na hoogste resultaat van de klas en bereikte ook echt niveauverhoging. Roos ging in de natoets niet veel vooruit, maar haar vooruitgang is wel gemiddeld voor de groep. Bovendien lieten het werkboekje van Roos en Stella en de geluidsopnamen zien dat Roos in haar leerproces wél een begin met niveauverhoging heeft gemaakt voor dit onderwerp. Ze sluit aan bij haar eigen voorkennis en vergelijkt haar antwoord op het perceptuele niveau met het antwoord op het conceptuele niveau van Stella. In dit artikel gaan we verder niet in op de (verschillen in) resultaten op de natoets. Het gaat ons om de



Opdracht 22 Afsluiting

- a) Wat hebben jullie geleerd van het werken met dit lesmateriaal?

om zelf beter na te denken
zelf meer na te denken

Figuur 1. Antwoord van Roos en Stella.

verandering in werkhouding die is opgetreden bij deze leerlingen en hoe deze tot stand is gekomen.

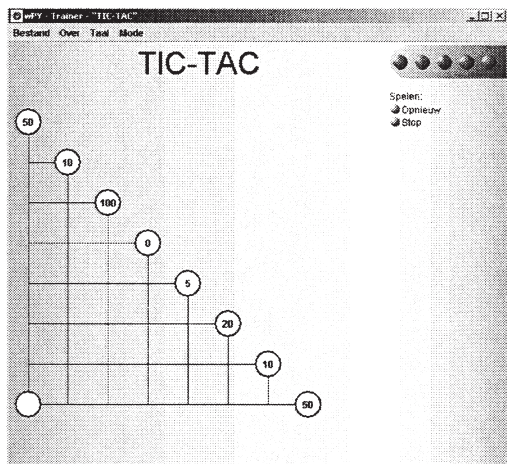
3.2 Het lesmateriaal

Het lesmateriaal bestaat uit een aantal kansspelletjes op de computer met bijbehorende onderzoekopdrachten. De opdrachten zijn erop gericht om leerlingen het concept van routes tellen in een rooster te leren. Hiermee kunnen bepaalde telproblemen worden opgelost, zoals bijvoorbeeld het onderstaande (zie ook figuur 3): “Joost heeft 5 blauwe en 2 rode kralen. Op hoeveel manieren kan hij die achter elkaar aan een ketting rijgen?”

In een rooster kunnen de blauwe kralen gevisualiseerd worden door stappen naar boven en de rode kralen door stappen naar rechts. Het telprobleem van Joost wordt zo gelijk aan de vraag hoeveel routes er vanuit het startpunt S naar het hokje met de 100 punten zijn. Iedere route bestaat uit twee stappen naar rechts en vijf stappen naar boven. Het gaat er dus om alle verschillende routes te tellen. Het gebruik van een rooster als model om telproblemen op te lossen is voor leerlingen lastig. Over het algemeen kost het ze geen moeite om een telprobleem met een rooster op te lossen, maar wel om in te zien bij welke problemen het rooster wel gebruikt kan worden en bij welke problemen niet.

In het lesmateriaal wordt eerst het routes tellen in een rooster opgebouwd. In de eerste opdrachten spelen leerlingen zeer eenvoudige kansspelletjes op de computer, die als onderliggend model het model van het rooster hebben. Belangrijk is het spel TIC-TAC, waarvan het scherm is afgebeeld in Figuur 2.

Als je links onderaan klikt, dan verschijnt er een balletje dat zich een weg zoekt naar



Figuur 2. Het spelbord van het spel TIC-TAC.

een van de ronde hokjes waarop puntenaantallen staan. Dit aantal punten win je. Bij iedere ‘stap’ naar rechts licht het lijntje rood op en bij iedere stap naar boven licht het lijntje blauw op. Zo ontstaat er een route van blauwe (B) en rode (R) stapjes. Doel van dit spel is dat leerlingen in gaan zien dat er meer verschillende routes naar de hokjes in het midden gaan, dan naar de hokjes aan de zijkant.

Na het verkennen van het spel komt er een opdracht met pen en papier waarbij de leerlingen, ieder op een eigen werkblad, verschillende routes moeten tekenen naar het hokje met 100 punten. Deze benoemen ze in termen van BRBBBBR (B = naar boven en R = naar rechts) en ze vergelijken met elkaar welke verschillende mogelijkheden ze hebben gevonden. Dan experimenteren ze met andere spelborden, allemaal met hetzelfde onderliggende rooster. Gaandeweg ontdekken ze het routes tellen in een rooster. Dit gaat allemaal heel geleidelijk en is voor de leerlingen goed te volgen. Dan komt het moment waarop leerlingen worden uitgenodigd om het model in verband te brengen met het oplossen van telproblemen zoals in het voorbeeld hierboven. Eerst wordt er gevraagd het telprobleem van Joost op te lossen. Dit is een probleem dat de leerlingen met behulp van hun voorkennis over boomdiagrammen systematisch tellend kunnen oplossen. Het is wel een zeer complex probleem om op deze manier op te lossen. Vervolgens wordt leerlingen gevraagd om nogmaals het spel TIC-

TAC te spelen en te zien hoe je het routes tellen in het spel kunt gebruiken om het probleem van Joost op te lossen. We hadden verwacht dat leerlingen de overeenkomst tussen R= rood en R= rechts zouden inzien en zo het verband tussen routes en mogelijkheden in een telprobleem zouden begrijpen. Dit gebeurde echter niet. Bij deze opgave liepen leerlingen massaal vast.

Vervolgens kwamen er opgaven over telproblemen die met een rooster opgelost kunnen worden en het berekenen van kansen met een rooster. De opbouw van de leergang en de sequentie van de opdrachten is zodanig dat de leerlingen in tweetallen zelfstandig tot niveauverhoging kunnen komen.

3.3 Rol van de docent

De docent die meedeed aan het onderzoek geeft al jarenlang les op het Montessori Lyceum. Hij wilde graag experimenteren met deze nieuwe manier van leerlingen begeleiden. Uitsluitend proceshulp geven was voor hem niet vanzelfsprekend. In de dagelijkse schoolpraktijk is producthulp gebruikelijker. In een aantal bijeenkomsten is door middel van rollenspel deze vorm van leerlingbegeleiding geoefend. Ook is besproken wat volgens de docent de mogelijke valkuilen van proceshulp zouden zijn. Hierbij kwam als voornaamste naar voren dat leerlingen mogelijk een bepaald begrip verkeerd zouden ontwikkelen of een bepaald begrip niet zouden leren. De docent was bereid de risico's van dit onderwijskundig experiment aan te gaan. Tijdens de lessen werd het gedrag van de docent geobserveerd door de onderzoeker. Na afloop van iedere les werd telefonisch overlegd. Tijdens een van deze gesprekken reikte de onderzoeker de docent drie gouden regels aan om de docent houvast te geven bij de instructie aan de leerlingen. Deze gouden regels luiden: “Laat elkaar je (denk)werk zien”, “Leg elkaar je werk uit” en “Geef elkaar kritiek”.

De proceshulp werd als volgt vormgegeven. Aan het begin van de les gaf de docent telkens de instructie: “Ik ga jullie niet helpen met de inhoud. Ik wil dat jullie veel discussiëren, elkaar je werk laat zien, elkaar uitleg geeft, dat is waar je van leert. Geef elkaar kritiek, zodat het werk beter wordt.” De docent liep tijdens het zelfstandig werken door de

klas en moedigde de leerlingen aan. Wanneer leerlingen samen aan het werk waren en om hulp vroegen, dan antwoordde de docent: “Ik wil dat jullie zelf beslissen, denk erover, wees kritisch ten opzichte van elkaars ideeën.” Hij gaf hen dus geen inhoudelijke hulp, maar bleef wel aanwezig. Hij bleef hen ook aanspreken wanneer hij zag dat leerlingen het moeilijk hadden.

3.4 Dataverzameling en analyse

Een eerste inzicht in wat er in de lessen gebeurde, hebben we verkregen door het lesboekje van de leerlingen te bestuderen. Hierbij werd gelet op 1) Hebben de leerlingen zorgvuldig gewerkt? 2) Hebben de leerlingen hun eigen ideeën geformuleerd? 3) Hebben de leerlingen hun antwoord verbeterd? 4) Bereikten de leerlingen het conceptuele niveau?

Vervolgens zijn de geluidsopnames van de lessen van Stella en Roos afgeluisterd, samengevat en gedeeltelijk uitgeschreven door de onderzoeker. Hierbij werd gelet op: 1) de werkhouding van de leerlingen, 2) de interactie tussen de leerlingen, 3) de interactie met andere groepjes en 4) de interactie met de docent.

Op deze manier is een beeld ontstaan van hoe de lessen zijn verlopen. Vervolgens zijn we nagegaan welke gedeeltes in de lessen belangrijk zijn geweest voor de verandering in houding die is opgetreden bij Roos en Stella. Dit hebben we gedaan door fragmenten te selecteren waarin de leerlingen met elkaar ideeën uitwisselden over de concepten die ze aan het leren waren. Vervolgens hebben we gekeken in hoeverre feedback van de docent de leerlingen uitnodigde om zelf meer na te denken over de stof. Hierin vonden we een verschuiving van leerlingen die zich afhankelijk van de docent opstelden naar leerlingen die tot het inzicht kwamen dat ze ook zelf verder konden komen. Deze rode draad hebben we hieronder beschreven.

4 Beschrijving van het leerproces van Roos en Stella

4.1 Eerste les

De leerlingen kunnen met proceshulp uit de voeten en wanneer zij op een wiskundig

probleem stuiten, kunnen ze dit nog zelf oplossen.

Roos en Stella werken in deze eerste les met een aantal verkennende opdrachten op de computer: het spelen van spelletjes, met aansluitend pen en papier opdrachten waarmee ze de onderliggende structuur van het spel kunnen onderzoeken (zie 3.2). De leerlingen leren het computerprogramma kennen.

Roos en Stella hebben allebei een actieve werkhouding. In hun geschreven opdrachten zien we dat ze zorgvuldig hebben gewerkt, ze experimenteren en maken aantekeningen. Op de geluidsopnamen is te horen dat ze de vragen goed lezen en flink de tijd nemen om te experimenteren met de computersimulatie en dat ze nadenken over wat ze doen. Als Stella zegt dat ze een opdracht niet zo leuk vindt, gaan ze toch meteen verder. Ze zijn dus goed gemotiveerd. Opvallend aan hun manier van werken is dat ze een evenwicht hebben tussen doen en denken. Ze houden de vaart erin, en denken tegelijkertijd na over wat ze gedaan hebben. Ook horen we dat ze actief samenwerken. Ze formuleren beiden hun ideeën, luisteren goed naar elkaar, zijn kritisch en vullen elkaar aan. Vanuit een ander groepje wordt er gevraagd bij welke opdracht ze zijn. De verschillende groepjes houden elkaar dus ook in de gaten. In de interactie met de docent zien we ze de rol van de docent verkennen.

Stella twijfelt over de berekening van de kansen en wil het aan de docent vragen.

Stella: Mogen we wat dingen vragen? ...

Docent: Ik, nee, jullie mogen, nee jullie werken goed samen, ga zo door, je mag alles zelf bedenken.

Stella: Ja, maar mogen we ook dingen vragen.

Docent: Hoe bedoel je, wat wil je vragen aan me, dan?

Stella: Bij deze b), we begrijpen niet zo goed hoe we dat moeten uitrekenen.

Docent: O ja, nee, maar dat is echt, probeer daar samen iets op te bedenken of je daar iets over kan zeggen.

Stella: Ja, we hebben wel iets bedacht, maar...

Docent: Nou ja, als jullie dat het goede antwoord vinden, dan vind ik dat prima. Als je het met elkaar eens bent dat het dat moet

zijn, dan moet je dat opschrijven.

De leerlingen zijn duidelijk niet gewend dat een wiskundedocent hun geen enkele aanwijzing geeft over de uit te voeren berekeningen. Ze lijken niet zo goed raad te weten met het feit dat ze geen hulp bij hun berekening krijgen. Tegelijk zet de afwezigheid van uitleg door de docent de leerlingen nog niet heel erg voor het blok, omdat de opdrachten niet zo moeilijk zijn. We zien de docent worstelen met het geven van een antwoord zonder zich met de wiskundige inhoud van de vraag te bemoeien. Hij benadrukt dat de leerlingen zelf tot een oplossing moeten komen en probeert hen aan te moedigen.

4.2 Tweede les, eerste gedeelte

De leerlingen kunnen nog steeds met proceshulp uit de voeten bij het werken aan de opdrachten.

In het eerste gedeelte van de les werken ze aan de opgaven in het *lesmateriaal* waarin ze de basis leggen voor het concept routes tellen in een rooster. Dit zijn veel doe-opdrachten die direct betrekking hebben op de computersimulatie. Er wordt ook gevraagd berekeningen te maken om kansen te bepalen.

De samenwerking tussen Roos en Stella is nog steeds intens, ze zijn erg actief samen aan de slag. Hierbij tonen ze elkaar hun werk regelmatig, er is echter weinig uitleg of discussie. Ze praten veel in termen van 'je moet dit doen' of 'je moet dat doen'.

Als ze er bij een bepaalde opgave niet uitkomen, vraagt Stella de docent om hulp.

Stella: Tel het aantal routes naar de hokjes met dezelfde kleur op. Moet je dan gewoon? Is dit 1, 2, 3...

Docent: Hebben die dezelfde kleur?

Stella: Ah, nou deze niet, ik bedoel deze... 1, 2, 3, 4, 5, 6...

Docent: Wat betekenen die getallen die je hebt ingevuld?

Roos: O, je moet de getallen bij elkaar optellen?

Docent: Ja, tenminste, ...

Stella: O, ja, er zijn namelijk vijf dingen om hiernaartoe te komen.

Docent: Begrijp je? Samen kom je er ook uit, want zij had dat al in de gaten, volgens mij.

Roos: Ja, dus $1 + \dots + 4 + 4 \dots = 8$

Stella: En dit is $1 + 4 \dots 16$

Roos: $7 + 8$

Er is nog steeds de neiging om, als het echt moeilijk wordt, de docent om hulp te vragen. En deze geeft per ongeluk een paar kleine hints die eigenlijk buiten proceshulp vallen, omdat ze iets met de inhoud van doen hebben. Roos formuleert hierna het antwoord. De leerlingen denken heel actief mee richting goede antwoord, alleen vragen ze zich niet echt af waarom dat zo is. Docent Albert zegt hun: "Samen kom je er ook uit" en benadrukt hiermee niet zijn eigen hint maar de eigen inbreng van de leerlingen.

4.3 Tweede les, tweede gedeelte

Roos en Stella kunnen veel van hun eigen voorkennis in de opdracht kwijt en leveren een grote inspanning bij het werken aan een opdracht ter voorbereiding van het concept routes tellen als model.

In het lesmateriaal leest Stella de opdracht over het telprobleem van de kettingen van Joost (zie 3.2). Dit is een complex telprobleem dat ze met hun voorkennis (kansboom, systematisch tellen) kunnen oplossen. Deze opdracht is bedoeld om later op te kunnen reflecteren en zo te ontdekken dat het probleem ook met een rooster opgelost kan worden.

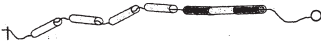
De twee leerlingen komen ieder met een eigen oplossingsmethode. Ze hebben ieder een eigen werkblad, en worden daarmee expliciet uitgenodigd om elk eerst een eigen antwoord te formuleren. Vervolgens vergelijken ze hun werk met elkaar. Hier wordt om gevraagd in de opdrachten. Roos benadert de vraag op het niveau van hun voorkennis ("dan weten we het zeker") en tekent een groot boomdiagram (zie Figuur 3). Stella ziet in dat dat een enorm karwei is en zoekt een andere manier. Ze telt systematisch, hardop, de plaatsen waar de blauwe kralen kunnen komen. Ze probeert zich een formule te herinneren waarmee ze de mogelijkheden kan tellen. Het denkwerk van Stella is voornamelijk te horen op de geluidsopnamen, we zien er niet veel van op papier. Roos komt echter ruimte tekort op haar eigen vel en tekent een deel van haar boomdiagram op het blad van Stella.

Ze steken veel energie in deze opdracht en zoeken zowel naar het goede antwoord ("wat is het aantal mogelijkheden") als naar een

Werkblad bij opdracht 10

NAAM: Roos

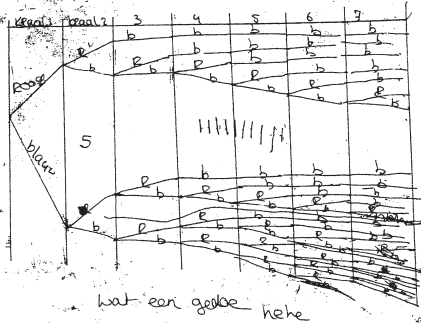
a) Los het onderstaande telprobleem op.



Joost heeft 5 blauwe en 2 rode kralen.

Op hoeveel manieren kan hij die achter elkaar aan een ketting rijgen?

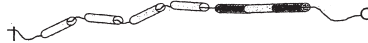
In totaal 9 kralen. het is 21
 er zijn 21 verschillende manieren.



Werkblad bij opdracht 10

NAAM: _____

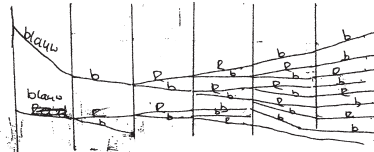
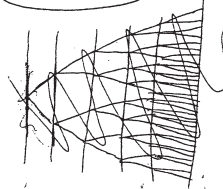
a) Los het onderstaande telprobleem op.



Joost heeft 5 blauwe en 2 rode kralen.

Op hoeveel manieren kan hij die achter elkaar aan een ketting rijgen?

21 manieren.



$$7+5+7=21$$

Figuur 3. Het antwoord op vraag 10a van Roos (links) en Stella (rechts).

prettige oplossingsmethode. Daarbij laten ze elkaar voortdurend hun werk zien en zijn kritisch zowel op zichzelf als op elkaar.

4.4 Derde les, eerste gedeelte

De leerlingen zitten vast en vinden het lastig dat de docent geen antwoord geeft op hun inhoudelijke vraag.

Aan het begin van de les werkt Stella alleen aan de opdrachten, omdat Roos er nog niet is. Ze zit vast bij opgave 10d. Deze opgave luidde: "Hoe kun je opgave 9a gebruiken om het telprobleem van de ketting van Joost op te lossen?" En opgave 9a luidde: "Hoeveel routes gaan er naar het hokje met de 100 punten?"

Het gaat bij deze opgave dus om het verband tussen het spel TIC-TAC en de kettingen van Joost. Stella begrijpt de opgave niet. Ze roept de hulp van de docent in. Deze geeft aan dat ze het zelf moet oplossen en benoemt ook dat het lastig is om het alleen uit te zoeken, en dat ze het later maar met Roos moet bespreken. Stella polst bij een ander groepje wat ze bij deze opgave hebben geantwoord, maar hier komt ze niet verder mee.

Roos komt binnen. Ze pakken samen opdracht 10d aan. Ze komen er niet uit, zien niet in wat het telprobleem is, praten over iets

anders en overwegen om de opdracht even te laten liggen. Dan roepen ze toch de hulp van de docent in.

Roos: Mag ik iets vragen wordt dit het eindcijfer of zo iets, wat wordt dit?

Docent: Nee, hier moet je uit proberen te leren.

Roos: Maar waarom mag je dan niet helpen?

Docent: Nou, dat is juist belangrijk dat je het zelf uitzoekt, want dan ken je het goed en de toets, die komt helemaal op het einde en daar krijg je een cijfer voor.

Roos: Ja, maar.

Docent: Ja, maar dan moet je elkaar heel goed helpen en dan moet je de tekst heel goed lezen.

Stella: Ja maar, dat doen we ook, als we het niet weten, dan weten we het toch niet?

Docent: Ja, maar de bedoeling is dat je dan nog eens nadenkt, en nog eens...

Stella: Ja, maar, hallo, maar we hebben gisteren, op het einde, alleen maar dit gedaan.

Roos: Gisteren waren we bij vraag 8...

Docent: Mooi zo

Roos: ...en we zijn bij vraag 10 geëindigd.

Docent: Dat is niet gek hoor.

Roos: Dat is echt wel gek. Vorige keer waren we van 1 naar 8.

Docent: Nee hoor, nee hoor.

Roos: Nou, ik vind het veel te langzaam. Maar wat is, we weten nog niet, hoe... er is helemaal geen telprobleem.

Docent: Oh, ...

Roos: Wat is het probleem dan?

Docent: Hier, dat is het probleem, zie ik nu...

Stella: Dat er vijf en twee, dat er vijf blauw en twee rode zijn.

Docent: Nee, nee, d'r staat toch een vraagteken, dus dit is het probleem dan. Begrijp je?

Roos: Ja maar op hoeveel manieren kunnen die achter elkaar...

Stella: Ja maar, dat kan niet met dit.

Docent: Nou, probeer dat nou zelf te bedenken... wat dat met dat te maken heeft.

Stella: Ja, ik doe niet anders.

Roos: Ho, wacht, ik weet het al, dit zijn ook 21 routes, en deze heeft 21 manieren, dus, dat is hetzelfde!

Omdat ze weet dat de docent hen in principe niet helpt, vraagt Roos hem iets anders dan directe hulp voor de opdracht. Ze vraagt de docent of de opdrachten beoordeeld worden, of ze er een cijfer voor krijgen. De docent antwoordt van niet. Hij zegt dat deze opdrachten bedoeld zijn om van te leren. Roos vraagt waarom de docent niet mag helpen als ze ervan moeten leren. Blijkbaar wordt 'het zelf doen zonder hulp van de docent' geassocieerd met 'beoordeeld worden' en ook 'leren' met 'geholpen worden' of liever gezegd 'uitleg krijgen van de docent'. De docent antwoordt hen dat het belangrijk is dat ze het zelf uitzoeken, omdat ze het dan goed kennen. We proeven ook ongemak in zijn houding. De leerlingen geven aan dat het hen niet lukt om zelf uit te zoeken hoe het zit, dat ze vast zitten en dat ze naar hun idee niet genoeg vooruitkomen. De docent blijft stimuleren, aanmoedigen. Hier zien we dat ze heel goed hun eigen werktempo in de gaten houden. Deze leerlingen zijn echt gewend hun eigen werk te plannen. En dan probeert Roos toch nog iets over de inhoud te zeggen en daarmee te vragen 'Wat is het telprobleem dan?' en de docent verspreekt zich 'Hier, dit is het probleem, zie ik nu.' We zien hier dat Stella het verband tussen de kettingen van Joost en de routes in een rooster niet ziet.

Roos verwoordt het verband wel: "Door routes te maken naar, ik weet niet, door routes te maken naar rood, naar vijf keer rood en twee keer blauw, nee, 5 keer blauw en twee keer rood".

4.5 Derde les, tweede gedeelte

De leerlingen vinden het echt heel lastig dat de docent hun geen uitleg geeft en de docent is standvastig in zijn rol.

Roos en Stella werken aan een vraag die erover gaat hoe de driehoek van Pascal (zie figuur 4) gebruikt kan worden om een telprobleem over vrije dagen in een week op te lossen.

Ze komen niet uit de opdracht en zijn beiden noch overtuigd van hun eigen antwoord, noch van het antwoord van de ander. Ze besluiten de vraag even te laten liggen, en te pauzeren. Na de pauze roepen ze de docent erbij.

Roos: Albert, kunt u één ding gewoon even zeggen? (...) Hoe kun je de driehoek van Pascal toepassen, als je twee dagen vrij hebt, dat is hetzelfde principe als van vijf blauwe en twee rode, maar we komen op een ander antwoord uit.

Docent: Dan moet je samen even besluiten welke van die twee het goeie is.

Roos: Maar elk van die twee klopt.

Docent: Dan laat je ze alle twee staan.

Roos: Ja, maar dat kan niet.

Docent: Ja, maar jullie kunnen niet, kun je niet samen besluiten?

Roos: Ja, maar, is het dan goed dat je dit moet doen? Dat je de rij van 7 moet nemen en dat je dan bijvoorbeeld 128 manieren hebt.

Docent: Ik begrijp niet helemaal wat je nu zegt, maar jullie hebben er natuurlijk samen over nagedacht, waarom je dat allemaal.

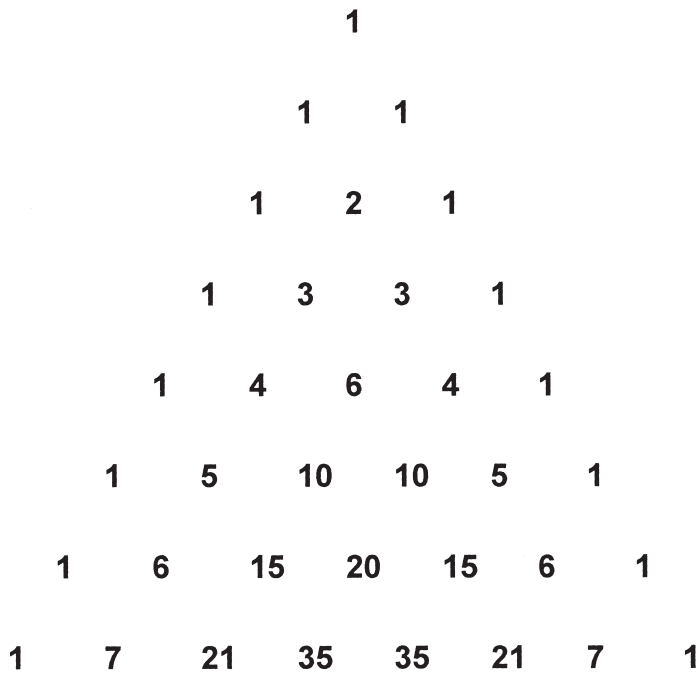
Roos: Dit allemaal bij elkaar.

Docent: O dat, ja, daar gaat het om.

Roos: Ohrrrr (oerkreet) het is zo irritant als iemand niet zegt of het goed is of niet.

Docent: Ja maar, ik ga het dus niet. Ik ga het dus niet lezen, jullie moeten het lezen. Je moet het samen besluiten.

Roos: Ja, we hebben het gelezen, maar het kan.. het is zo vreemd dat er hier een heel ander antwoord uitkomt als daar, terwijl we hier een heel boomdiagram hebben gemaakt



Figuur 4. Het begin van de driehoek van Pascal.

en dat klopt en hier klopt het ook.

Docent: Heb je ook al heel goed nagedacht over wat die getallen betekenen?

Stella: O, het klopt helemaal niet.

Roos: O.

Dan gaat de docent weg. Hij blijft in contact met de leerlingen zonder te vertellen wat het goede antwoord is. Ze kunnen hun twijfels uitspreken en tegelijk blijft er het vertrouwen dat ze de vraag zelf kunnen oplossen. Het is ook duidelijk dat deze leerlingen blijven doordenken en zich niet (meer) fixeren op de hint van de docent. De docent is nu goed in zijn rol gekomen. Hij ondersteunt de leerlingen wel en tegelijk houdt hij zich afzijdig van de inhoud. Op het moment dat de leerlingen weer op gang zijn gekomen trekt hij zich onmiddellijk terug.

4.6 Derde les, derde gedeelte

De leerlingen komen samen tot een antwoord en worden zich ervan bewust dat ze zelf tot een goed antwoord kunnen komen.

Stella en Roos werken aan een opdracht over het toepassen van de driehoek van Pascal in een telprobleem over het aantal manieren waarop je twee vrije dagen over de week kunt verdelen.

Stella: Het klopt helemaal niet deze, die andere klopt, want kijk...je kan niet wel, wel, wel, wel, wel, wel naar school... je kan niet zeven dagen wel naar school.

Roos: Nee.

Stella: Dus het klopt helemaal niet.

Roos: Dus het is gewoon 21, dus je hebt die driehoek helemaal niet, het kan helemaal niet met die driehoek... of moet je dan deze bij elkaar, even kijken, wat moet je dan wel bij elkaar optellen? Dan moet je dus degenen bij elkaar optellen...

Stella: Nou gewoon, vijf dagen wel, twee dagen niet, zo kan je het allemaal doen, dan kom je altijd uit op 21 dagen. Wel niet wel wel niet wel. Zo gaat, je komt altijd... ok.

Roos: En hoe gaan we dat formuleren?

Stella: Dat formuleren wij gewoon niet. Ehm...

Roos: Elke keer als wij iets aan hem vragen, dan hebben we daarna zoiets van 'oh ja', vet dom, we gaan hem niets meer vragen, ze komen er toch wel zelf achter.

Stella legt het antwoord van Roos uit en reconstrueert hiermee haar eigen antwoord. Ze puzzelen verder en Roos wordt zich ervan

bewust dat ze verder gekomen zijn door zelf na te denken. Even later informeert de docent: “Nou, is er een euro gevallen?” “Ja, wel twee”, zegt Stella. Dit is een keerpunt in hun leerproces. Ze worden zich ervan bewust dat door zelf na te denken en een probleem nog eens van een andere kant te bekijken, ze tot een oplossing kunnen komen.

4.7 Derde les, vierde gedeelte

De leerlingen discussiëren intensief over hun verschillende antwoorden en de docent houdt contact met hen.

Stella en Roos gaan verder met opdracht 13 waarin het oplossen van telproblemen met behulp van een rooster of de driehoek van Pascal wordt toegepast. Hun werk is verschillend en er ontstaat een discussie. Stella heeft het conceptuele niveau bereikt en Roos maakt een begin met niveauperhoging voor het onderwerp rooster als model.

De docent komt langs “Zijn jullie weer helemaal op gang gekomen?” “Ja”, antwoorden ze. De docent houdt contact met de leerlingen, ook nu ze niet om zijn hulp vragen.

4.8 Vierde les

De leerlingen zijn zelfstandig aan het werk, maar kunnen nog wel wat proceshulp gebruiken.

In deze laatste les zijn de leerlingen zelfstandig aan het werk. Ze werken aan een aantal opdrachten met de computer rond een nieuw deelonderwerp. Ze zijn actief aan de slag, leggen verbindingen met dat wat ze eerder geleerd hebben. Ze zijn kritisch op hun eigen werk en dat van elkaar. De docent wordt niet meer om hulp gevraagd. Wanneer ze op moeilijkheden of onduidelijkheden stuiten, worden ze wat nonchalant. Daar waar ze in de eerste lessen om opheldering van de docent hadden gevraagd, laten ze dat nu achterwege. Hiermee missen ze een keer een cruciaal deelantwoord en daarmee een onderdeel van de theorie. Leerlingen missen het kritisch zijn op elkaars inbreng. Wat dat betreft kunnen ze nog wel wat proceshulp gebruiken.

4.9 Samenvatting van de bevindingen

Als we de lessen overzien dan zien we dat in de eerste lessen de voorbereidingen voor het leren worden getroffen. Veel activiteiten en

experimenten worden geïnitieerd waar later op gerefleeteerd kan worden. Verder wordt de rol van de docent verkend. Zowel voor de leerlingen als voor de docent is het wennen dat er geen wiskundige hulp door de docent wordt geboden. In de tweede les vindt er een verdieping van activiteiten plaats en de docent heeft een bescheiden rol op de achtergrond. In de derde les komt het ‘moeilijk leren’ aan de orde. De leerlingen zetten alles op alles om de docent te laten uitleggen hoe het zit. Deze blijft keer op keer de vraag aan de leerlingen terugspelen en hij steunt hen bij het zelf puzzelen naar het antwoord. De leerlingen komen ook daadwerkelijk een stap verder. Op een gegeven moment beseffen ze dit en besluiten ze te varen op hun eigen en elkaars ideeën. Ze hebben iets geleerd: om zelf meer en beter na te denken. Hierbij zijn ze kritisch, op zichzelf en de ander. In de vierde les werken ze verder aan opdrachten rond een nieuw deelonderwerp en ze zijn minder kritisch.

5 Discussie en aanbevelingen

In een onderwijskundig experiment in havo-4 bij wiskunde A, waarin leerlingen samenwerkten aan wiskunde opdrachten met de computer en van de docent minder uitleg kregen dan ze gewend waren, gaven twee leerlingen aan dat ze geleerd hadden om meer en beter na te denken. Deze leerlingen waren niet representatief voor de hele groep leerlingen, maar zij lieten een verandering in werkhouding zien die we essentieel achten voor het leren van wiskunde en indicatief voor waar de andere leerlingen moeite mee hadden. We hebben met dit artikel laten zien hoe dat is gegaan. De resultaten hoeven niet specifiek te zijn voor wiskunde. Het gaat om leren door doen, leren door het worstelen met problemen, moeilijk en moeizaam leren.

Na een soepele start waarin de leerlingen het lesmateriaal en de nieuwe rol van de docent verkenden, liepen ze tegen een aantal inhoudelijke moeilijkheden in de opdrachten aan. Hierdoor voelden ze zich meer afhankelijk van de uitleg van de docent en het was voor hen zeer frustrerend dat ze die niet kregen. Voor de docent was het ook lastig om de

leerlingen te laten worstelen met de leerstof op een moment dat ze zelf geen nieuwe ideeën meer leken te hebben. Docent en leerlingen hielden vol en op een gegeven moment werden de leerlingen zich ervan bewust dat ze zelf verder konden komen zonder hulp van de docent.

Wat maakte nu dat deze twee leerlingen zo ver kwamen? Allereerst valt op dat hun motivatie groot is. Het feit dat ze vriendinnen zijn speelt hierin ongetwijfeld een rol, maar bovendien speelt hun taakgerichtheid een grote rol. Het overgrote deel van wat ze tijdens de lessen tegen elkaar zeggen gaat over de wiskundetaken (ongeveer 20 minuten off-task op alle lessen). Ook als een van beiden op een gegeven moment helemaal genoeg heeft van de opdrachten, gaan ze monter door. Ten slotte blijkt uit het feit dat ze (in het eerste gedeelte van de derde les) de docent via een omweg zover proberen te krijgen om toch een hint te geven, dat ze echt alles op alles zetten om tot het goede antwoord te komen. Hierin lijkt ook het vertrouwen mee te spelen, dat ze wanneer ze blijven doorvragen en de docent hen antwoord geeft, ze tot het goede antwoord kunnen komen.

In hun samenwerking blijven ze in gesprek met elkaar, ze denken veel hardop. Ze voelen zich vrij genoeg om kritisch te zijn op elkaars werk en tegelijk zijn ze kritisch ten aanzien van hun eigen werk. Ze laten hun werk aan elkaar zien, ze geven elkaar uitleg en kritiek, en ze verantwoorden en/of reconstrueren hun werk. Ook zien we dat de leerlingen hun voorkennis inzetten en daarmee de gelegenheid creëren om echt zelf nieuwe kennis op te bouwen. De leerlingen houden hun werktempo in de gaten, laten een opgave even liggen om verder te kunnen en blijven soms juist weer aan een opgave werken om echt tot het goede antwoord te komen. Kortom, deze leerlingen zijn goed in staat hun eigen leerproces te reguleren, ze beschikken over *metacognitieve vaardigheden*. Veenman, Prins en Elshout (2002) hebben aangetoond dat metacognitieve vaardigheden belangrijker zijn dan intelligentie in een complexe leeromgeving waarin leerlingen zelf kennis opbouwen door te experimenteren (inductief leren). Wat de twee leerlingen in het onderhavige onderzoek doen is wat Bereiter

(1985) *bootstrapping* noemde. Hiermee doelde hij op het doorbreken van de *learning paradox*, het dilemma dat je jezelf iets niet kunt leren als je er nog niets van weet.

Dekker, Elshout-Mohr en Wood (2006) lieten in een analyse van een samenwerkend tweetal bij rekenen op de basisschool zien hoe deze leerlingen succesvol hun samenwerkend leren reguleren. Het proces is heel vergelijkbaar met hoe dit tweetal werkt. Verschil is dat bij de leerlingen op de basisschool de docent voortdurend aandacht besteedt aan normen voor de samenwerking en de bespreking van oplossingen, wat op de basisschool waar de docent de hele dag met de leerlingen optrekt misschien beter te realiseren is dan in de wiskundeles in het voortgezet onderwijs (zie ook Gravemeijer, 1995).

Wat is de rol van de docent in dit geheel geweest? Waar de leerlingen tegenaan lopen is dat ze eraan gewend zijn om de hulp van de docent in te roepen op het moment dat het lastig wordt. De discussie blijkt vooral op te bloeien op het moment dat het werk van de leerlingen verschillend is. Meestal betekent dit dat er sprake is van niveauverschil en de een het probleem op perceptueel niveau benadert en de ander op conceptueel niveau. Lastig wordt het als ze beiden de vraag op perceptueel niveau benaderen en niet in staat zijn tot reflectie. Bij dit tweetal komt dat niet veel voor en als het voorkomt, dan schakelen ze de hulp van de docent in. Het is voor de leerlingen echt wennen wanneer de docent hen dan inhoudelijk niet helpt, en hen verder laat puzzelen. Ze merken dat niet alle opdrachten even snel gaan. Verder is het nieuw voor ze dat niemand hen zegt of het goed of fout is wat ze doen. Het feit dat de docent wel met de leerlingen in contact bleef, ondanks dat hij hen inhoudelijk niet hielp, is heel belangrijk geweest.

Steun van een expert is cruciaal voor lerenden. Wanneer een wiskundedocent de leerlingen laat weten dat ze goed aan het werk zijn en het zelf kunnen, kan dat leerlingen stimuleren om met de wiskundeopdrachten verder te gaan. Immers, de leerlingen weten dat de docent de kennis bezit die zij willen vergaren, en hij weet ook hoe ze die kennis kunnen vergaren. Wanneer de docent de leerlingen aanmoedigt om door te

gaan zoals ze bezig zijn, zegt hij hen in wezen ook welke werkhouding goed is, in dit geval zelf verder puzzelen en bouwen op eigen ideeën. Hiermee stimuleert hij hen om zelfstandig verder te gaan. Tegelijk kan het zo zijn geweest, dat de paar kleine wiskundige hintjes die de docent in dit geval per ongeluk heeft gegeven, de leerlingen net dat zetje hebben gegeven dat ze nodig hadden om verder te komen. Bij het werken in tweetallen kunnen de ideeën eerder uitgeput zijn dan in kleine groepen van drie of vier leerlingen. Het feit dat deze wiskundige hulp zo terloops werd gegeven en het eigen denkwerk van de leerlingen zo werd benadrukt, zou wel eens een gulden greep kunnen zijn geweest, die de leerlingen bewust heeft gemaakt van hun eigen kunnen. Dat de leerlingen niet meer om hulp vroegen (en nonchalant werden) in de laatste les, had opgevangen kunnen worden als de docent klassikaal nog eens zijn verwachtingen duidelijk zou hebben uitgesproken en de leerlingen zou hebben aangemoedigd om kritisch te zijn op elkaar.

De vraag is nog waarom bij de andere leerlingen in het beschreven onderzoek geen verandering in werkhouding is opgetreden. Allereerst zagen we dat bij veel leerlingen de gerichtheid op dieper begrip ontbrak. Daarnaast gaven de meeste leerlingen in de groep het snel op wanneer ze het gevoel hadden dat ze vastliepen, ze lieten minder taakpersistentie zien dan het beschreven tweetal. Opmerkelijk was ook het feit dat veel leerlingen in deze havo-4 groep zichzelf niet zagen als wiskundige probleemoplossers, zoals ze regelmatig lieten blijken uit hun opmerkingen. Hun motivatie om door te blijven gaan wanneer het echt moeilijk werd ontbrak dus ook. Stella en Roos zagen zichzelf ook niet als wiskundigen, maar vertoonden wel het gedrag van wiskundige probleemoplossers. De andere leerlingen legden zich er snel bij neer dat ze iets niet snapten. Dan verwachtten ze van de docent uitleg en omdat die niet kwam gooiden ze het bijltje erbij neer. De proceshulp werkte bij deze leerlingen dus niet zo goed als bij de vwo-leerlingen (wiskunde B) in het onderzoek van Dekker en Elshout-Mohr. Die leerlingen vroegen minder hulp aan de docent, ze konden beter zelfstandig aan de opdrachten werken. Mogelijk had dit

te maken met het feit dat ze in drietallen werkten, en zo meer steun en inbreng van elkaar hadden. Bovendien beschikten ze als wiskunde B-leerlingen uit vwo-5 over meer wiskundige kennis dan wiskunde A-leerlingen uit havo-4. Het lesmateriaal was op een aantal punten moeilijk voor de leerlingen. We hebben echter wel niveauverhoging gemeten op de natoets en dat is strenger dan een regulier proefwerk, waarin leerlingen ook de gelegenheid krijgen om andere vaardigheden te tonen. Ook het aantal lessen was misschien niet groot genoeg om docent en leerlingen te laten wennen aan proceshulp. Het gaat immers om het veranderen van sociale en wiskundige normen in de klas en het veranderen daarvan kost tijd (zie Hoek et al., in druk)

Het blijft de vraag of proceshulp wel de geschikte hulp is voor deze leerlingen. Mogelijk leidt ander docentgedrag meer tot wiskundige discussies en niveauverhoging bij wiskunde. In dit onderzoek hebben we bewust proceshulp en producthulp gescheiden. Producthulp sloot aan bij de gangbare hulp in de wiskundelessen. Met proceshulp wilden we leerlingen zoveel mogelijk uitdagen om zelfstandig en met elkaar wiskundige ideeën op te bouwen. Het helemaal achterwege laten van inhoudelijke hulp van de docent was bedoeld om te voorkomen dat leerlingen zouden wachten op de momenten in de les waarop uitleg zou komen. Deze twee typen hulp waren geformuleerd in een onderwijskundig experiment. In de dagelijkse praktijk van de wiskundeles wordt er veel producthulp gegeven. Zelfs wanneer leerlingen in tweetallen werken wanneer zij om hulp vragen richt de docent zich vaak op een van de leerlingen in plaats van op de interactie tussen de leerlingen. Blijkbaar hebben docenten tijd nodig om 'af te leren' onmiddellijk een hint te geven wanneer leerlingen daarom vragen en aan te leren om leerlingen met elkaar hun wiskundige ideeën uit te laten wisselen.

Het is een wijdverbreid fenomeen: als leren moeilijk wordt willen mensen uitleg van een expert, en juist in dat soort situaties is het van belang dat leerlingen zelf de motivatie hebben en over de metacognitieve vaardigheden beschikken. Om leerlingen die metacognitieve vaardigheden te laten verwer-

ven, kan het (tijdelijk) achterwege laten van inhoudelijke steun helpen. Docenten kunnen hierbij rekenen op weerstand van leerlingen, en op de geneigdheid om uitleg en inhoudelijke hulp te geven door henzelf. Hierbij is het van belang te zoeken naar een situatie waarin de leerlingen flink kunnen worstelen en tegelijk genoeg voeding hebben en aanmoediging om verder te kunnen.

Noten

- 1 De studie *Onderzoekend wiskunde leren met de computer* werd gesubsidieerd door NWO onder projectnummer 575-36-003A.
- 2 De metacognitieve instructie die gebruikt werd was de IMPROVE methode, bestaand uit vier soorten metacognitieve vragen die leerlingen zichzelf dienden te stellen, zoals begripsvragen (Wat is het probleem?) verbindingsvragen (In hoeverre is dit probleem verschillend van/hetzelfde aan wat je al opgelost hebt?) strategievragen (Wat voor methodes kunnen worden gebruikt om deze vraag op te lossen? Waarom is deze methode geschikt om dit probleem op te lossen? Hoe kan ik de informatie organiseren om het probleem op te lossen?) en reflectieve vragen (Wat ben ik aan het doen? Is het zinnig wat ik aan het doen ben?)

Literatuur

- Bereiter, C. (1985). Toward a solution of the learning paradox. *Review of Educational Research*, 55, 201-226.
- Brodie, K. (2001). Teacher intervention in small-group work. *For the Learning of Mathematics*, 20 (1), 9-16.
- Dekker (1991). *Wiskunde leren in kleine heterogene groepen*. De Lier: Academisch Boeken Centrum.
- Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (1996). Zelfstandig leren doe je niet alleen. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het rekenwiskundeonderwijs*, 15 (2), 20-27.
- Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (1998). A process model for interaction and mathematical level raising. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 303-314.
- Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (2004). Teacher interventions aimed at mathematical level raising during collaborative learning. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 39-56.
- Dekker, R., Elshout-Mohr, M., & Wood, T. (2006). How children regulate their own collaborative learning. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 57-79.
- Gravemeijer, K. (1995). Het belang van social norms en socio-math norms voor realistisch reken-wiskundeonderwijs. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 14 (2), 17-23.
- Hiele, P. M. van. (1986). *Structure and Insight*. Orlando: Academic Press.
- Hoek, D. (1998). *Social and cognitive strategies in co-operative groups. Effect of strategy instruction in secondary mathematics*. Proefschrift. Universiteit van Amsterdam: Instituut voor de Lerarenopleiding.
- Hoek, D., & Seegers, G. (2005). Effects of instruction on verbal interactions during collaborative problem solving. *Learning Environments Research*, 8, 19-39.
- Hoek, D., Seegers, G., Gravemeijer, K., & Figueiredo, N. (submitted). *Design research on establishing a learning ecology for the use of a graphic calculator during collaborative work*.
- Kramarski, B., Mevarech, Z.R., & Arami, M. (2002). The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 225-250.
- Linden, J. van der, & Renshaw, P. (Eds.) (2004). *Dialogic Learning*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Marzi, V. (2003). *Cooperative learning and theoretical thinking: An experimental study in primary school*. Paper presented at the tenth European Conference for Research on Learning and Instruction, Padova, Italy.
- Pijls, M., Dekker, R., & Van Hout-Wolters, B. (2000). Wiskunde leren met de computer: een onderzoeksoopdracht onderzocht. *Tijdschrift voor Didactiek der β -wetenschappen*, 17 (1), 31-44.
- Pijls, M., Dekker, R., & Van Hout-Wolters, B. (2003). Mathematical level raising through collaborative investigations with the computer. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 8 (2), 191-213.

Pijls, M., Dekker, R., & Van Hout-Wolters, B. (in druk). Teacher Help for Collaborative Mathematical Level Raising. *Learning Environments Research*.

Project Invoering Nieuwe Technologieën (1998). *Verslagen van de bijeenkomsten met docenten*. Universiteit Utrecht: Freudenthal Instituut.

Praktische Opdrachten en Nieuwe Technologieën (1999). *Verslagen van de bijeenkomsten met docenten*. Universiteit Utrecht: Freudenthal Instituut.

Rijborz, D. (2003). *Leren onderzoeken. Leerlijnen bij praktische opdrachten in de tweede fase in het profiel 'Economie & Maatschappij'*. Proefschrift. Vrije Universiteit Amsterdam.

Veenhoven, J. (2004). *Begeleiden en beoordelen van leerlingonderzoek. Een interventiestudie naar het leren ontwerpen van onderzoek in de tweede fase bij aardrijkskunde*. Proefschrift, Utrecht: Universiteit Utrecht.

Veenman, M. V. J., Prins, F. J., & Elshout, J. J. (2002). Initial learning in a complex computer simulated environment: The role of metacognitive skills and intellectual ability. *Computers in Human Behavior*, 18, 327-342.

Wood, T. (2001). Teaching Differently: Creating Opportunities for Learning Mathematics. *Theory into Practice*, 40 (2), 110-117.

Wubbels, Th. (2006). Discussie: Het Nieuwe Leren. *Pedagogische Studiën* 83, 74-99.

Manuscript aanvaard: 20 juli 2007.

Auteurs

Monique Pijls is onderzoeker en junior vakdidacticus aan het Instituut voor de Lerarenopleiding van de Universiteit van Amsterdam.

Rijkje Dekker is senior onderzoeker aan het Instituut voor de Lerarenopleiding van de Universiteit van Amsterdam.

Bernadette van Hout-Wolters is hoogleraar onderwijskunde en wetenschappelijk directeur van het Instituut voor de Lerarenopleiding van de Universiteit van Amsterdam.

Marcel Veenman is universitair docent bij de Sectie Ontwikkelings- en onderwijspsychologie van de Universiteit Leiden en senior onderzoeker aan het Instituut voor de Lerarenopleiding van de Universiteit van Amsterdam.

Correspondentieadres: Monique Pijls, Instituut voor de Lerarenopleiding, Universiteit van Amsterdam, Spinozastraat 55, 1018 HJ Amsterdam. E-mail: m.h.j.pijls@uva.nl.

Abstract

Collaborative computer-supported mathematics learning and the role of the teacher in senior general secondary education

We investigated the role of the teacher in a senior general secondary education Mathematics A course as part of the project on collaborative mathematics discovery learning using the computer. The students (aged 16) in one of the two conditions were supported only on their interactions (process assistance) and the teacher provided no technical (mathematical) help. Students had considerable difficulty with this way of working and expected the teacher to provide more explanation. However, two students also said that they learned 'to think things through more deeply and thoroughly for themselves'. This article illustrates how these two students gained this insight through the process assistance that was provided. The results were obtained by analysing audio recordings of the students and their written exercises. Both the students and the teacher appeared to find the process difficult. Important aspects of the success were the students' motivation and attitude to work.