

# Wiskundeonderwijs met computeractiviteiten vraagt constructieruimte voor leerlingen<sup>1</sup>

L. M. Doorman

## Samenvatting

In dit artikel beschrijven we een onderzoek naar het gebruik van de computer bij het leren van wiskunde volgens een benadering van geleid heruitvinden. Twee ontwerpheuristieken lijken geschikt om een onderwijsbenadering te realiseren die voortbouwt op intuïtieve redeneringen van leerlingen. De heuristiek van *emergent* modelleren ondersteunt het plannen van een leertraject van situatiegebonden modellen naar modellen voor wiskundige redeneringen. De heuristiek van de probleemstellende benadering ondersteunt de docent bij het oproepen van inhoudelijke motieven voor de opeenvolgende activiteiten. Tijdens ontwikkelingsonderzoek in twee vierde klassen merkten we een spanning tussen het beoogde leerproces van geleid heruitvinden en het presenteren van wiskundige representaties met de computer. We beargumenteren dat opgaven met constructieruimte nodig zijn om klassengesprekken rond de computeractiviteiten te ondersteunen. Die klassengesprekken zijn van belang om de mogelijkheden van de software aan te laten sluiten bij de redeneringen van de leerlingen en om achteraf klassikale consensus te bereiken over het geleerde. Door middel van de opgaven met constructieruimte bleek het mogelijk om de gesprekken te baseren op een productieve inbreng van de leerlingen. Na een tweede ronde van experimenteren concludeerden we dat we met de twee ontwerpheuristieken en de geplande klassengesprekken de beoogde onderwijsresultaten konden realiseren.

## 1 Inleiding

In dit artikel presenteren we resultaten van een ontwikkelingsonderzoek rond het gebruik van computeractiviteiten bij het leren van wiskunde. De resultaten zijn onderdeel van een promotieonderzoek (Doorman, 2005)<sup>1</sup>

dat zich richtte op het leren van differentiaalrekening (de wiskunde van verandering) en op kinematica (de natuurkunde van de samenhang tussen snelheid en afgeleide weg). Leerlingen blijken het leren van deze onderwerpen te ervaren als het leren van instrumentele vaardigheden. Ze verbinden hun schoolkennis niet met hun dagelijkse redeneringen over verandering en beweging. Bovendien blijkt dat grafieken in het onderwijs een centrale rol hebben, terwijl deze voor leerlingen niet voldoende transparant zijn om inzicht in betekenis en vorm van de formules te ondersteunen (e.g., McDermott, Rosenquist & Van Zee, 1987).

We gaan hier in op een alternatieve en geïntegreerde benadering voor het leren en onderwijzen van de differentiaalrekening en kinematica. Daarbij maken we gebruik van kennis over symboliseren om te begrijpen hoe leerlingen grafieken interpreteren en hoe ze een samengestelde grootte (snelheid  $v = s/t$ ) met bijbehorende symbolen kunnen construeren. Begrippen en externe representaties ontwikkelen zich namelijk in samenwerking met elkaar (Meira, 1995; Roth & McGinn, 1998). Het ondersteunen en begeleiden van leerlingen bij dergelijke constructieprocessen is precies wat wordt beoogd met realistisch wiskundeonderwijs; een onderwijsbenadering waarbij het geleid heruitvinden van de wiskunde door leerlingen centraal staat (Freudenthal, 1991). In het aandachtsgebied *Wiskunde en ICT*, waarvan dit onderzoek een onderdeel vormt, is de spanning tussen het ondersteunen van leerlingen bij het construeren van wiskunde en het aanbieden van formele representaties in computerprogramma's dan ook een centraal thema.

Het theoretisch kader, dat in de volgende paragraaf beschreven wordt, geeft in de eerste plaats aanleiding tot het creëren van een onderwijssituatie waarin leerlingen representaties ontwikkelen waarvan de betekenis voortbouwt op het voorgaande en die voorbe-

reiden op beoogde begrippen. Voor het creëren van zo'n onderwijssituatie zijn verscheidene ontwerpheuristieken ontwikkeld. Twee heuristieken zijn in het bijzonder van nut in het licht van het theoretische kader: het gebruik van *emergent* modelleren (Gravemeijer, 2004) en de probleemstellende benadering (Klaassen, 1995). We onderzochten in hoeverre we empirische ondersteuning konden vinden voor het gebruik van deze heuristieken in het geplande leerproces.

In het bijzonder onderzoeken we de rol van computeractiviteiten in een benadering van geleid heruitvinden. De veronderstelling was dat de inzet van de computer leerlingen kan ondersteunen bij het vormen van hypothesen en het generaliseren over veel situaties als ze in tweetallen aan een serie problemen werken. We merkten echter tijdens het eerste experiment dat een grote diversiteit tussen leerlingen ontstond in tempo en kwaliteit. Uit de analyse concludeerden we dat een oorzaak voor deze diversiteit was dat een aantal mogelijkheden van de software niet aansloot bij de voorkennis van de leerlingen. Daarnaast viel op dat in het vervolg op de computerlessen reflectieve activiteiten ontbraken om klassikale consensus te bereiken over de opbrengst van het werk achter de computer. Deze ervaringen in het eerste experiment waren aanleiding om te zoeken naar karakteristieken van de leeromgeving die een betere inbedding van de computeractiviteiten ondersteunen. Bij het tweede experiment zijn daarom opgaven ontwikkeld met veel constructieruimte voor de leerlingen. Deze activiteiten hadden als doel de leerlingen aan de hand van hun bijdragen voor te bereiden op het computerpracticum en om achteraf een reflectieve bespreking te ondersteunen. Deze aanpassingen, inclusief de aanwijzingen voor de docent, bleken te zorgen voor een betere afstemming van de redeneringen van de leerlingen op de mogelijkheden van de software. Dit had tot gevolg dat ze tijdens de computeractiviteiten diepere inzichten verwierven in het gebruik van grafieken.

Aan het eind van dit artikel worden in de discussie de implicaties van deze resultaten voor wiskundeonderwijs met computeractiviteiten besproken.

## 2 Theoretisch kader

Dit onderzoek richt zich op een alternatieve benadering voor het leren en onderwijzen van differentiaalrekening en kinematica. Met die benadering willen we een oplossing bieden voor de problemen rond het leren van deze onderwerpen en rond de rol van grafieken in het onderwijs. Beide onderwerpen worden in de huidige praktijk los van elkaar onderwezen: differentiaalrekening bij wiskunde en kinematica bij natuurkunde, terwijl ze historisch en inhoudelijk veel met elkaar te maken hebben. Het blijkt dat leerlingen door dit gescheiden aanbod en door verschillend gebruik van notaties bij beide vakken vaak de samenhang niet zien. Bovendien blijkt het geleerde meestal los te staan van dagelijkse redeneringen van leerlingen over beweging, verandering, snelheid en afgelegde weg (Doorman, 2000; Kaput, 1994). De Tweede Fase, waarbij leerlingen niet meer volledig vrij zijn in het samenstellen van een pakket eindexamenvakken, maakt het mogelijk te werken aan afstemming tussen verplichte vakken in een gekozen profiel.

Traditioneel spelen grafieken een centrale rol in het onderwijs van kinematica en differentiaalrekening. Met het aanbieden van snelheid-tijd- en afstand-tijdgrafieken lijken de basisbegrippen en methoden van deze onderwerpen eenvoudig te illustreren. McDermott e.a. (1987) en Clement (1985) hebben echter uitgebreide studies gedaan naar problemen van leerlingen bij het interpreteren van dergelijke grafieken. Clement onderscheidde hierbij twee aspecten: (1) leerlingen verbinden de globale vorm van de grafiek met visuele karakteristieken van de probleemsituatie (bijvoorbeeld een bolling in een grafiek staat voor een fietser die over een heuvel gaat) en (2) leerlingen verbinden lokale kenmerken van de probleemsituatie met vergelijkbare kenmerken van de grafiek (bijvoorbeeld een snijpunt in een snelheid-tijdgrafiek staat voor het moment van inhalen). Deze 'kaartachtigheid' van grafieken wordt niet alleen veroorzaakt door de vorm van de grafiek, maar ook door de taal waarmee we over grafieken praten (Dekker, 1991; Goddijn, 1978). We gebruiken daarbij regelmatig concrete meetkundige termen (zoals snijden,

helling, omhoog, omlaag, stijgen en oppervlakte) die verwarring met concrete situaties kunnen veroorzaken.

Het blijkt dat grafieken met specifieke conventies, bijvoorbeeld ten aanzien van de variabelen bij de assen, een specifiek symbolisch systeem vormen waarmee leerlingen nog niet volledig vertrouwd zijn en waarvan ze de consequenties niet overzien (Gilbert & Boulter, 1998). Volgens Gilbert & Boulter is een benadering van het onderwijs met behulp van zogenaamde expertmodellen een benadering die laat zien hoe een consensusmodel werkt zonder dat leerlingen het proces van het tot consensus komen hebben doorgemaakt. Ze zullen in dergelijke omstandigheden het doel en de beperkingen onvoldoende kunnen beoordelen. Deze benadering is te contrasteren met een benadering waar niet de wetenschappelijke kennis, maar de eigen informele kennis van de leerling als beginpunt wordt gekozen. Een mogelijk intuïtief en productief beginpunt is het redeneren met intervallen tussen achtereenvolgende posities (Boyd & Rubin, 1996).

Een benadering vanuit intuïtieve redeneringen van leerlingen sluit aan bij het beginsel van realistisch wiskundeonderwijs. Het centrale idee van realistisch wiskundeonderwijs is dat je leerlingen de gelegenheid biedt de wiskundige kennis die ze opbouwen te zien als een uitbreiding van hun eigen kennis en niet als een geïsoleerd kennisbestand. Dit gebeurt aan de hand van contextuele probleemsituaties die leerlingen herkennen als relevant en waarmee ze een begin kunnen maken. De problemen zijn bovendien zo gekozen dat de strategieën en oplossingen waarmee leerlingen komen, aanknopingspunten bieden voor het vervolg. Freudenthal karakteriseert dit als een proces van progressief mathematiseren (Freudenthal, 1991).

Het realiseren van realistisch rekenwiskundeonderwijs vraagt inzicht in de manier waarop leerlingen probleemsituaties zullen modelleren. Het betreft hier situaties waarbij het voor leerlingen niet direct duidelijk is met welke modellen het probleem is op te lossen. Ze zijn gedwongen om zelf veronderstelde patronen of structuren in de situatie met mogelijke schematiseringen te modelleren. Hierbij zijn theorieën over symboliseren –

met individuele en sociale aspecten – behulpzaam (Gravemeijer, Lehrer, Van Oers & Verschaffel et al., 2002). Die theorieën benadrukken een dialectisch en geleidelijk proces waarin zich betekenissen en inscripties (externe representaties) ontwikkelen (Meira, 1995; Roth & McGinn, 1998). Hieruit concluderen we dat het niet verstandig is om wiskundige symbolen in hun uiteindelijke vorm te presenteren, met als taak voor de leerlingen betekenis en werkwijze te ontdekken. In tegenstelling tot zo'n benadering proberen we leerlingen te betrekken in het constructieproces van wiskundige symboliseren (tekeningen en redeneringen), zodat ze vorm en betekenis in samenhang ontwikkelen en achteraf die betekenis zelf ook weer kunnen traceren met behulp van hun eigen leerproces.

De computer kan leerlingen in staat stellen om veel gevallen te onderzoeken doordat tijdovende procedures worden uitbesteed. Het is gereedschap dat leerlingen kan ondersteunen bij het analyseren van meerdere probleemsituaties en waarmee ze generieke kenmerken en redeneringen kunnen vinden. Met betrekking tot computergebruik benadrukken Doerr (1997) en Gilbert en Boulter (1998) een rol voor het expliciteren van verbanden door leerlingen. Hier zit echter ook een spanning tussen het ondersteunen van constructieve activiteiten en het aanbieden van representaties die van tevoren geconstrueerd zijn door anderen. De uitdaging is dan om het onderwijs zo vorm te geven dat de representaties van de computer aansluiten bij (of idealiter worden gegenereerd door) de uitwerkingen van leerlingen.

Cobb (1999) en Bakker (2004) analyseerden de rol van computeractiviteiten in een statistiekleergang en illustreerden de constructie van representaties en betekenissen in hun samenhang. De auteurs concludeerden dat leerlingen daarbij de mogelijkheden van het computerprogramma moeten zien als een 'natuurlijk' gereedschap voor het oplossen van gestelde problemen. Ontwerpers van het onderwijsmateriaal moeten daarom van tevoren rekening houden met mogelijke redeneringen en uitwerkingen van leerlingen tijdens die activiteiten. In de vormgeving van het onderwijs moet derhalve een delicate

balans worden gevonden tussen het begeleiden van constructieve activiteiten van leerlingen en reflecties op resultaten van deze activiteiten (Hoyles & Noss, 2003).

Cobb (1999) verwees voor het ontwerpproces van de achtereenvolgende activiteiten in de statistiekleergang naar de ontwerpheuristiek van *emergent modelleren* (Gravemeijer, 1994, 2004). Deze heuristiek heeft als doel leerlingen te ondersteunen tijdens het proces van intuïtieve redeneringen naar formele wiskunde. Tijdens dit proces vindt een belangrijke verschuiving plaats, waarbij informele beschrijvingen van leerlingen eerst een *model van* een specifieke situatie opleveren, terwijl die beschrijvingen later functioneren als *model voor* de ontwikkeling van meer wiskundige structuren en redeneringen. Hierbij verschuift ook de aard van de activiteiten van het oplossen van contextnabije problemen naar efficiëntie en generalisatie van de zich ontwikkelende begrippen en methoden (Gravemeijer, 1994; Streefland, 1985). De termen context en activiteit zijn voor de leerlingen in het leerproces hecht met elkaar verbonden (Van Oers, 1998). Het overkoepelende model van de leergang manifesteert zich in een reeks van symbolisering (of submodellen) die op een – voor de leerlingen – natuurlijke manier op elkaar volgen.

In een benadering van *emergent modelleren* is vervolgens de vraag hoe de docent ervoor kan zorgen dat leerlingen greep houden op het geplande leertraject en het nut van de computer als gereedschap zien. Een ontwerpheuristiek die zich met name richt op die vraag is de *probleemstellende benadering*. Deze benadering komt voort uit de natuurkundendidactiek en benadrukt de manier waarop de docent bij leerlingen inhoudelijke motieven kan oproepen om hun ideeën over een probleemsituatie in een bepaalde richting (en met bepaald gereedschap) uit te breiden (Klaassen, 1995; Lijnse, 2002). De heuristiek maakt daarbij onderscheid tussen globale en lokale motieven. Het globale motief biedt de docent een referentiekader voor de achtereenvolgende activiteiten als geheel en de tussentijdse terugblikken. Lokale motieven spelen op het niveau van de overgangen tussen de activiteiten, die afwisselend met en zonder de computer kunnen plaatsvinden. In het ge-

plande leertraject moet de docent weten hoe die motieven samenhangen en hoe ze zijn op te roepen in de klassenpraktijk.

Samenvattend kunnen we stellen dat deze twee ontwerpheuristieken kunnen worden benut voor het realiseren van een leergang met computeractiviteiten die een leerproces ondersteunt van situatiegebonden redeneringen van leerlingen naar de beginnelen van differentiaalrekening en kinematica. De eerste heuristiek van *emergent modelleren* richt zich op het creëren van onderwijs-situaties waarin leerlingen een constructieve inbreng hebben in samenhang met de beoogde symbolisering. De tweede heuristiek van probleemstellend onderwijs richt zich op de rol van de docent bij het vormgeven van het leerproces in de klassenpraktijk ondersteund door samenhangende inhoudelijke vraagstellingen.

In dit artikel bespreken we resultaten van het onderzoek dat oorspronkelijk is opgezet om empirische ondersteuning te vinden voor een bijdrage aan de lokale onderwijstheorie voor de wiskunde van verandering. Het gaat hier om specifieke inzichten betreffende de vormgeving van het wiskundeonderwijs met computeractiviteiten. De vraag die in dit artikel centraal staat, is: *Welke eisen stellen de uitgangspunten van de probleemstellende aanpak en het emergent modelleren aan de vormgeving van onderwijs met computeractiviteiten die worden ingezet om het ontwikkelen van wiskundige concepten te ondersteunen?*

### 3 Methode

Het doel van dit onderzoek is het ontwikkelen van een empirisch gefundeerde rationale achter de vormgeving van het (verbeterde) onderwijs met computeractiviteiten. Die vormgeving van het onderwijs moet echter eerst ontwikkeld worden. Ontwikkelingsonderzoek is een methodologie die zich richt op het realiseren van innovatieve leeromgevingen voor het onderzoeken van onderwijs- en leerprocessen (Gravemeijer & Cobb, in dit nummer; Gravemeijer, 1994; Lijnse, 1995).

Het onderzoek is gestart met een literatuuronderzoek naar problemen met en bena-

deringen van differentiaalrekening en kinematica. Die literatuur heeft inzicht opgeleverd in conceptuele problemen van leerlingen en in mogelijke oplossingen. Een studie van de geïntegreerde historische ontwikkeling van differentiaalrekening en kinematica heeft bovendien bijgedragen aan didactische keuzes (Gravemeijer & Doorman, 1999).

Parallel aan dit literatuuronderzoek is een pilotexperiment uitgevoerd om enkele leerlingactiviteiten te onderzoeken, en om te analyseren wat de mogelijkheden zijn voor de onderwijsexperimenten binnen de huidige schoolorganisatie in de Tweede Fase. Vanwege het onderwerp is gekozen voor experimenten in vwo-4 in de natuurprofielen.

Na de literatuurstudie en de analyse van het pilotexperiment is begonnen aan de ontwerpfase. Deze fase is gestart met het beschrijven van het onderwijsleerproces in een hypothetisch leertraject. Die beschrijving is een uitwerking van het veronderstelde verloop van dit proces, inclusief de argumenten waarop de veronderstellingen gebaseerd zijn en van de lesmaterialen die het proces moeten ondersteunen. Voor de analyse is per les een lijst vragen samengesteld, gerelateerd aan de onderzoeksvragen, met observatiecriteria die verwachtingen over het veronder-

stelde leerproces moeten ondersteunen (zie Tabel 1).

Drie expertontwerpers hebben commentaar gegeven op het uiteindelijke lesmateriaal voor tien lessen. Dat commentaar is verwerkt en het lesmateriaal is nog een keer aan hen voorgelegd om consensus te krijgen over het definitieve ontwerp voor het eerste experiment. Daarbij waren de voornaamste aandachtspunten: uitwerking van de twee ontwerpheuristieken, opbouw van het materiaal, formulering van vragen en keuze van contexten.

Het eerste onderwijsexperiment met dit lesmateriaal vond plaats in twee 4-vwo-klassen op twee verschillende scholen. Het materiaal en de verwachtingen zijn vooraf met de docenten doorgesproken. Bij alle lessen was een observator aanwezig die aantekeningen maakte. Deze aantekeningen werden direct na de lessen uitgewerkt in lesverslagen. Voor zover mogelijk werd het verloop direct na iedere les met de betreffende docent besproken. In een aantal gevallen leidde dit tot bijstellingen van de plannen voor de volgende les. Gravemeijer en Cobb (in dit nummer) noemen dit de microcycli van ontwikkelingsonderzoek. Van klassikale discussies en van een tweetal leerlingen tijdens de computer-

Tabel 1

*Een selectie van observatiecriteria*

Vragen	Observatiecriteria
Passen de intuïtieve redeneringen van de leerlingen bij de beoogde ontwikkeling vanuit spoorgrafieken?	Leerlingen verwijzen bij hun redeneringen over weersvoorspellingen naar de intervallen tussen achtereenvolgende posities. Ze bedenken grafische weergaven om die intervallen zo weer te geven dat patronen te zien zijn en dat daarmee te voorspellen is. De docent kan die weergaven benutten om het gebruik van tweedimensionale grafieken te motiveren voor de hele klas.
Is in de redeneringen van de leerlingen een ontwikkeling te zien van gesitueerd probleemoplossend naar generaliserend over kenmerken van grafieken?	De manier waarop de leerlingen redeneren met de grafieken verandert van situatiegeoriënteerd (verwijzen naar verplaatsingen in de stroboscopische plaatjes) naar een oriëntatie op kenmerken van grafieken en de relatie met achtereenvolgende verplaatsingen.
Zijn de leerlingen zich bewust van een globaal probleem dat wordt opgelost? (De globale probleemstellingen zijn: Hoe beter te voorspellen? Welke natuurkundige en wiskundige inzichten helpen daarbij?) Verschaffen de lokale probleemstellingen inhoudelijke motieven aan de leerlingen om het lesmateriaal in de geplande richting te volgen?	Leerlingen merken op dat meer meetwaarden nodig zijn om preciezer te voorspellen. De docent kan die opmerkingen gebruiken om de overgang te maken van discrete naar continue modellen van beweging. Deze klassendiscussie blijft niet beperkt tot enkele leerlingen, maar de docent is in staat de hele klas hierbij te betrekken.

activiteiten zijn video-opnamen gemaakt. Twee van de tien lessen vonden plaats in het computerlokaal. Met de video-opnamen wilden we onder andere de rol van gebaren vastleggen in samenhang met taal- en veronderstelde ontwikkeling van de beoogde begrippen. Als de leerlingen, meestal in groepjes, zelf aan het werk waren, zijn geluidsoptnamen gemaakt. De selectie van deze groepjes en de gefilmde tweetallen is gedaan met behulp van de docent op basis van twee criteria: duidelijk spreken en representativiteit voor de klas qua niveau. Na afloop van de lessenserie is het leerlingenwerk ingenomen en zijn proefwerkuitwerkingen gekopieerd. Hiermee hadden we voldoende data verzameld om het leerproces van de leerlingen te reconstrueren en om veronderstellingen vanuit verschillende invalshoeken te toetsen.

Het interpretatieve kader voor het analyseren van de data werd bepaald door de keuzen ten aanzien van het lesmateriaal en door de relatie met de observatiecriteria. Het onderzoek is niet direct gericht op een ontwerp 'dat werkt', maar op het begrijpen van de werking en het vinden van verbeteringen om de empirisch ondersteunde rationale achter het verbeterde materiaal te vinden (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003; Edelson, 2002; Gravemeijer, 2004). Tijdens het onderzoek werden aanvankelijke veronderstellingen aangepast en nieuwe geformuleerd. Een kenmerk van ontwikkelingsonderzoek is dan ook dat het zowel een hypothetisch als een reflectief karakter heeft (Cobb et al., 2003). Dit leidt tot een iteratief proces van gedachte-experimenten, uitproberen en herontwerpen.

De data werden georganiseerd in casestudies van klassendiscussies en groepswork. De resultaten zijn vergeleken met de observatiecriteria en gebruikt om te zoeken naar verklarende patronen in het geobserveerde onderwijsleerproces. Interpretaties en opvallende gegevens werden vergeleken met andere beschikbare data.

Uit de analyse van het eerste experiment kwam naar voren dat de voorbereiding op de computerlessen en de bespreking van de computeractiviteiten niet verliepen als beoogd. Een tweede onderwijsexperiment bleek nodig om veronderstellingen over ver-

betering van de inbedding van de computeractiviteiten te onderzoeken. Gravemeijer en Cobb (in dit nummer) spreken in zo'n geval over een macrocyclus van ontwikkelingsonderzoek. Dit tweede experiment vond op één school plaats, en data werden op een vergelijkbare manier verzameld als bij het voorgaande experiment. Het voornaamste verschil is dat tijdens de computeractiviteiten opnamen zijn gemaakt van drie tweetallen.

De validiteit van deze methodologie vraagt van de onderzoeker een navolgbare argumentatie voor de gemaakte keuzes, planning van de dataverzameling en de rapportage en analyse van de experimenten. In dit artikel is ervoor gekozen één specifiek aspect van het hele onderzoek te bespreken: het onderzoek naar de vormgeving van het onderwijs rond de computeractiviteiten. Daarmee beperken we ons ook in de beschrijving van het geobserveerde onderwijsleerproces. Voor een volledige beschrijving van de experimenten zie het verslag van het promotieonderzoek (Doorman, 2005).

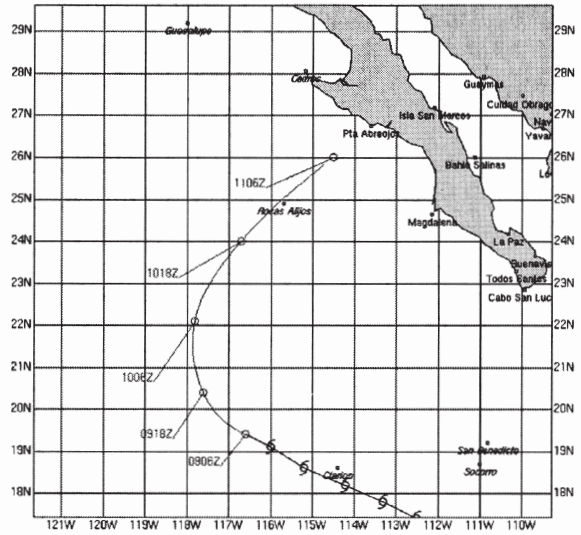
## 4 De leergang

Het begin van het experiment is bedoeld om het globale idee van 'het beschrijven van beweging om te kunnen voorspellen' bij leerlingen tot leven te wekken. Weersvoorspellingen zijn gebruikt als introductie op volgende activiteiten volgens de probleemstellende benadering. De activiteiten binnen deze context zijn bedoeld om redeneringen met patronen in achtereenvolgende posities uit te lokken. We veronderstellen dat leerlingen zelf grafische voorstellingen zullen maken om greep te krijgen op deze patronen voor het berekenen van voorspellingen.

In eerste instantie krijgen de leerlingen een aantal satellietfoto's met wolken te zien. De foto's zijn op verschillende tijdstippen gemaakt. We veronderstellen dat leerlingen gaan redeneren met verplaatsingen tussen achtereenvolgende posities en dat ze die posities vastleggen op een kaart om te kunnen voorspellen. Als consensus is bereikt over het nut van zogenaamde spoorgrafieken voor het beschrijven van beweging, krijgen ze een aantal stroboscopische plaatjes waarbij de

beweging op die manier is vastgelegd (zie Figuur 1). Deze activiteiten stimuleren leerlingen in het gebruik van patronen in verplaatsingen en beschrijvingswijzen waarmee die patronen beter te zien zijn en waarmee beter te voorspellen is. Ze maken het mogelijk een inhoudelijk motief op te roepen voor het gebruik van tweedimensionale grafieken.

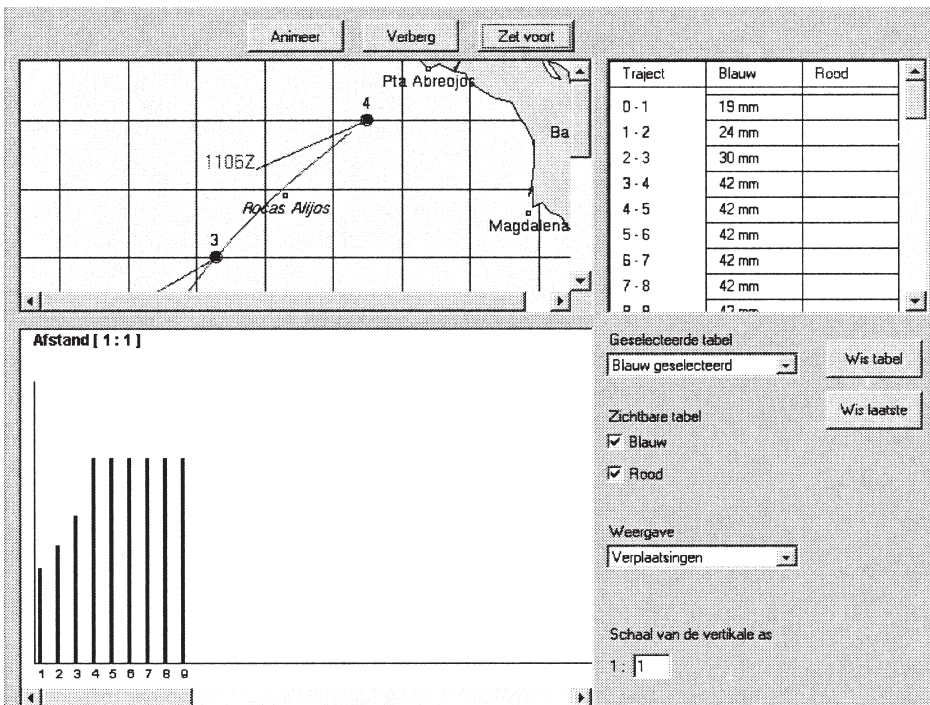
De uitwerkingen van de leerlingen bij deze activiteiten moeten de docent de gelegenheid geven in een klassikale bespreking consensus te bereiken over het nut van tweedimensionale grafieken. In die grafieken zijn staafjes die de achtereenvolgende verplaatsingen representeren, verticaal naast elkaar geplaatst. Daarmee zijn patronen in de toename en afname direct te zien. De consensus over het gebruik van deze grafieken is nodig voor de computeractiviteiten waarbij leerlingen een aantal verschillende situaties gaan onderzoeken. De mogelijkheden van de computer ondersteunen de leerlingen in het analyseren van meerdere situaties. Leerlingen kunnen hypothesen vormen en toetsen, en ontwikkelen hierbij inzicht in kenmerken van patronen en in de relatie met (discrete) grafieken. Deze inzichten ondersteunen later



Figuur 1. Wanneer en waar zal de orkaan de kust treffen?

weer redeneringen met continue snelheid-tijd- en afstand-tijdgrafieken en met grafische kenmerken als helling en raaklijn.

Via de computer krijgen leerlingen stroboscopische plaatjes te zien met vragen over de gerepresenteerde beweging. Leerlingen kunnen achtereenvolgende posities van een



Figuur 2. De orkaan in de computer en de laatste verplaatsing voortgezet.

beweging vastleggen door erop te klikken en kunnen zo grafieken maken van verplaatsingen en van de totale afgelegde weg. Deze grafieken worden opgebouwd met behulp van de intervallen tussen de achtereenvolgende posities. Bovendien kunnen ze de computer de laatste verplaatsing voort laten zetten, waarbij ze de gevolgen van die voortzetting kunnen zien in de grafieken. Op het beeldscherm staan dan zowel de stroboscopische plaatjes als de tweedimensionale grafieken (zie Figuur 2). We veronderstellen dat de software de leerlingen ondersteunt bij het organiseren van beweging met grafieken, bij het vinden van kenmerken en patronen in het gebruik van die grafieken en uiteindelijk bij het ontwikkelen van de beoogde wiskundige en natuurkundige inzichten.

Deze opbouw verschilt van een benadering waarbij het primaire doel is leerlingen de betekenis van gepresenteerde representaties te laten ontdekken. Die ontdekbenadering wordt onder andere gezien als oplossing voor het zogenaamde eilandprobleem (Kaput, 1994). Het uitgangspunt van deze ontdekbenadering is dat de wiskundige beschrijvingswijzen van beweging zich bevinden op het eiland van de wetenschappelijke kennis. De oplossing voor dit probleem wordt vervolgens gezocht in het creëren van een verbinding tussen de wiskundige modellen en alledaagse ervaringen met behulp van computerprogramma's waarbij die modellen gekoppeld zijn aan simulaties rond beweging. Leerlingen kunnen de modellen onderzoeken door de aard van die dynamische koppelingen te exploreren met hun alledaagse kennis over beweging. Men spreekt in dit verband

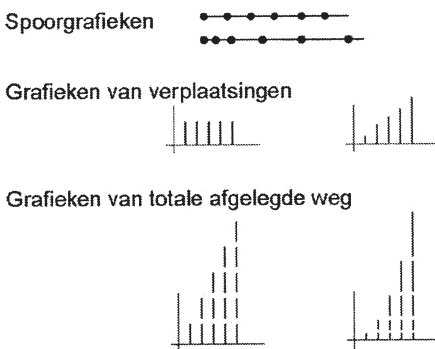
ook wel over *discovery learning* (De Jong & Joolingen, 1998). Het verschil met onze benadering is te vergelijken met het onderscheid tussen modellen aanbieden en het ondersteunen van leerlingen bij het ontwikkelen van modellen (Van Dijk, Van Oers & Terwel, 2003).

Anders dan bij *discovery learning* is in onze benadering van geleid heruitvinden het interpreteren van symbolisering niet gebaseerd op het exploreren van dynamische koppelingen, maar op de leerroute van leerlingen. Die leerroute zou ervoor borg moeten staan dat een nieuwe symbolisering het beeld oproept van het handelen met de voorgaande symbolisering. Zo is de verwachting dat het onderzoeken van de verandering van staaflengtes in een verticale grafiek, voor leerlingen staat voor het vergelijken van verplaatsingen in een spoorgrafiek, wat weer staat voor afstanden die in gelijke tijdsintervallen zijn afgelegd (zie Figuur 3). Dit is kenmerkend voor de aanpak volgens *emergent* modelleren.

In onze uitvindbenadering vormen intervallen tussen achtereenvolgende posities de centrale elementen voor het structureren van bewegingen. Redeneringen met deze intervallen komen voort uit redeneringen van leerlingen tijdens het analyseren van patronen tussen achtereenvolgende posities en ondersteunen uiteindelijk redeneringen met differenties in continue snelheid-tijd- en afstand-tijdgrafieken.

## 5 De vormgeving van het onderwijs rond de computeractiviteiten

Met de hierboven geschetste leergang is geëxperimenteerd in twee vierde klassen. Tijdens dit onderwijsexperiment observeerden we twee problemen met betrekking tot de vormgeving van het onderwijs rond de computeractiviteiten. Ten eerste bleken de docenten weinig mogelijkheden te hebben om op basis van de inbreng van de leerlingen, hen voor te bereiden op de representaties in de software. Op beide scholen introduceerden de docenten vooraf de twee soorten grafieken en vervolgens gingen de leerlingen daarmee aan het werk. We merkten in een aantal ge-



Figuur 3. Van spoorgrafieken naar tweedimensionale grafieken.



vallen op dat leerlingen de betekenis van de grafieken probeerden te achterhalen door de verbinding tussen stroboscopische foto en grafiek te exploreren. Dat leek een willekeurig exploratiegedrag gebaseerd op *trial-and-improve*, een aanpak die we juist wilden voorkomen. Ten tweede bleek tijdens de computeractiviteiten dat tempo en kwaliteit van werken erg uiteen liepen. Dit betekende dat in de nabespreking van die activiteiten veel aandacht nodig zou zijn voor het evalueren en afstemmen van de ideeën die leerlingen ontwikkelden. Die nabespreking bleef echter beperkt tot algemene vragen (bijvoorbeeld: “Hebben jullie begrepen hoe je die grafieken kon gebruiken?”). De docenten hadden weinig gelegenheid om de nabespreking te baseren op een productieve inbreng van de leerlingen (Doorman, 2005).

Deze problemen lijken vooral te spelen als gevolg van een spanning tussen de benadering van het geleid heruitvinden van wiskundige beschrijvingswijzen van beweging en het aanbieden van grafische mogelijkheden om bewegingen te onderzoeken. Dit is een spanning die zich makkelijk openbaart bij de inzet van de computer. Na de analyse van het eerste experiment concludeerden we dat de uitgangspunten van *emergent* modelleren en de probleemstellende benadering specifieke eisen stellen aan de vormgeving van het onderwijs rond de computeractiviteiten. In de leerroute is expliciete aandacht nodig voor het voorbereiden van de leerlingen op het werk met de software en voor een reflectie achteraf. Deze aandacht moet bovendien te realiseren zijn in de Tweede Fase van het voortgezet onderwijs.

In de huidige Teede Fase is ten aanzien van de bètavakken reeds een aantal keer opgemerkt dat het zelfstandig werken van leerlingen dient te zijn ingebed in klassikale activiteiten, waarmee de docent zorgt voor een oriëntatie op nieuwe onderwerpen, kernconcepten ter discussie stelt, leerlingen aanzet tot reflectie en aanstuurt op explicitering en consensus over het geleerde (Lijnse, 2002; Van der Valk & Gravemeijer, 2000). Dit kan worden gerealiseerd met behulp van opdrachten die een diversiteit in antwoorden uitlokken. Hierbij wordt ook wel gesproken over het bieden van *open opgaven* met veel

constructieruimte voor de leerlingen, opgaven waarvoor ze nog geen standaardmethode tot hun beschikking hebben (Chamberlin, 2005). Dergelijke opgaven maken een rijke interactie mogelijk (Dolk, 1997). Opdrachten met constructieruimte ondersteunen onderwijs waarin afwisselend (1) leerlingen ideeën genereren, (2) docenten die ideeën kunnen vergelijken en evalueren met de klas en (3) bruikbare elementen kunnen filteren om leerlingen te richten op het vervolg (Sherin, 2002).

De opgaven met constructieruimte en de aanwijzingen voor de rol van de docent vormen aanleiding voor het verbeteren van het onderwijs rond de computeractiviteiten. Hiermee komen we tot de volgende vraag die zich richt op onderwijs volgens de uitgangspunten van geleid heruitvinden met behulp van de probleemstellende aanpak en *emergent* modelleren: *Ondersteunt het waar te nemen leerproces de keuze voor opgaven met veel constructieruimte om de inbedding van computeractiviteiten in de beoogde onderwijspraktijk te realiseren?*

Deze vraag is uitgewerkt in lesmateriaal, hypothesen en observatiecriteria voor het volgende onderwijsexperiment en onderzocht in één vierde klas. In eerste instantie zochten we naar een activiteit waarmee we bij leerlingen inhoudelijke motieven konden oproepen voor het gebruik van tweedimensionale grafieken bij het beschrijven van beweging. Gekozen is voor een opgave over een vallend balletje. Deze opgave ging gepaard met een stroboscopische foto en de vraag was wanneer het balletje de grond zou bereiken. Het leek ons aannemelijk dat een aantal leerlingen in zou zien dat greep op het patroon van versnellen helpt bij het voorspellen. Leerlingen moesten bovendien hun voorspelling onderbouwen met een grafiek. Hiervoor hadden ze nog geen standaardmethode tot hun beschikking.

We verwachtten dat door het duidelijk toenemende patroon in de verplaatsingen van het balletje leerlingen niet met een spoorgrafiek zouden volstaan. Het voortzetten van het patroon gaat nu eenmaal beter met een tweedimensionale grafiek. Hierbij kunnen echter verschillende keuzes worden gemaakt. Je zou de afstand tot de bodem kunnen weergeven,

maar ook de opeenvolgende verplaatsingen of de totale afgelegde weg. Voor de horizontale as lijkt het voor de hand te liggen om de tijd te nemen, maar daar zou je ook kunnen volstaan met het nummeren van de achtereenvolgende meetmomenten. We verwachtten dat deze verschillen in uitwerkingen naar voren zouden komen tijdens de klassikale bespreking van de opgave en dat de docent daarmee de computeractiviteiten kon voorbereiden.

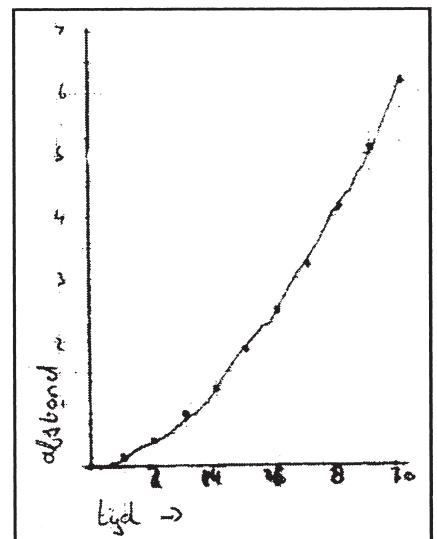
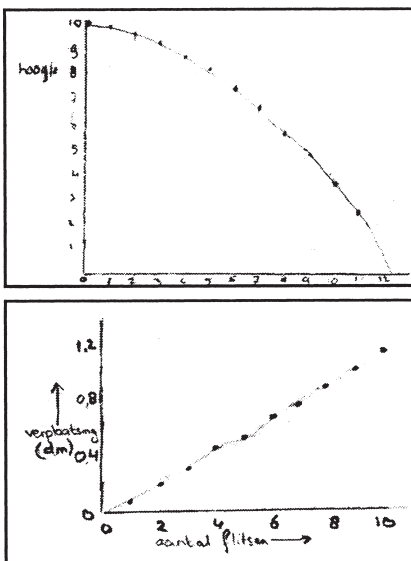
Voor het ondersteunen van de klassikale reflectie achteraf hebben we een activiteit ontworpen rond een bungeejumper. Leerlingen moesten in groepjes de beweging van een bungeejumper beschrijven met twee grafieken: een grafiek van de achtereenvolgende verplaatsingen en een grafiek van de totale afgelegde weg. De grafieken tekenden ze op transparanten die ze voor de klas konden presenteren met een overheadprojector. We verwachtten dat dit zelf tekenen nog geen standaardactiviteit was, terwijl het wel een kernidee van de computerlessen betrof. De docent kon dan reflecteren op de computeractiviteiten met behulp van de presentaties van de leerlingen. Als er tijdens die nabespreking nog leerlingen zouden zijn die het gebruik van de verticale staafjes niet goed beheersen, zou dat zeker aan de orde komen. Een preciezer beeld van de beweging van de

jumper kon worden verkregen door nauwkeuriger te meten, of door de beweging te vergelijken met voorspellingen volgens continue modellen. We veronderstelden dat de docent hiermee de richting van vervolgactiviteiten bij leerlingen kon oproepen.

## 6 De resultaten van het tweede onderwijsexperiment

In tegenstelling tot het eerste onderwijsexperiment lukte het de docent tijdens dit tweede experiment wel om de uitwerkingen van de leerlingen zo te bespreken dat het gebruik van tweedimensionale grafieken in de discussie aan de orde kwam. De docent vroeg leerlingen naar hun antwoorden en dankzij de verschillende redeneringen was hij in staat om specifieke keuzes te bespreken (zie Figuur 4). Meer dan de helft van de leerlingen had inbreng tijdens deze discussie en daarbij kwamen de specifieke rollen van de variabelen langs de verticale en de horizontale as aan de orde. Hiermee leek consensus te zijn ontstaan over een methode om beweging te organiseren voor het doen van voorspellingen. Deze methode bouwt voort op redeneringen met intervallen en spoorgrafieken, en komt tot stand met inbreng van de leerlingen.

Tijdens de computeractiviteiten obser-



Figuur 4. Drie verschillende grafieken van het vallende balletje.

veerden we dat leerlingen vanaf het begin ideeën ontwikkelden rond het gebruik van grafieken bij het beschrijven van bewegingen. Tijdens het analyseren van de verschillende situaties redeneerden leerlingen in toenemende mate over kenmerken van de grafieken en de relaties tussen grafieken van verplaatsingen en van de totale afgelegde weg. De volgende observatie is illustratief voor een redenering waarbij leerlingen zelf de grafiek van de verplaatsingen gebruiken voor het vergelijken van het snelheidsverloop van twee bewegingen. De ene beweging is afwisselend snel en langzaam (de rode) en de andere verloopt nagenoeg constant (de blauwe).

*Ellen:* Hoe verschillen beide bewegingen?

*Marloes:* Die rode gaat in boogjes.

*Ellen:* ...

*Marloes:* [volgt met haar vinger de grafiek van de verplaatsingen]

Die rooie gaat steeds sneller dan weer langzamer dan weer sneller en dan weer langzamer, die blauwe gaat bijna recht. Dus het midden gaat bijna recht ...

*Ellen:* Nee, het midden [de blauwe] gaat met een constante snelheid

*Observer:* hoe zie je dat?

*Ellen:* [wijst naar de grafiek van verplaatsingen]: omdat ie in gelijke stapjes gaat.

In deze observatie is te zien hoe de taal waarmee de leerlingen over de bewegingen praten mogelijkheden biedt voor een ontwikkeling in samenhang met het gebruik van de grafieken. Daarbij spelen gebaren die zowel verwijzen naar achtereenvolgende verplaatsingen in het stroboscopische plaatje als naar grafische kenmerken, een belangrijke rol. Ze verbinden kwalificaties als inhalen en constante snelheid met kenmerken van grafieken als helling en snijpunten. Gedurende de computeractiviteiten hebben we het werk van drie tweetallen geanalyseerd. Het bleek dat deze leerlingen inzicht ontwikkelden in de wiskundige beschrijvingswijzen van beweging in samenhang met inzicht in de relatie tussen de totale afgelegde weg en de achtereenvolgende verplaatsingen die maatgevend zijn voor het snelheidsverloop.

Na deze computerles kregen de leerlingen de opdracht over de bungeejumper. In groepjes van vier werd gewerkt aan het tekenen

van de grafieken. Na vijftien minuten verzocht de docent een vertegenwoordiger van ieder groepje de transparant met de grafieken te gebruiken bij het beschrijven van het verloop van de beweging van de bungeejumper. De docent vroeg af en toe om toelichting en verwees daarbij regelmatig naar de computeractiviteiten. In het volgende protocol wordt het begin van de eerste presentatie weergegeven.

*Docent:* Glenn, je hebt ongeveer 30 seconden om de onderste en de bovenste grafiek toe te lichten.

*Glenn:* De weg die hij aflegt wordt steeds groter, dat is aan de eerste grafiek te zien [die van de totale afgelegde weg]. De tweede betreft de verplaatsingen. Even kijken, hoe ging die ook al weer. O ja, hij valt eerst naar beneden toe, dan is die op het einde van het elastiek en dan valt hij weer omhoog. Dan gaat hij weer naar beneden. De verplaatsingen worden steeds korter. Hij gaat steeds langzamer heen en weer.

*Docent:* Oké, ik hoor twee dingen. De verplaatsingen worden korter, hij gaat langzamer. Leg dat nou nog eens uit met de onderste grafiek waarbij je snelheid gebruikt [met de grafiek van de verplaatsingen].

*Glenn:* In het begin valt hij steeds sneller naar beneden...

*Docent:* Hoe zie je dat aan de staafjes?

*Glenn:* Die gaan omhoog, die worden steeds hoger. Als hij beneden is gaat hij langzamer en zijn de staafjes korter, daarna gaat hij weer omhoog en worden de staafjes weer langer.

*Docent:* Oké (kijkt naar de klas). Commentaar van jullie?

De docent expliciteerde tijdens deze presentatie het gebruik van helling van de grafiek. De relatie tussen de helling van de grafiek van de totale afgelegde weg en het verloop van de grafiek van de afzonderlijke verplaatsingen was precies een beoogd kern-element van de lessenserie. Hierbij laat de docent ook horen wat als een goede argumentatie geaccepteerd wordt.

Het volgende protocol beschrijft de presentatie van een volgend groepje. Die geven we ook weer omdat de inbreng van de leerlingen de docent in staat stelt de kernideeën met de klas te bespreken.

*Docent:* Geen kritiek meer? Dan gaan we naar de volgende. (...)

*Natasja:* Nou, dit is de afgelegde weg en dat betekent dat ie, hier gaat ie naar beneden [de bungeejumper] dus dan loopt ie sneller, want in een kortere tijd legt ie meer afstand af [de grafiek loopt daar steiler]. En hier gaat ie dan weer naar beneden. En dan legt hij minder afstand af in dezelfde tijd en dan gaat hij weer omhoog en weer naar beneden...

*Docent:* Mag ik een heel klein beetje aanvullen om te vertalen wat je zegt, want je zegt het allemaal ontzettend goed, alleen wat je dus eigenlijk zegt is dat je ook aan de steilheid van dat ding kunt zien hoe snel die gaat. Of niet?

*Natasja:* Ja.

*Docent:* Kun je dat beter uitleggen?

*Natasja:* Ja, als hij naar beneden gaat, dan gaat hij sneller, en als hij naar boven gaat dan gaat hij langzamer.

*Docent:* Hoe komt het nou dat je dat ziet aan die steilheid?

*Natasja:* Nou, omdat ie dan in dit stukje tijd [wijst een bijbehorende verplaatsing aan] een best wel lange weg aflegt. Terwijl die bij deze daar, langer doet over dezelfde afstand [gaat met vinger langs minder steil stukje van de grafiek van de afgelegde weg]. Een groepslid voegt toe: in dezelfde tijd.

Deze les bevatte een rijke discussie over de beoogde begrippen die leerlingen tijdens de computeractiviteiten ontwikkelden. De presentaties van de leerlingen ondersteunden de docent in het vormgeven van deze discussie en het benadrukken van de kernelementen. Bovendien is in dit gesprek te zien hoe taalgebruik van leerlingen over snelheid en over helling van grafieken nog sterk met elkaar verbonden zijn en begrippen af en toe door elkaar lopen in de context van beweging. Dit is een kenmerk van *emergent* modelleren waarbij in eerste instantie model en situatie niet zo duidelijk te scheiden zijn. De docent heeft dan ook een belangrijke taak bij het proces van generaliseren om leerlingen te helpen de contexttaal uiteindelijk te onderscheiden van de wiskundetaal en het bijbehorende begrippenkader.

Het lukte de docent ook om leerlingen een bijdrage te laten leveren aan het vervolg. Leerlingen leverden inbreng bij de formulering

van het probleem dat het weergeven van meer metingen met zich mee brengt en bij de richting waarin gezocht kon worden naar oplossingen. Verplaatsingen worden namelijk heel klein als je vaak meet en patronen zijn dan minder goed zichtbaar. In het schriftelijke materiaal van de meeste leerlingen waren uitwerkingen bij vervolgactiviteiten in lijn van het beoogde traject. Bij de overgang naar redeneringen met continue modellen van beweging bleken leerlingen steun te hebben aan deze voorbereiding met discrete grafieken. Ze verwezen zelf naar de eerdere situaties en de docent kon met leerlingen die vastliepen de betekenis van representaties traceren. Leerlingen waren in staat om te beredeneren waar een bepaalde representatie of een bepaald begrip vandaan kwam met behulp van hun eigen leerproces.

## 7 Conclusies

Leerlingen konden kennis ontwikkelen volgens een benadering van geleid heruitvinden over de beoogde begrippen: de samenhang tussen snelheid en afgelegde weg en het differentiequotient als maat voor verandering. Deze kennis werd ondersteund door activiteiten rond een serie grafieken die het voor leerlingen mogelijk maakte betekenissen te construeren in lijn met het beoogde traject en te traceren als ze vastliepen. Hierdoor werden de uiteindelijke begrippen geworteld in hun redeneringen over beweging en veranderingsprocessen in de context van weersvoorspellingen.

De vraag die in dit artikel centraal stond betrof het zoeken naar empirische evidentie voor de gekozen ontwerpheuristieken om dit proces te realiseren. De keuze voor *emergent* modelleren heeft ertoe geleid dat leerlingen met het lesmateriaal symbolen en begrippen in samenhang ontwikkelden vanuit intuïtieve redeneringen in betekenisvolle probleemsituaties.

Conform de probleemstellende benadering is het gelukt om inhoudelijke motieven te creëren voor de achtereenvolgende activiteiten. Leerlingen ervoeren daardoor de activiteiten als een samenhangend geheel. De overstijgende problematiek bleek behulp-

zaam bij het reflecteren op de stand van zaken en bij het betrekken van leerlingen bij de volgende problemen die zouden moeten worden opgelost om veranderingsprocessen beter te kunnen beschrijven en voorspellen.

Deze ervaringen vormden de aanleiding voor de vraag naar de vormgeving van het onderwijs rond de computeractiviteiten. Die vraag betrof empirische ondersteuning voor het effect van en de manier waarop rijke klasdiscussies te realiseren zijn om leerlingen voor te bereiden op de computeractiviteiten en voor de reflectie achteraf. De veronderstelling was dat opgaven met een grote constructieruimte voor de leerlingen hierbij tot het gewenste resultaat zouden leiden. Deze constructieruimte is zo gekozen dat verwachte uitwerkingen van leerlingen pasten in het beoogde leertraject. Tijdens het tweede experiment was de docent in staat om met de variëteit in de uitwerkingen van leerlingen klassengesprekken te voeren over het nut en gebruik van grafieken voor het beschrijven van beweging. Deze gesprekken bleken een belangrijke conditie voor de effectiviteit van de computerlessen. Het gereedschap van de software werd nu door de leerlingen bij de diverse probleemsituaties betekenisvoller ingezet. De discussie achteraf werd ondersteund door een groepsactiviteit gevolgd door presentaties van leerlingen. Deze combinatie bleek effectief voor reflectie op en een klassikale consensus over het geleerde tijdens de computeractiviteiten.

## 8 Discussie

In de Tweede Fase is veel aandacht voor manieren waarop leerlingen leren zelfstandig te werken. Dit onderzoek laat zien dat bij het leren van wiskunde met computeractiviteiten ook aandacht nodig is voor klassikale momenten. Besprekingen tijdens die klassikale momenten kunnen worden ondersteund door opdrachten met veel constructieruimte voor leerlingen. Als leerlingen een belangrijke rol krijgen in de constructie van de beoogde kennis, dan is er een periode van tentatief taalgebruik en gebruik van representaties. Op dat moment zijn kenmerken van de probleemsituatie en van de beoogde wis- en natuur-

kundige begrippen nog niet zo duidelijk te onderscheiden. Een zorgvuldige uitlijning van activiteiten en representaties is nodig om begripsontwikkeling vanuit intuïtieve redeneringen te ondersteunen. In deze begripsontwikkeling volgens een proces van geleid heruitvinden zijn de karakteristieken van diagrammatisch redeneren te herkennen (zie Bakker, in dit nummer). Volgens die karakteristieken zijn construeren, experimenteren en reflecteren centrale handelingen die de basis vormen van begripsontwikkeling. Achteraf bezien hebben deze drie fasen ook in het onderwijsleerproces van dit onderzoek een belangrijke rol gespeeld bij de overgang van de ene representatie naar de volgende.

De dynamiek van de computerprogramma's en de mogelijkheid veel situaties te onderzoeken boden leerlingen de gelegenheid zelf ideeën te ontwikkelen. Computergebruik in de klassenpraktijk heeft echter als risico dat leerlingen te oppervlakkig en te snel door de activiteiten heengaan. Een voorbereiding in het lesmateriaal met open problemen en klassendiscussies onder leiding van de docent kunnen zorgen voor afstemming van de mogelijkheden van de programma's met de redeneringen van de leerlingen en voor reflectie en generalisering. Hiermee bieden we concrete aanknopingspunten voor het orkestreren van computergebruik door de docent (zie Drijvers, in dit nummer).

We hebben vergelijkbare resultaten gevonden voor het ondersteunen van de integratie van computeractiviteiten bij het leren van algebra (Boon, 2004; Doorman, 2004). Deze ervaringen vormen de onderbouwing van een specifieke volgorde van activiteiten die het gebruik van de computer als gereedschap voor het leren van wiskunde in klas-sensituaties ondersteunt. In die volgorde is sprake van een afwisseling van het bieden van constructieruimte aan de leerlingen waarin ze beoogde begrippen kunnen (her)uitvinden, gevolgd door klassikale momenten waarbij de docent de uitwerkingen kan gebruiken om met de klas consensus te bereiken over de beoogde begrippen en over het vervolg (zie Tabel 2).

Het onderscheid tussen geleid exploreren en geleid construeren lijkt in de klassenpraktijk minder groot dan de theoretische uit-

Tabel 2

Activiteiten die de integratie van computergebruik ondersteunen

Activiteit	Doel
Werken aan open problemen met (geschikte) constructieruimte voor de leerlingen.	Leerlingen vormen – al proberend – situatiegebonden begrippen, taal en representaties.
Klassendiscussie aan de hand van de uitwerkingen en strategieën van de leerlingen in het licht van een globale probleemstelling	Consensus over probleemstelling en mogelijke modellen en strategieën die helpen bij de oplossing.
Veel gevallen onderzoeken – niet afgeleid door tijdovend tekenwerk – met behulp van de computer als gereedschap.	Focus verandert van situatiespecifiek naar een meer generaliserend en wiskundig perspectief.
Klassendiscussie aan de hand van de ontwikkelde inzichten en strategieën van de leerlingen (in het licht van een globale probleemstelling).	Consensus over beoogde modellen en de samenhang met overige wiskundige kennis en de beperkingen daarvan (richtinggevend voor het vervolg).

gangspunten doen vermoeden. Het is ons namelijk niet gelukt om de computer zo in te zetten, dat tijdens de activiteiten alle leerlingen het geleerde ervaren als eigen uitvindingen. Een wezenlijk verschil is dat in de benadering van geleid heruitvinden de nadruk ligt op een betekenisvolle – hypothetische – opbouw van begrippen en representaties, terwijl in de exploratieve benadering het exploreren van dynamische verbindingen bij het ontdekken van de betekenis van begrippen en representaties voorop staat.

In de benadering van geleid heruitvinden is ons opgevallen dat leerlingen betekenissen kunnen traceren, maar niet gewend zijn dat op eigen initiatief te doen. Pijs (in dit nummer) wijst dan ook op het belang van proceshulp door docenten. Wij bevelen aan dat met name in het wiskundeonderwijs regelmatig aandacht wordt besteed aan de oorsprong van wiskundige begrippen en methoden, omdat die snel een eigen leven kunnen gaan leiden in algoritmen.

Tot slot merken we op dat in de huidige ontwikkelingen rond vernieuwingen van de bètavakken in de Tweede Fase de concept-contextbenadering een belangrijke rol speelt (Driessen & Meinema, 2003). Dit onderzoek biedt aanknopingspunten voor een onderwijsbenadering waarbij het leren vanuit contextuele problemen is vorm te geven. Het gaat daarbij om onderwijs waarin niet direct de structuur van de vakdiscipline centraal staat, maar dat wordt vormgegeven met behulp van betekenisvolle probleemsituaties voor de leerlingen.

## Noten

- 1 Het promotieonderzoek waarop dit artikel is gebaseerd is gesubsidieerd door NWO onder nummer 575-36-003C.

## Literatuur

- Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education; On symbolizing and computer minitools*. Utrecht: CD-β Press.
- Boon, P. (2004). WELP: letterrekenen met applets. *Nieuwe Wiskrant*, 23(4), 22-27.
- Boyd, A., & Rubin, A. (1996). Interactive video: A bridge between motion and math. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1, 57-93.
- Chamberlin, M. T. (2005). Teachers' discussions of students' thinking: meeting the challenge of attending to students' thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 141-170.
- Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. In: L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 369-375). Utrecht: Utrecht University.
- Cobb, P. (1999). Individual and collective mathematical development: the case of statistical data analysis. *Mathematical Thinking and Learning*, 1, 5-43.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A. A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32, 9-13.
- Dekker, R. (1991). *Wiskunde leren in kleine hete-*

- rogene groepen. De Lier: Academisch Boeken Centrum.
- Dijk, I. M. A. W. van, Oers, B. van, & Terwel, J. (2003). Providing or designing? Constructing models in primary maths education. *Learning and Instruction, 13*, 53-72.
- Doerr, H. M. (1997). Experiment, simulation and analysis: an integrated instructional approach to the concept of force. *International Journal of Science Education, 19*, 265-282.
- Dolk, M. L. A. M. (1997). *Onmiddellijk onderwijsgedrag. Over denken en handelen in onmiddellijke onderwijssituaties*. Dissertatie. Universiteit Utrecht.
- Doorman, L. M. (2000). Integratie van kinematica en differentiaalrekening. *Nieuwe Wiskrant, 20* (1), 14-20.
- Doorman, L. M. (2004). Van touwpuzzels tot oppervlaktealgebra. *Nieuwe Wiskrant, 23* (4), 34-39.
- Doorman, L. M. (2005). *Modelling motion: from trace graphs to instantaneous change*. Utrecht: CD- $\beta$  Press.
- Drissen, H. P. W., & Meinema, H. A. (2003). *Chemie tussen context en concept*. Enschede: SLO.
- Edelson, D. C. (2002). Design research: What we learn when we engage in design. *The Journal of the Learning Sciences, 11*, 105-121.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education – China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gilbert, J. K., & Boulter, C. J. (1998). Learning science through models and modeling. In B. J. Fraser, & K. G. Tobin (Eds.), *International Handbook of Science Education* (pp. 53-66). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Goddijn, A. J. (1978). Lijngrafieken in de Gansstraat. *Wiskrant, 3* (11), 1-3.
- Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CD- $\beta$  Press.
- Gravemeijer, K. P. E., & Doorman, L. M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, 39*, 111-129.
- Gravemeijer, K. P. E., Lehrer, R., Van Oers, B., & Verschaffel, L. (Eds.) (2002). *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*, 105-128.
- Hoyle, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In: A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education*. (pp. 323-349). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Jong, T. de, & Joolingen, R. W. van (1998). Scientific discovery learning with computer simulations of conceptual domains. *Review of Educational Research, 68*, 179-201.
- Kaput, J. J. (1994). The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience. In R. Biehler et. al. (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 379-397). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Klaassen, C. W. J. M. (1995). *A Problem-posing approach to teaching the topic of radioactivity*. Utrecht: CD- $\beta$  Press.
- Lijnse, P. L. (1995). 'Developmental research' as a way to an empirically based 'didactic structure' of science. *Science Education, 79*, 189-199.
- Lijnse, P. L. (2002). Op weg naar een didactische structuur van de natuurkunde? De ontwikkeling van didactische structuren volgens een probleemstellende benadering. *Tijdschrift voor Didactiek der  $\beta$ -wetenschappen, 19* (1&2), 62-93.
- McDermott, L. C., Rosenquist, M. L., & Van Zee, E. H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: examples from kinematics. *American Journal of Physics, 55* (6), 503-513.
- Meira, L. (1995). The microevolution of mathematical representations in children's activity. *Cognition and Instruction, 13*, 269-313.
- Oers, B. van. (1998). From context to contextualizing. *Learning and Instruction, 8*, 473-488.
- Roth, W. M., & McGinn, M. K. (1998). Inscriptions: toward a theory of representing as social practice. *Review of Educational Research, 68* (1), 35-59.
- Sherin, M. G. (2002). A balancing act: developing a discourse community in a mathematics community. *Journal of Mathematics Teachers Education, 5*, 205-233.
- Streefland, L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron. *Nieuwe Wiskrant, 5* (1), 60-67.

Valk, T. van der & Gravemeijer, K. (2000). *Het studiehuis vanuit  $\beta$ -didactisch perspectief*. Paper voor het symposium Bèta Profielen in het Studiehuis. ORD 2000, Leiden.

Manuscript aanvaard: 20 juli 2007.

## Auteur

**Michiel Doorman** is wetenschappelijk medewerker aan het Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen van de Universiteit Utrecht.

*Correspondentieadres:* M. Doorman, Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht, Postbus 9432, 3506 GK Utrecht. E-mail: email: m.doorman@fi.uu.nl

## Abstract

### **Learning mathematics with computer tools requires construction space for students**

This article describes a study into the use of computer activities in learning mathematics according to a guided reinvention approach. There are two design heuristics that seem suitable for realizing a teaching approach that builds upon students' intuitive reasoning. The heuristic of emergent modeling supports planning a learning trajectory from situational models to models for mathematical reasoning. The heuristic of the problem posing approach supports the teacher in evoking content-related motives for consecutive activities. During a design research study in two tenth grades we noticed tension between the intended learning process of guided reinvention and the presentation of mathematical representations on the computer. Qualitative analyses of the computer lessons showed that students use a wide variety of strategies that differ in pace and in level of trial and improve. As a result, teachers had difficulty discussing the computer activities and connecting them with the following activities. We argue that problems with space for construction are needed to support whole-class discussion surrounding the computer activities. These whole-class discussions are important to connect the possibilities of the software with students'

reasoning, and to reach consensus about what has been learned afterwards. It turned out to be possible, through the use of problems with room for construction, to base the discussions on productive student input. After a second experimental round, we conclude that we could achieve the desired teaching results using the two design heuristics and the planned whole-class discussions.