

Onterecht lineair redeneren door leerlingen in het secundair onderwijs: Een dieptestudie¹

D. De Bock, W. Van Dooren, D. Janssens en L. Verschaffel

Samenvatting

Een reeks recente studies waarin collectieve toetsen werden afgenomen bij grote groepen 12- tot 16-jarige leerlingen, toonde aan dat zij een haast onweerstaanbare drang vertonen om onterecht lineair te redeneren bij vraagstukken over het vergroten en verkleinen van meetkundige figuren. Bovendien bleken deze leerlingen nauwelijks gevoelig voor diverse vormen van hulp die hen in deze studies werden aangereikt. In onderhavig artikel wordt gerapporteerd over een dieptestudie waarin we via de afname van semi-gestandaardiseerde individuele interviews de onderliggende denkprocessen van leerlingen bij het onterecht lineair redeneren ontrafelden. Vier essentiële verklaringsfactoren voor het ontstaan en de resistentie van deze redeneerwijze kwamen aan het licht, met name: (a) het intuïtieve karakter van het lineair model; (b) de overtuiging dat een verband tussen grootheden altijd lineair is; (c) bepaalde tekorten in de meetkundige basiskennis; en (d) inadequate gewoonten en opvattingen in verband met het oplossen van wiskundige problemen.

1 Inleiding

De voorbije decennia hebben onderzoekers in de didactiek van de bètawetenschappen, maar ook cognitieve en instructiepsychologen, de concepties en redeneerprocessen van leerlingen in een ruime waaier van inhoudelijke domeinen bestudeerd (Fischbein, 1987, 1999; Greca & Moreira, 2000; Perkins & Simmons, 1988; Vosniadou, 1999; Wandersee, Mintzes, & Novak, 1994). Dit onderzoek bracht een aantal hardnekkige en systematische fouten (misconcepties, preconcepties of alternatieve concepties) aan het licht die strijdig zijn met hedendaagse wetenschappelijke inzichten. De meeste van deze studies focussen op een gedetailleerde beschrijving van

specifieke misvattingen rond bepaalde topics (zoals bijvoorbeeld het bekende onderzoek van Vosniadou (1999, 2001) naar de opvattingen van leerlingen over de vorm of de bewegingszin van de aarde). Onderhavig artikel spitst zich toe op de ongeoorloofde toepassing van lineariteit door leerlingen, een systematische fout die tot uitdrukking komt in diverse terreinen van het onderwijs in de wiskunde en de natuurwetenschappen. Meer bepaald peilen we naar de oplossings- en redeneerprocessen die achter de onterecht lineaire redeneringen van leerlingen schuilgaan. Inzicht in deze onderliggende processen kan leiden tot een meer wetenschappelijk gefundeerde remediëring van deze hardnekkige en veelvoorkomende fouten bij leerlingen.

2 Theoretische achtergrond

In het lager en secundair wiskundeonderwijs wordt veel aandacht besteed aan lineaire (proportionele of recht evenredige) relaties, vermits ze het onderliggend model zijn voor heel wat toepassingsproblemen binnen de wiskunde, maar ook in andere wetenschappen. Zo is er bijvoorbeeld een lineair verband tussen de omtrek van een cirkel en de diameter van die cirkel, tussen de reistijd en de afgelegde weg bij een constante snelheid, en tussen het volume en het gewicht van een bepaalde hoeveelheid vloeistof. Naast hun brede toepasbaarheid, worden lineaire relaties ook gekenmerkt door hun eenvoud en hun vanzelfsprekende karakter. Zoals Rouche (1989, p. 17) stelt: "C'est l'idée de proportionnalité qui vient d'abord à l'esprit, parce qu'il n'y a sans doute pas de fonctions plus simples que les linéaires".² In dit verband kan de toenemende vertrouwdheid en ervaring met lineaire modellen die leerlingen via het reken/wiskundeonderwijs verwerven dan ook nadelig uitdraaien. Verschillende auteurs (bijv. Berté, 1992; Freudenthal, 1983; Rouche,

1989) signaleren dat dit ertoe kan leiden dat leerlingen lineaire modellen ook gaan gebruiken in situaties waar geen lineaire relatie aan de orde is. Zo waarschuwde Freudenthal (1983, p. 267): “Linearity is such a suggestive property of relations that one readily yields to the seduction to deal with each numerical relation as though it were linear.”

In de onderwijskundige en vakdidactische literatuur vindt men talloze voorbeelden van dit fenomeen, ontleend aan diverse deelgebieden van de wiskunde (zie bijv. De Bock, Verschaffel, & Janssens, 1999). Een eenvoudige illustratie uit de geschiedenis van de kansrekening is de fout die de Italiaanse wiskundige Cardano (1501-1576) maakte. Cardano beredeneerde correct dat de kans op een dubbele zes in een worp met twee dobbelstenen gelijk is aan $1/36$, maar redeneerde verder dat men de twee dobbelstenen 18 keer moet gooien om minstens 50% kans te hebben op een dubbele zes (Székely, 1986). Recent empirisch onderzoek in kansrekening door Van Dooren, De Bock, Depaepe, Janssens en Verschaffel (2003) toonde aan dat 15- tot 18-jarigen ook vandaag massaal in deze “lineaire valstrik” trappen. De leerlingen in dit onderzoek bleken in het algemeen een zeer goed kwalitatief inzicht te hebben in de verschillende kanssituaties die hen werden aangeboden (zo zagen bijvoorbeeld nageenog alle leerlingen correct in dat de kans op succes toeneemt met het aantal pogingen). Tegelijk waren deze leerlingen evenwel heel sterk geneigd deze correcte, kwalitatieve inzichten lineair te kwantificeren (zo dacht de overgrote meerderheid bijvoorbeeld dat de kans op succes verdubbelt als het aantal pogingen verdubbelt).

De focus van deze bijdrage is het onterecht lineair redeneren binnen het vakgebied meetkunde. In dit domein is het bekendste voorbeeld wellicht dat van de verdubbeling van het vierkant in de dialoog “Meno” van Plato. Een slaaf, die als opdracht krijgt een vierkant te tekenen met de dubbele oppervlakte van een gegeven vierkant, stelt spontaan voor om de zijde van het gegeven vierkant te verdubbelen. De slaaf gaat er dus impliciet van uit dat wanneer men een meetkundige figuur gelijkvormig vergroot met factor k , de oppervlakte (en het volume) van

die figuur eveneens toenemen met factor k . Het werkelijke principe is welgekend: een vergroting of verkleining met factor k doet de lengtes (en omtrek) toenemen met factor k , oppervlakten met factor k^2 en volumes met factor k^3 . Deze factoren hangen niet af van de specifieke figuur (vierkant, cirkel, kubus, bol, kegel, grillig lichaam, ...), maar enkel van de grootheid in kwestie (lengte, oppervlakte of volume). Wanneer de straal van een bol wordt verdubbeld, dan verdubbelt de omtrek van iedere cirkel op het boloppervlak, verviervoudigt de boloppervlakte en verachtvoudigt het bolvolume. Volgens Freudenthal (1983, p. 267) is dit inzicht “mathematically so fundamental, that, phenomenologically and didactically, it should be put first and foremost. This fact rather than formulae for circumferences, areas, volumes, should be primary”. Veel auteurs (National Council of Teachers of Mathematics, 1989; Rogalski, 1982; Rouche, 1989; Vergnaud, 1983) halen echter aan dat leerlingen vaak aan dit principe voorbijgaan en uitgaan van een lineair verband tussen lengtes, oppervlakten en volumes.

Sommige auteurs (Outred & Michelmoré, 2000; Tierney, Boyd, & Davis, 1990; Rogalski, 1982) plaatsen de lineaire misvatting van leerlingen bij het bepalen van oppervlakten van vergrote of verkleinde figuren in de context van de moeizame verwerving van het oppervlaktebegrip door leerlingen en de vele misvattingen die zich op dat vlak manifesteren (bijv. het verwarren van de begrippen oppervlakte en omtrek of de eenzijdige associatie van het oppervlaktebegrip met de *lengte* \times *breedte*-regel voor de oppervlaktebepaling van rechthoeken). Zo stelden Tierney e.a. (1990) in hun onderzoek naar de concepties over oppervlakte bij toekomstige leraren basisonderwijs onder meer vast dat velen onder hen na berekening van een oppervlakte via de *lengte* \times *breedte*-regel in hun resultaat niet overschakelden van lineaire (bijv. m) op oppervlakte-eenheden (bijv. m^2), hetgeen erop kan wijzen dat zij het tweedimensionale karakter van het oppervlaktebegrip niet vatten. Het hoeft dan ook geen verbazing te wekken dat deze toekomstige leraren basisonderwijs veranderingen in lineaire afmetingen vaak verkeerdelijk veralgemeenden tot veran-

deringen in oppervlakte: “In responding to questions about the effect of halving or doubling the lengths of the sides of a square, most students said that the area was also halved or doubled” (Tierney e.a., 1990, p. 308).

3 Empirische achtergrond

Sinds enkele jaren wordt aan het Centrum voor Instructiepsychologie en -technologie van de Katholieke Universiteit Leuven systematisch empirisch onderzoek verricht naar het fenomeen van het onterecht lineair redeneren in de context van het gelijkvormig vergroten en verkleinen van meetkundige figuren. In een eerste reeks studies werd de omvang en de hardnekkigheid van dit fenomeen onderzocht via de afname van collectieve toetsen (De Bock, Verschaffel, & Janssens, 1997, 2002; De Bock, Verschaffel, Janssens, Van Dooren, & Claes, 2003). Deze collectieve toetsen bevatten zowel proportionele als niet-proportionele items over de relatie tussen lengtes, oppervlakten en/of volumes van gelijkvormig vergrote en verkleinde meetkundige figuren. De toetsen werden schriftelijk afgenomen bij grote groepen 12- tot 13- en 15- tot 16-jarige leerlingen van het algemeen secundair onderwijs. De begrippen *omtrek* en *oppervlakte* en de bepaling ervan bij willekeurige vlakke figuren behoren tot de officiële Vlaamse eindtermen voor de basisschool, zodat alle leerlingen er in hun voorafgaand curriculum mee kennismaakten (Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap, 1997). De steekproefgrootte varieerde over de verschillende deelstudies, maar bedroeg steeds minstens 250 leerlingen. Representativiteit van de steekproef werd gewaarborgd door verschillende scholen, en binnen dezelfde school verschillende studierichtingen, in het onderzoek te betrekken. Via ‘matching’ op basis van verschillende leerlingenkenmerken werden de leerlingen toegewezen aan verschillende experimentele condities, die de toets op een andere manier aangeboden kregen. Alle toetsitems waren als traditionele vraagstukken geformuleerd en hadden betrekking op verschillende meetkundige vormen.

Een voorbeeld van een proportioneel item (over de omtrek van een vierkante figuur) is

het volgende vraagstuk: “Om een gracht te graven rond een vierkant stuk weiland met zijde 100 m heeft boer Gust ongeveer vier dagen nodig. Hoeveel dagen zal hij ongeveer nodig hebben om een gracht te graven rond een vierkant stuk weiland met zijde 300 m?”

Een voorbeeld van een niet-proportioneel item (over de oppervlakte van een vierkante figuur) is het volgende: “Om een vierkant stuk grond met zijde 200 m te bemesten heeft boer Karel ongeveer acht uur nodig. Hoeveel uur zal hij ongeveer nodig hebben om een vierkant stuk grond met zijde 600 m te bemesten?”

De belangrijkste resultaten van deze studies kunnen als volgt worden samengevat:

- De tendens tot lineair redeneren bleek extreem sterk te zijn in de groep van 12- tot 13-jarigen (slechts 2-7% correcte antwoorden op de niet-proportionele items), maar ook de 15- tot 16-jarigen werden er nog in zeer sterke mate door beïnvloed (slechts 17-22% correcte antwoorden op de niet-proportionele items).
- De aard van de meetkundige figuur waarop een item betrekking had, beïnvloedde de neiging tot onterecht lineair redeneren: leerlingen presteerden beter op items over een regelmatige figuur (een vierkant of een cirkel) dan op items over een onregelmatige figuur (bijvoorbeeld een kaart van België).
- Noch het geven van de instructie om bij elk item een passende tekening te maken, noch het aanbieden van zulke tekeningen had invloed op het oplossingsgedrag van de leerlingen. Leerlingen bleken de instructie om een tekening te maken slechts zelden op te volgen en schonken in het algemeen ook weinig aandacht aan de aangeboden tekeningen. Wanneer de leerlingen tekeningen op ruitjespapier in plaats van op ongelijnd papier aangeboden kregen zodat zij makkelijker lengtes en oppervlakten konden nameten en vergelijken, werd wel een beperkt positief effect vastgesteld (leerlingen die deze aangeboden kregen, losten 17% van de niet-proportionele opgaven correct op tegenover 13% in de andere groepen).
- Het aanbieden van metacognitieve hulp (door de leerlingen vlak voor de toetsafname te confronteren met een niet-

proportionele opgave en hen te laten kiezen tussen twee gegeven oplossingen, namelijk de proportionele en de correcte oplossing) had een beperkt positief effect op het oplossen van de niet-proportionele items in de toets: in de groepen met deze vorm van hulp werd 18% van de niet-proportionele opgaven correct beantwoord tegenover 12% in de andere groepen.

- Het onterecht proportioneel redeneren bleek in belangrijke mate samen te hangen met de “ontbrekende-waarde”-structuur van de opgave (een structuur waarbij leerlingen de onbekende waarde moeten berekenen op basis van drie gegeven getallen zoals in de twee eerder gegeven voorbeelden). Leerlingen die inhoudelijk equivalente items aangeboden kregen, maar dan geformuleerd als vergelijkingsopgaven (bijvoorbeeld variërend op het eerder aangehaalde niet-proportionele item: “Boer Karel heeft vandaag een stuk grond bemest. Morgen moet hij een vierkant stuk grond bemesten *waarvan de zijde driemaal zo groot is. Hoeveel keer meer tijd zal hij ongeveer nodig hebben om dit stuk grond te bemesten?*”), presteerden beduidend beter op de niet-proportionele items dan de leerlingen met de ontbrekende-waarde-opgaven (respectievelijk 41% en 23% correcte antwoorden). Stereotiep, proportioneel oplossingsgedrag wordt zichtbaar mede uitgelokt door een ontbrekende-waarde-opgavestructuur, wellicht omdat het merendeel van de proportionele opgaven die de leerlingen op school ontmoeten in die structuur wordt aangeboden. Bij de leerlingen met vergelijkingsopgaven werd evenwel nog steeds meer dan de helft van de niet-proportionele items foutief opgelost.
- Het aanbieden van de items in een aantrekkelijke “realistische” context - in het onderzoek geoperationaliseerd door de leerlingen een video te tonen over het bezoek van Gulliver aan het eiland van de Lilliputters en de verschillende toetsitems eraan te koppelen - leidde niet tot de verwachte positieve kentering, maar had zelfs een averechts effect op de prestaties voor de niet-proportionele items (25% correcte antwoorden op de niet-proportionele items

versus 41% in een controleconditie).

- Verrassend was ook de vaststelling dat, wanneer de prestaties van leerlingen op de niet-proportionele items verbeterden dankzij één van de hierboven vermelde vormen van hulp die we hen aanboden, dit stevast gepaard ging met slechtere prestaties op de “gewone” proportionele items. Niet zelden waren de fouten op deze proportionele items te wijten aan de ontrechte toepassing van *niet-proportionele* redeneringen.

Het algemeen besluit dat uit deze reeks studies naar voren kwam, is dat leerlingen massaal en op flagrante wijze lineair redeneren in situaties waarin dat niet geoorloofd is, zelfs wanneer hulp wordt geboden waaruit de onhoudbaarheid van het lineaire model blijkt. Immers, de effecten van de verschillende experimentele manipulaties waren teleurstellend klein en in bepaalde gevallen zelfs negatief. Maar omwille van de gehanteerde onderzoeksmethode (i.e. het afnemen van collectieve toetsen onder verschillende experimentele condities) verschaften zij een onvoldoende gedetailleerd beeld van de oplossingsprocessen en redeneerwijzen van de leerlingen die onterecht lineaire antwoorden gaven. Als gevolg daarvan konden we nog geen behoorlijk antwoord geven op de vraag hoe en waarom zoveel leerlingen in de lineaire valstrik trappen, en waarom ze zo weinig gevoelig bleken voor diverse vormen van hulp die we in deze studies hadden aangereikt. Daarom werden de studies met collectieve toetsen aangevuld met een dieptestudie waarin we een beperkte groep leerlingen individueel interviewden.

4 Dieptestudie via individuele interviews

4.1 Design

We namen individuele interviews af bij 20 12- tot 13-jarige en 20 15- tot 16-jarige leerlingen. Omdat deze interviewstudie een vervolgvormde op de studies met collectieve toetsen werden dezelfde leeftijdsgroepen erin betrokken. De leerlingen volgden onderwijs in een school gelegen in een middelgrote Vlaamse stad en waren verdeeld over de ver-

schillende grote studierichtingen van het algemeen secundair onderwijs. De aantallen meisjes en jongens in de school, evenals in onze steekproef, waren nagenoeg gelijk. De geïnterviewden kregen enkele bladen, schrijfgierief, een lat en een eenvoudige, wetenschappelijke rekenmachine ter beschikking. Alle interviews werden op geluidsband opgenomen. Na een korte, gestandaardiseerde introductie waarin we uitlegden dat het interview kaderde in een onderzoeksproject over het oplossen van wiskundige problemen, confronteerden we de leerling met een niet-lineair probleem over de vergroting van een onregelmatige vlakke figuur. Het probleem was vergezeld van tekeningen. Uit de studies met collectieve toetsen wisten we dat het aanbieden van een tekening op zich geen invloed zou hebben op het (massale) aantal lineaire reacties bij de leerlingen (De Bock et al., 1997), maar door het aanbieden ervan werd wel gegarandeerd dat de leerlingen het probleem correct zouden interpreteren (namelijk als een gelijkvormige vergroting). Hoewel de kans op ongewenste informatie-doorstroming tussen leerlingen over het probleem of over de correcte oplossing bijzonder klein was, werkten we veiligheids-halve toch met verschillende - wiskundig isomorfe - versies van hetzelfde probleem.

Een voorbeeld wordt gegeven in Figuur 1.

We vroegen de leerling het probleem luidop te lezen en tijdens het oplossen ervan hardop te denken (Ginsburg, Kossan, Schwartz, & Swanson, 1982). Op het ogenblik dat de leerling zijn (eerste) lezing van het probleem beëindigde, werd een chronometer ingeschakeld om de oplossingstijd te meten. Nadat de leerling een oplossing gegeven had, stelden we ook enkele bijkomende vragen. Wanneer het hardop denken onvoldoende informatie opleverde over de gevolgde oplossingsstrategie, vroegen we die (verder) te expliciteren of te verduidelijken. Daarna nodigden we de leerling uit om op een vijfpuntsschaal (van *zeker fout* tot *zeker correct*) aan te duiden hoe zeker hij van zijn antwoord was. Wanneer een leerling niet *zeker correct* aanduidde, vroeg de interviewer waarom hij niet helemaal zeker was, of er iets was dat hem deed twifelen, en of hij een of meerdere andere oplossingen had overwogen. Ten slotte vroegen we *waarom* hij dacht dat het probleem op die manier moest worden opgelost. Wanneer een leerling zijn oplossingswijze niet (goed) kon rechtvaardigen, confronteerden we hem met een zogenaamde 'teaser', een onzinnige, additieve oplossing (bijvoorbeeld, verwijzend naar het voorbeeld in Figuur 1: "De tweede kerstman is $168 \text{ cm} - 56 \text{ cm} = 112 \text{ cm}$

Bart werkt voor een bedrijf dat reclametekeningen schildert op de etalageruiten van winkels. Tijdens de afgelopen kerstdagen moest hij vaak kerstbomen, kerstmannen, sterren en sneeuwmannen op de ramen schilderen. Op een dag moest hij een tekening van een kerstman van 56 cm hoog op de glazen winkel deur van bakkerij Vervoort schilderen. Hiervoor had hij 6 ml verf nodig. Daarna moest hij een veel grotere versie van diezelfde kerstman schilderen op de etalageruit van supermarkt Staes. Die kerstman moest 168 cm hoog zijn. Hoeveel ml verf had Bart hier ongeveer voor nodig?



Bakkerij Vervoort



Supermarkt Staes

Figuur 1. Voorbeeld van een niet-lineair probleem.

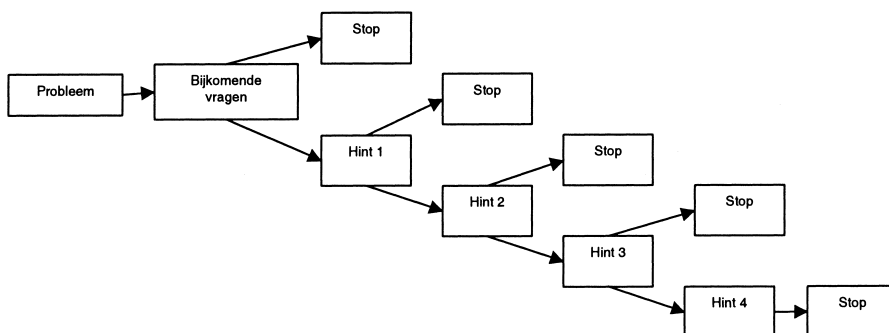
Noot. Juist antwoord: 54 ml, foutief lineair antwoord: 18 ml.

hoger, bijgevolg zal Bart 112 ml verf meer nodig hebben”) en vroegen hem waarom zijn oplossing beter is dan die andere oplossing.

Wanneer een leerling het probleem lineair oploste, gaven we gaandeweg aanvullende hints. Deze hints boden steeds meer steun aan de correcte (niet-lineaire) oplossingsmethode en lokten zo in toenemende mate een cognitief conflict uit bij de leerlingen. Zoals onder meer beschreven in het werk van Piaget en zijn discipelen ontstaat een cognitief conflict wanneer een lerende geconfronteerd wordt met informatie die aanwezige inzichten tegenspreekt. Zulke contradicties hebben een destabiliserend effect op de lerende, waardoor die vaak begint te twijfelen aan deze inzichten en daardoor ontvankelijker wordt voor nieuwe ideeën (Forman & Cazden, 1985; Limón, 2001). In totaal werden vier opeenvolgende hints voorzien. De hints werden ontwikkeld deels op basis van een rationele analyse van de niet-lineaire oplossingsstrategie en deels op basis van ervaringen uit een vooronderzoek (De Bock, Van Dooren, Verschaffel, & Janssens, 2001). Zij waren niet bedoeld als een optimaal leertraject (Simon, 1995), doch enkel om het denkproces van de leerling te achterhalen. Na elke hint werd aan de leerling gevraagd of hij zijn antwoord wilde herzien. Op die manier konden we nagaan hoe volhardend de leerling was in zijn keuze voor het lineaire model. De interviewer stelde nadrukkelijk dat de leerling steeds in alle vrijheid van antwoord kon veranderen, omdat we in het kader van het onderzoek er enkel in geïnteresseerd waren welk antwoord *op het einde* van het interview werd gegeven en hoe de leerling tot dat antwoord was gekomen. Deze manipulatie van

het “experimenteel contract” (Greer, 1997) is essentieel, omdat we uit het vooronderzoek (De Bock et al., 2001), evenals uit een aantal gelijkaardige studies (bijv. Verschaffel, De Corte, & Vierstraete, 1997) hadden geleerd dat leerlingen vanuit een zelfverdedigende reactie soms geneigd zijn hun oorspronkelijk antwoord te blijven verdedigen, zelfs indien ze op een bepaald ogenblik inzien dat het niet langer houdbaar is. Daarom deden we al het mogelijke om een experimenteel “klimaat” te creëren waarin niets de leerling ervan weerhoudt om van oplossing te veranderen wanneer hij denkt dat een andere oplossing beter is. Het interview werd beëindigd wanneer de leerling het niet-lineaire karakter van de opgave doorzag en het correcte antwoord gaf (of wanneer hij, zelfs na de vierde en laatste hint, aan een lineaire oplossing bleef vasthouden). Technisch gezien kan men deze interviews karakteriseren als semi-gestandaardiseerd en adaptief: de interviewer-onderzoeker volgde een vooraf bepaald schema voor het globale verloop van het interview, maar trachtte wel zo flexibel mogelijk in te spelen op spontane reacties van de geïnterviewde (Ginsburg et al., 1982). In Figuur 2 wordt het algemene verloop van het interview schematisch weergegeven.

We geven nu een gedetailleerde beschrijving van de vier hints. Een *eerste hint* bestond erin de leerling te confronteren met een door ons gemanipuleerde frequentietabel die aangaf dat (fictieve) medeleerlingen uit een andere school even vaak de niet-lineaire als de lineaire oplossing hadden gegeven (zie Figuur 3). De idee was dat twee antwoorden die even vaak werden gekozen, twijfel zouden zaaien. Bovendien zouden leerlingen die gewoon uit



Figuur 2. Schematisch verloop van het interview.

Antwoord	% Leerlingen
18 ml	41
54 ml	41
Overige	18

Figuur 3. Frequentietabel aangeboden als eerste hint.

onoplettendheid lineair hadden geantwoord wellicht het correcte antwoord in de tabel herkennen. De interviewer observeerde eerst of de leerling spontaan op zoek ging naar de oorsprong van het alternatieve antwoord. Zoniet, dan werd gevraagd of hij enig idee had waar dat andere antwoord vandaan kwam en of het hem deed twifelen aan zijn oplossing. Ten slotte vroeg de interviewer welk antwoord uiteindelijk de voorkeur van de leerling wegdroeg: het initieel gegeven (lineaire) antwoord, dan wel het door de medeleerlingen even vaak gekozen (niet-lineaire) alternatief, en of hij dat ook kon rechtvaardigen.

Leerlingen die na de eerste (zwakke) hint aan hun oorspronkelijke (lineaire) antwoord vasthielden, kregen een sterkere *tweede hint* aangeboden: de interviewer confronteerde hen met de argumentatie voor de niet-lineaire oplossing van een (weerom fictieve) medeleerling. In het voorbeeld van Figuur 1 luidde de hint als volgt: “Een leerling legde me uit dat als de tekening van de kerstman drie keer groter wordt, niet alleen de hoogte, maar ook de breedte met drie wordt vermenigvuldigd. Je hebt dus negen keer zoveel verf nodig en daarom antwoordde hij 54 ml.” Bovendien noteerde de interviewer de bewerking 9×6 ml naast het antwoord “54 ml” in de frequentietabel van Figuur 3. Hoewel we met deze hint de wiskundige bewerking achter het alternatieve antwoord onthulden, refereerden we nog niet naar het begrip *oppervlakte*. Indien de leerling zijn antwoord niet spontaan herzag, vroegen we wederom of de argumentatie van deze medeleerling twijfels deed rijzen over de eigen oplossing en nodigden we de leerling andermaal uit om zijn voorkeur aan te stippen en deze ook te motiveren.

Als *derde hint* werd aan de overblijvende leerlingen een blad met de oplossingsstrategie getoond van een fictieve medeleerling die de correcte (niet-lineaire) oplossing gaf. Die fictieve leerling had rechthoeken rond de

kleine en de grote kerstman getekend en zo vastgesteld dat deze figuur niet alleen drie keer hoger, maar ook drie keer breder wordt, zodat je negen keer zoveel verf nodig hebt (zie Figuur 4). Deze interventie was geïnspireerd door de studies met collectieve toetsen waarin we hadden vastgesteld dat leerlingen makkelijker het niet-lineaire karakter van een situatie doorzien bij regelmatige dan bij onregelmatige figuren (zie 3. Empirische achtergrond). Nogmaals werd de leerling uitgenodigd een antwoord te geven en dit te motiveren.

Indien ook na de derde hint de voorkeur van de leerling bleef uitgaan naar het incorrecte, lineaire antwoord werd een vierde en laatste hint aangeboden. In deze *vierde hint* werd expliciet het verband gelegd met het meten van oppervlakte van regelmatige en onregelmatige figuren. In het interview voor de nog overblijvende leerlingen werd achtereenvolgens gevraagd: (1) “Kun je de oppervlakte van de twee rechthoeken berekenen?”; (2) “Hoeveel keer groter is de oppervlakte van de grote rechthoek vergeleken met die van de kleine?”; (3) “Hoeveel keer groter is de oppervlakte van de grote kerstman vergeleken met die van de kleine?”; en (4) “Hoeveel keer meer verf heb je nodig om de grote kerstman te schilderen?”. Omdat elk van deze vragen op zich een aanwijzing voor het correcte antwoord inhoudt, liet de interviewer na elke vraag voldoende ruimte voor spontane reacties van de leerling, zodat die desgewenst zijn antwoord op het vraagstuk kon herzien. Na de laatste vraag werd de leerling voor de laatste keer uitgenodigd om een van beide antwoordmogelijkheden te kiezen en deze keuze te motiveren. Wat die keuze ook



Bakkerij Vervoort



Supermarkt Staes

Figuur 4. Rechthoeken aangeboden als derde hint.

Tabel 1

Absoluut en cumulatief aantal leerlingen dat het correcte antwoord gaf in de verschillende fasen van het interview

Leeftijdsgroep		Zonder hints	Na hint 1	Na hint 2	Na hint 3	Na hint 4
12–13-jarigen (<i>N</i> = 20)	Absoluut	0	1	7	5	3
	Cumulatief	0	1	8	13	16
15–16-jarigen (<i>N</i> = 20)	Absoluut	2	1	7	4	2
	Cumulatief	2	3	10	14	16
Totaal (<i>N</i> = 40)	Absoluut	2	2	14	9	5
	Cumulatief	2	4	18	27	32

was, het interview werd beëindigd na deze vierde hint.

4.2 Resultaten

Tabel 1 geeft een overzicht van de aantallen leerlingen die het correcte antwoord gaven in de verschillende fasen van het interview.

Op het moment dat we het niet-lineaire probleem aanboden, slaagden slechts twee leerlingen erin het zonder extra hints correct op te lossen. De andere 38 leerlingen losten het probleem, zoals verwacht, op incorrecte, lineaire wijze op. De gemiddelde oplossingstijd na deze eerste confrontatie met het probleem bedroeg 98.18 seconden, met een standaardafwijking van 73.20 seconden. Zonder de oplossingstijden van de twee leerlingen die zonder hints de correcte oplossing vonden, lagen dit gemiddelde en deze standaardafwijking in dezelfde lijn, namelijk respectievelijk 96.56 en 74.91 seconden. De gemiddelde oplossingstijd is relatief hoog, gegeven dat de meeste leerlingen slechts ongecompliceerde, proportionele berekeningen uitvoerden (zie volgende paragraaf). Het gemiddelde werd evenwel verhoogd door de langere oplossingstijd van enkele leerlingen, wat meteen ook de vrij hoge standaardafwijking verklaart. Deze leerlingen hadden problemen met het manipuleren van de ter beschikking gestelde rekenmachine of dienden het probleem een of meerdere keren te herlezen, omdat ze het niet onmiddellijk hadden begrepen of omdat ze de relevante numerieke gegevens niet hadden genoteerd of gememoriseerd. Geen enkele van de 40 geïnterviewde leerlingen maakte een tekening of enig andere externe representatie van het probleem die verder ging dan het neerschrijven van de drie gegeven getallen.

De 38 leerlingen die initieel een lineaire oplossing gaven, pasten daartoe verschillende strategieën toe (voor meer achtergrond over lineaire oplossingsstrategieën, zie bijvoorbeeld Tournaire en Pulos (1985)). In volgorde van belangrijkheid waren dat de interne-ratiostrategie (de verhouding van de hoogtes van de twee kerstmannen berekenen en die verhouding toepassen op de hoeveelheden verf die nodig zijn om deze figuren te schilderen), de regel-van-drieën (eerst de hoeveelheid verf bepalen nodig om een kerstman met een hoogte van 1 cm te schilderen en vervolgens deze hoeveelheid vermenigvuldigen met de hoogte van de grote kerstman), en de externe-ratiostrategie (de verhouding tussen de hoogte en de hoeveelheid verf bij de kleine kerstman berekenen en die verhouding toepassen op de grote kerstman).

De meeste leerlingen toonden zich tamelijk tot heel zeker dat hun oplossingswijze de juiste was: op de vijfpuntsschaal duiden 20 leerlingen aan dat hun oplossing *zeker correct* was, 16 dat ze *waarschijnlijk correct* was en de resterende 4 dat ze *geen idee* hadden. Merkwaardig genoeg duidde één van de twee leerlingen die zonder bijkomende hints het probleem correct oploste *geen idee* aan, terwijl de andere het bij *waarschijnlijk correct* hield. Hoewel de meeste leerlingen die lineair redeneerden dus vrij zeker waren van hun oplossing, hadden zij grote moeite om die uit te leggen of te rechtvaardigen. Zij vonden de oplossing erg evident en hielden geen enkele andere oplossing voor mogelijk. Leerlingen die op de vijfpuntsschaal *zeker correct* aanduiden (maar het probleem incorrect hadden opgelost), motiveerden dit spontaan vaak als volgt: “Het is een gemakkelijk probleem. Ik gebruikte de drie getallen en de formule.

Dus moet het wel correct zijn.”; “Dat is toch logisch. Het kan niet anders, toch? De kerstman is *hoger*, dus heb je *meer* verf nodig. En hij is *drie keer* hoger, dus heb je *drie keer* zoveel verf nodig.” Leerlingen die niet *zeker correct* op de vijfpuntsschaal hadden aangegeven, beschreven de bron van hun twijfels meestal op een heel algemeen niveau, bijvoorbeeld “Ik ben niet helemaal zeker omdat ik het probleem niet zorgvuldig gelezen heb.”; “Misschien heb ik een rekenfout gemaakt. Dat kan altijd gebeuren, niet?”; “Het was het eerste dat in mij opkwam, maar misschien paste ik een verkeerde procedure toe.”; “Je kan nooit absoluut zeker zijn.”; “Wiskunde is niet mijn sterkste vak, dus ben ik niet zeker dat mijn oplossing juist is.” Na aanbieding van hint 1 (in de vorm van de frequentietabel van Figuur 3) ruilden slechts 2 van de overgebleven 38 leerlingen hun lineair antwoord in voor het niet-lineaire. Op de vraag waarom zij het probleem eerst op een andere manier hadden opgelost, antwoordden deze twee leerlingen dat ze niet aan die andere (niet-lineaire) oplossing hadden gedacht en dat zij geen aandacht hadden geschonken aan de gegeven tekeningen. Ook bij het merendeel van de 36 leerlingen die vasthielden aan de lineaire oplossing, lokte de frequentietabel een cognitief conflict uit: zij gingen actief op zoek waar de andere frequent gekozen oplossing vandaan zou kunnen komen. Vaak ging het evenwel om een zeer oppervlakkige zoektocht (bijv. via het ‘at random’ uitvoeren van een aantal bewerkingen met de drie gegeven getallen). Van deze 36 leerlingen ontdekten er 13 zo dat de andere oplossing tot stand was gekomen door te vermenigvuldigen met negen (of tweemaal met drie), maar dat deed hen niet twijfelen aan de eigen oplossing (“Ze hebben *twee* keer met drie vermenigvuldigd! Zie je, ze hebben een fout gemaakt. Ik blijf bij mijn antwoord.”). Meestal waren de argumenten van de leerlingen die hun initiële, lineaire oplossing trouw bleven weerom zeer algemeen en oppervlakkig (“Ik ben niet zo goed in wiskunde.”; “Je blijft best altijd bij je eerste gedachte.”). Daarnaast werd ook geregeld verwezen naar het zelf-evidente karakter van het lineaire antwoord (“Ik denk dat mijn oplossing veel logischer is.”; “Het is evident, je kan het niet op een an-

dere manier doen.”), terwijl het niet-lineaire antwoord als “tegenintuïtief” of “onlogisch” werd afgedaan (“Volgens mij is dat een eigenaardige redenering.”; “Dat lijkt me veel te vergezocht.”; “54 ml is veel te veel.”).

Na het aanbieden van hint 2 besloten 14 van de overgebleven 36 leerlingen om van antwoord te veranderen. De argumentatie van de fictieve medeleerling bracht bij hen het juiste inzicht teweeg dat om dezelfde vorm te behouden niet alleen de lengte, maar ook de breedte van de tekening moet verdrievoudigen, zodat de oppervlakte (en de benodigde hoeveelheid verf) vernegenvoudigt. Aan deze 14 leerlingen werd dan gevraagd waarom ze het probleem aanvankelijk op lineaire wijze hadden opgelost. Hun antwoorden op deze vraag konden in drie groepen worden ingedeeld. Een eerste groep leerlingen erkende dat zij niet grondig over het probleem had nagedacht, maar daarentegen onmiddellijk, routinematig en onbewust (een leerling gebruikte de term *instinctief*) lineair had gerekeneerd (“Ik was op die manier begonnen en ik sluit me dan als het ware af van die andere redenering. Dan geraakt er bij mij geen andere redenering meer in.”; “Er kwam niets anders in mij op, ook omdat het de gemakkelijkste manier is.”). Een tweede groep leerlingen erkende dat zij de breedte van de kerstman gewoon over het hoofd had gezien, omdat in de formulering van het probleem enkel sprake is van de hoogte (“Ik keek enkel naar de tekst ... een beetje naar de tekeningen, maar vooral naar de tekst ... en daarin staat niets over de breedte.”; “In de tekst is alleen de hoogte gegeven. Als zowel de hoogte en de breedte gegeven waren, dan zou ik waarschijnlijk een andere formule hebben toegepast.”). Een derde groep verklaarde de breedte *bewust* te hebben genegeerd, omdat die niet expliciet in de opgave vermeld wordt (“Ik dacht wel dat ook de breedte van belang is, maar omdat die niet in de tekst staat, besliste ik enkel met de hoogte te werken”).

Terwijl 14 leerlingen na deze tweede (sterke) hint van antwoord veranderden, bleven nog steeds 22 leerlingen vasthouden aan hun oorspronkelijk lineaire antwoord, hoewel ze dit vaak niet (goed) konden rechtvaardigen. Ook de argumenten van deze leerlingen konden in drie groepen worden ingedeeld.

Een eerste groep verklaarde de niet-lineaire oplossing ernstig te hebben overwogen, maar uiteindelijk toch te hebben gekozen voor de lineaire, omdat ze niet begreep dat bij een gelijkvormige vergroting alle lengtematen in dezelfde mate veranderen (“De hoogte en de breedte hebben niet zoveel met elkaar te maken.”; “De breedte verandert ook, maar je kan niet weten hoeveel.”; “Mag je er wel van uitgaan dat de kerstman dan ook drie keer zo breed is?”). Andere leerlingen in deze eerste groep begrepen dit principe wel, maar worstelden met de kwadratische impact van een gelijkvormige vergroting op de oppervlakte (of op de benodigde hoeveelheid verf die hier als indirecte maat voor oppervlakte fungeert) (“Zes ml is voor de hele kerstman, niet alleen voor de hoogte. En 18 ml is ook voor de volledige grote kerstman, voor de hoogte zowel als voor de breedte.”). Voor een tweede groep van leerlingen vormde de argumentatie van de fictieve medeleerling de directe aanleiding tot het (her)formuleren van hun lineaire misvatting op een veel duidelijker en overtuigender wijze dan voordien. De reactie van deze leerlingen leek niet geïnspireerd door enige mentale representatie van de probleemsituatie, maar eerder door de toepassing van lineariteit in gelijk welke situatie (“Het is juist dat hij drie keer hoger en drie keer breder wordt. Maar dat betekent net dat *alles* drie keer meer is. Ook de hoeveelheid verf.”). Een derde groep leerlingen rechtvaardigde de keuze voor de lineaire oplossing door te verwijzen naar een aantal impliciete regels die zij hanteert bij het oplossen van vraagstukken in het algemeen, en over de rol die tekeningen daarbij kunnen spelen (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000). Deze leerlingen hielden er vaak simplistische en erg “schoolse” overtuigingen op na over het oplossen van wiskundevraagstukken, bijvoorbeeld dat je elk vraagstuk kan oplossen door een paar berekeningen op de gegeven getallen uit te voeren of dat dagelijkse kennis of context-gerelateerde beschouwingen geen rol mogen spelen bij het oplossen van schoolvraagstukken. Soms kwamen deze opvattingen ook naar voren in combinatie met argumenten uit de eerste twee groepen. Bijvoorbeeld: “Ik denk dat die leerling het te moeilijk maakt voor een vraagstuk.”; “Je mag enkel gegeven getallen ge-

bruiken in je oplossing.”; “Het vraagstuk zegt helemaal niets over de breedte, dus dat kan onmogelijk juist zijn.” Typerend is ook dat deze leerlingen de conflicterende informatie uit de tekeningen verwerpen om uit het conflict te geraken (“Op de tekening is de kerstman breder, maar niet in het vraagstuk. Dat gaat enkel over de hoogte.”).

De aanbidding van hint 3 in de vorm van de oplossingsstrategie waarbij de kerstmannen werden omkaderd door rechthoeken (Figuur 4) werkte voor 9 van de 22 overblijvende leerlingen als een ware ‘Gestaltwchsel’ (Wertheimer, 1945). Zodra deze derde hint werd aangeboden, maakten deze negen leerlingen plots een omslag in hun redenering en kozen ze onmiddellijk en resoluut voor de niet-lineaire oplossing (“Inderdaad, hij is negen keer groter, omdat de kleine rechthoek ook negen keer in de grote past. Met de rechthoeken begrijp ik het. Ik ben zeker nu. Het moet 54 ml zijn.”). De in voorgaande interviewfasen vaak geuite twijfels over *hoeveel* de breedte toenam, verdwenen bij deze leerlingen als sneeuw voor de zon. De reacties op de vraag waarom zij aanvankelijk een lineaire oplossing hadden voorgesteld en daaraan zolang vasthielden, liepen grotendeels parallel met die van de leerlingen die na de tweede hint het correcte antwoord gaven, en laten we hier derhalve onbesproken.

De 13 leerlingen die na deze derde hint vasthielden aan het lineaire antwoord, maakten eerder algemene beschouwingen over hoe vraagstukken volgens hen moeten worden opgelost (“Je mag het antwoord op een vraagstuk niet te ver zoeken.”; “Het is mogelijk, maar de breedte wordt niet in de opgave vermeld.”) en de ondergeschikte rol die tekeningen daarbij in hun ogen spelen (“Het is negen keer voor de tekeningen, doch drie keer in het vraagstuk.”; “Tekeningen zijn minder nauwkeurig.”; “In wiskunde mag je de oplossing nooit op een tekening baseren. Je moet je op formules baseren.”). Anderen gaven nog nadrukkelijker uiting aan hun lineaire misvatting (“De kleine kerstman past drie keer in de grote. Bij de rechthoeken is dat hetzelfde. Drie keer zoveel oppervlakte, dus drie keer zoveel verf.”). Van deze 13 leerlingen formuleerden er 2 in deze interviewfase voor het eerst een wel erg bizarre mis-

vatting, namelijk dat de oppervlakte van rechthoeken anders toeneemt dan die van ingeschreven onregelmatige figuren: “Wat ze met de rechthoeken doen is correct: ze vergroten in twee richtingen. Maar binnen de rechthoeken staat een *onregelmatige* figuur. En dat is anders. Kijk hier en hier!” [de leerling wijst naar de “lege” gedeelten in de rechthoeken].

Ten slotte na hint 4, waarin expliciet het verband werd gelegd met het meten van oppervlakte van regelmatige en onregelmatige figuren, wisselden nog 5 van de overgebleven 13 leerlingen hun oorspronkelijk lineaire antwoord in voor het niet-lineaire. Alle vijf berekenden zij op een correcte manier de oppervlakte van beide rechthoeken en, tot hun verbazing, stelden zij vast dat de oppervlakte van de grote rechthoek inderdaad negen keer die van de kleine is. Drie van deze leerlingen veralgemeenden dit inzicht spontaan tot de ingeschreven “onregelmatige” kerstmannen en tot de benodigde hoeveelheden verf om ze te schilderen. De twee anderen trokken deze conclusie slechts nadat de interviewer hen expliciet vroeg de hoeveelheden verf te vergelijken om beide *rechthoeken* te schilderen. Bovendien nam een finale keuze voor het correcte antwoord niet noodzakelijk elke twijfel weg (“OK, het is negen keer zoveel verf. Maar ik begrijp nog steeds niet waarom mijn eerste oplossing fout is.”).

Zelfs na vier (in sterkte toenemende) hints hielden dus nog steeds acht leerlingen vast aan hun oorspronkelijke lineaire redenering. Zij herhaalden vooral, en vaak met nog grotere nadruk, hun stereotiepe opvattingen over wiskunde in het algemeen en over het oplossen van vraagstukken in het bijzonder (“Voor de tekeningen is het negen keer, maar dat doet niet terzake. In een vraagstuk word je verwacht te werken met de gegevens die in de tekst staan. Tekeningen zijn minder nauwkeurig.”). Enkele leerlingen die tot het einde van het interview vasthielden aan de lineaire oplossing, bleken te worstelen met de rol van “hoeveelheid verf” als indirecte oppervlaktemaat (“Het gaat over ‘verbruik van verf’, je mag het dus niet via oppervlakte oplossen.”); “Voor de oppervlakte is het negen keer, maar wat de hoeveelheid verf betreft, ben ik niet zo

zeker. Milliliter verwijst niet naar oppervlakte, maar eerder naar volume.”).

5 Conclusies en discussie

Deze interviewstudie bevestigt de hardnekkigheid van het onterecht lineair redeneren van 12- tot 16-jarigen bij het oplossen van problemen over lengte en oppervlakte van meetkundige figuren. Bijna alle leerlingen gingen onmiddellijk uit van een lineaire (in plaats van een kwadratische) relatie tussen de lengte en de oppervlakte. Zelfs na een of meerdere (sterke) hints bleven vele leerlingen kiezen voor het lineaire model of ondervonden zij grote moeilijkheden om het alternatieve, correcte model naar waarde te schatten.

We verkregen ook waardevolle informatie over de redeneerprocessen die aan de basis liggen van het onterecht lineair redeneren van de leerlingen. Globaal gesproken kunnen de elementen in deze redeneerprocessen in vier grote categorieën worden ingedeeld. De dominantie van elk element varieerde niet enkel van leerling tot leerling, maar ook naar gelang de fase van het interview waarin een leerling zich bevond.

Een eerste categorie verwijst naar het intuïtieve karakter (in de betekenis die eraan gegeven werd door Fischbein, 1987) van het lineaire model: het heeft een zelf-evident karakter en wordt op een spontane, haast onbewuste wijze toegepast. Daardoor ervaart de leerling geen nood om z'n keuze voor dit model te rechtvaardigen. Intuïtieve modellen blijken ook in hoge mate resistent tegen formeel onderwijs waarin men de dominantie van het model tracht te doorbreken. Niet-lineaire modellen worden daarentegen door leerlingen als tegenintuïtief of onlogisch ervaren. Een parallel interpretatiekader voor dit soort redeneerwijzen vormt de theorie van de “intuïtieve regels” zoals die beschreven werd door Stavy en Tirosh (2000). Uit het onderzoek van deze auteurs komt naar voren dat leerlingen zich vaak laten leiden door algemene intuïtieve regels wanneer zij geconfronteerd worden met probleemsituaties in wiskunde en wetenschappen. Twee zulke regels duiken geregeld op bij vergelijkingsopgaven: “Hoe meer *A*, hoe meer *B*” en “Als

A hetzelfde, dan B hetzelfde”. Bij het vergelijken van de oppervlakten/hoeveelheden verf bij het kerstmannenprobleem is een “Hoe meer A, hoe meer B”-redenering heel natuurlijk en ook correct (hoe *meer* hoogte, hoe *meer* oppervlakte/verf), maar ook een reactie in overeenstemming met “Als A hetzelfde, dan B hetzelfde” is mogelijk en werd in een aantal gevallen bijna letterlijk verwoord (beide kerstmannen hebben *dezelfde* vorm, dus alles wordt met *dezelfde* factor vermenigvuldigd).

Een tweede categorie vormt de bewuste en weloverwogen toepassing van het lineaire model. Deze categorie verschilt van de eerste in de zin dat leerlingen het lineaire model niet intuïtief, impliciet of automatisch toepassen. Een aantal leerlingen blijkt er echt van overtuigd te zijn (of zelfs te worden gedurende het interview) dat elk verband tussen twee grootheden in feite een lineair verband is. Zij beredeneren soms expliciet dat lengte en breedte allebei met factor drie toenemen, zodat ook de oppervlakte en de hoeveelheid verf met die factor toenemen. Deze leerlingen zijn er absoluut van overtuigd dat het lineaire model de juiste keuze is.

Ten derde bracht deze interviewstudie een aantal hiaten in de meetkundige kennis van de leerlingen aan het licht. In het bijzonder kwam naar voren dat heel wat 12- tot 16-jarige leerlingen worstelen met concepten zoals gelijkvormigheid of oppervlakte, vooral met betrekking tot onregelmatige figuren. Bijvoorbeeld: de overtuiging dat een gelijkvormige vergroting anders werkt op onregelmatige dan op regelmatige figuren, het verwarren van oppervlakte met volume of het niet herkennen van de hoeveelheid verf als een indirecte maat voor oppervlakte. Deze hiaten verhinderden dat leerlingen de fout in hun redenering ontdekten en de validiteit van de alternatieve oplossing inzagen.

Ten vierde bleken heel wat leerlingen behept met inadequate opvattingen over het oplossen van wiskundige problemen zoals: je kan je beter baseren op formules dan op tekeningen, je blijft best altijd bij je eerste idee, je mag enkel de informatie gebruiken die expliciet in de opgave vermeld wordt, vraagstukken hebben niets met de realiteit te maken, bij het oplossen van een vraagstuk

wordt enkel verwacht dat je een of enkele standaardbewerkingen uitvoert. In plaats van zich op basis van de gegeven tekeningen een mentale voorstelling te maken bij het vraagstuk, negeerden vele leerlingen de tekeningen, omdat zij ze niet “vertrouwden”. Daardoor misten deze tekeningen bij die leerlingen ook hun doel, namelijk het garanderen van een correcte interpretatie van het vraagstuk. In combinatie met de misvatting dat je voor de oplossing van een vraagstuk enkel de getallen mag betrekken die in de opgave genoemd worden, leidde dit vaak tot een incorrecte, ééndimensionale interpretatie van het vraagstuk. Deze inadequate opvattingen zijn wellicht een (neven)product van het stereotiepe opgavenaanbod en het bijhorende wiskundeonderwijs dat de leerlingen op school kregen (Verschaffel et al., 2000).

De vier bovengenoemde verklarelementen kunnen in verband gebracht worden met de vier componenten die thans vaak onderscheiden worden in modellen van vaardig (wiskundig) leren en probleemoplossen: vakinhoudelijke of domeinspecifieke kennis, heuristische methoden, metacognitieve kennis en vaardigheden, en affectieve aspecten (De Corte, 1995; Schoenfeld, 1992; Verschaffel, 1995). Vakinhoudelijk rezen er problemen omwille van de aangehaalde hiaten in meetkundige basiskennis. Vooral het principe dat aan de basis ligt van gelijkvormige vergrotingen bleken vele leerlingen onvoldoende te beheersen, waardoor ze de erop gebaseerde niet-lineaire oplossingsstrategie niet helemaal vertrouwden. Heuristieken, zoals bijvoorbeeld het maken van een tekening of het gebruiken van een tekening, bieden weliswaar niet de garantie dat iemand de correcte oplossing vindt, maar verhogen de kans daartoe wel aanzienlijk (Pólya, 1945). Uit ons onderzoek kwam naar voren dat de meeste leerlingen dergelijke heuristieken zelden of nooit toepassen, zoals onder meer bleek uit de geringe aandacht die zij besteedden aan de gegeven tekeningen. Deze vaststelling is in overeenstemming met een aantal recentere onderzoeken (Lesh, 1985; Schoenfeld, 1992; Van Essen & Hamaker, 1990) waarin ook werd vastgesteld dat probleemoplossers die een probleem verkeerd interpreteren of de onderliggende domeinspecifieke kennis

ervan missen, in het algemeen weinig hebben aan Pólya's heuristieken. Opmerkelijk is verder dat de leerlingen weinig of geen meta-cognitieve strategieën toepasten: in plaats van het probleem eerst grondig te analyseren en het antwoord nadien te controleren, werkten de leerlingen grotendeels op de "automatische piloot" en interpreteerden zij de aanvullende informatie die de interviewer aanbod slechts in functie van hun eigen antwoord. Ook dat hoeft allicht niet zoveel verbazing te wekken, als we aannemen dat de leerlingen op school (nog) vaak een opgavenaanbod krijgen waarbij het in de overgrote meerderheid van de gevallen volstaat om af te gaan op oppervlakkige opgavekenmerken (Verschaffel et al., 2000). De betekenisvolle invloed van de vierde component van vaardig (wiskundig) leren en probleemoplossen, namelijk de affectieve aspecten en overtuigingen die internationaal vooral in de laatste decennia meer in de onderzoeksbelangstelling is gekomen (Leder, Pehkonen, & Törner, 2003; McLeod, 1994), werd in deze studie vooral op negatieve wijze bevestigd: de naïeve en onjuiste overtuigingen van vele leerlingen over het oplossen van wiskundige problemen vormden vaak een obstakel dat een vaardig oplossingsproces in de weg stond.

De volgende fase van ons onderzoeksproject bestaat erin na te gaan hoe we leerlingen beter kunnen wapenen tegen de valstrik van het onterecht lineair redeneren. Een experimentele, computerondersteunde leeromgeving gericht op het leren onderscheiden van proportionele en niet-proportionele situaties, is thans in ontwikkeling (Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, & Verschaffel, 2003). Een belangrijke reden voor de keuze van een computeromgeving is dat die meer mogelijkheden biedt om de leerlingen een aantal 'tools' te geven om de beoogde problemen aan te pakken (bijvoorbeeld het omkaderen van een onregelmatige figuur, het betegelen van een regelmatige figuur met kleinere versies ervan, het "virtueel" in stukken knippen, manipuleren, uittrekken, ... van een figuur). Bovendien kan hen langs die weg onmiddellijk feedback worden gegeven op hun antwoord (bijvoorbeeld door het vertonen van een animatie die op een "sprekende" wijze laat zien of hun oplossing al dan niet correct

is). Naast de bevindingen van de vroegere studies met collectieve toetsen en de vier verklarende elementen die uit de hier gerapporteerde interviewstudie naar voren kwamen, vormen de algemeen onderwijskundige onderzoeksliteratuur rond krachtige leeromgevingen (bijv. Brown & Newman, 1989; De Corte, 1996) samen met de vakdidactisch geïnspireerde literatuur rond (leren) vaardig wiskundig probleemoplossen (bijv. Grave-meijer, 1994; National Council of Teachers of Mathematics, 1989, 2000) een belangrijke inspiratiebron voor de ontwikkeling van deze computergestuurde leeromgeving.

Noten

- 1 Deze publicatie is tot stand gekomen in het kader van de Onderzoekstoelage OT-2000-10 van het Onderzoeksfonds van de Katholieke Universiteit Leuven.
- 2 Het is de idee van proportionaliteit die als eerste voor de geest komt, ongetwijfeld omdat er geen eenvoudiger functies bestaan dan de lineaire.

Literatuur

- Berté, A. (Réd.). (1987; 2^{de} édition, 1992). *Enseignement des mathématiques utilisant la 'réalité' (Tome 1)*. Bordeaux: IREM.
- Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S. E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing and mathematics. In L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning and instruction. Essays in honor of Robert Glaser* (pp. 453-494). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- De Bock, D., Van Dooren, W., Verschaffel, L., & Janssens, D. (2001). Secondary school pupils' improper proportional reasoning: An in-depth study of the nature and persistence of pupils' errors. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 313-320). Utrecht, The Netherlands.
- De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1997). De lineariteitsillusie bij het oplossen van meetkunde problemen door leerlingen van het

- secundair onderwijs. *Pedagogische Studiën*, 74, 271-280.
- De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1999). Some reflections on the illusion of linearity. In P. Radelet-De Grave (Ed.), *Proceedings of the Third European Summer University on History and Epistemology in Mathematical Education* (Vol. 1, pp. 153-167). Leuven/Louvain-la-Neuve, Belgium.
- De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (2002). The effects of different problem presentations and formulations on the illusion of linearity in secondary school students. *Mathematical Thinking and Learning*, 4(1), 65-89.
- De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., Van Dooren, W., & Claes K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students' performance? Negative evidence from a study on modelling non-linear geometry problems. *Learning and Instruction*, 13(4), 441-463.
- De Corte, E. (1995). Fostering cognitive growth: A perspective from research on mathematics learning and instruction. *Educational Psychologist*, 30(1), 37-46.
- De Corte, E. (1996). Actief leren binnen krachtige onderwijsleeromgevingen. *Impuls*, 26(4), 145-156.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Reidel.
- Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 11-50.
- Forman, E. A., & Cazden, C. B. (1985). Exploring Vygotskian perspectives in education. The cognitive value of peer interaction. In J. V. Wertsch (Ed.), *Culture, communication, and cognition: Vygotskian perspectives* (pp. 323-347). New York: Cambridge University Press.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
- Ginsburg, H. P., Kossan, N. E., Schwartz, R., & Swanson, D. (1982). Protocol methods in research on mathematical thinking. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 7-47). New York: Academic Press.
- Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute, University of Utrecht.
- Greca, I. M., & Moreira, M. A. (2000). Mental models, conceptual models, and modelling. *International Journal of Science Education*, 22, 1-11.
- Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classroom: The case of word problems. *Learning and Instruction*, 7(4), 293-307.
- Leder, G. C., Pehkonen, E., & Törner, G. (Eds.). (2003). *Beliefs: A hidden variable in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- Lesh, R. A. (1985). Conceptual analyses of problem-solving performance. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 309-330). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Limón, M. (2001). On the cognitive conflict as an instructional strategy for conceptual change. A critical appraisal. *Learning and Instruction*, 11(4-5), 357-380.
- McLeod, D. B. (1994). Research on affect and mathematics learning in the *JRME*: 1970 to the present. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 637-647.
- Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap. (1997). *Gewoon basisonderwijs: Ontwikkelingsdoelen en eindtermen. Besluit van mei '97 en decreet van juli '97*. Brussel: Departement Onderwijs, Centrum voor Informatie en Documentatie.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Outhred, L. N., & Mitchelmore, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 144-167.
- Perkins, D. N., & Simmons, R. (1988). Patterns of misunderstanding: An integrative model for science, math, and programming. *Review of Educational Research*, 58, 303-326.
- Pólya, G. (1945; 2nd edition, 1957). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Rogalski, J. (1982). Acquisition de notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales (longueur, surface). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(3), 343-396.
- Rouche, N. (1989). Prouver: amener à l'évidence

- ou contrôler des implications? In Commission inter-IREM Histoire et Epistémologie des Mathématiques (Ed.), *La démonstration dans l'histoire* (pp. 8-38). Lyon: IREM.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.
- Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (mis-)understand science and mathematics: Intuitive rules*. New York: Teachers College Press.
- Székely, G. J. (1986). *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics*. Dordrecht: Reidel.
- Tierney, C., Boyd, C., & Davis, G. (1990). Prospective primary teachers' conceptions of area. In G. Booker, P. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 307-314). Oaxtepec, Mexico.
- Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 181-204.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 113-138.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2003). Remedying Secondary school students' illusion of linearity: A teaching experiment. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA* (Vol. 4, pp. 331-338). Honolulu, U.S.
- Van Essen, G., & Hamaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research*, 83(6), 301-312.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press.
- Verschaffel, L. (1995). Het leerproces van leerlingen. In J. Lowyck & N. Verloop (Eds.), *Onderwijskunde. Een kennisbasis voor professionals* (pp. 153-188). Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Verschaffel, L., De Corte, E., & Vierstraete, H. (1997). Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school: A teaching experiment with fifth graders. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 577-601.
- Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.
- Vosniadou, S. (1999). Conceptual change research: State of the art and future directions. In W. Schnotz, S. Vosniadou, & M. Carretero (Eds.), *New perspectives on conceptual change* (pp. 3-13). Amsterdam: Pergamon.
- Vosniadou, S. (2001). Designing learning environments to promote conceptual change in science. *Learning and Instruction*, 11, 381-419.
- Wandersee, J. H., Mintzes, J. J., & Novak, J. D. (1988). Research on alternative conceptions in science. In D. L. Gabel (Ed.), *Handbook of research on science teaching and learning* (pp. 177-210). New York: Macmillan.
- Wertheimer, M. (1945). *Productive thinking*. New York: Harper & Brothers.

Manuscript aanvaard: 5 november 2003

Auteurs

Dirk De Bock is docent aan de Europese Hogeschool Brussel (EHSAL) en is wetenschappelijk medewerker aan de Faculteit Psychologie en Pedagogische Wetenschappen van de Katholieke Universiteit Leuven.

Wim Van Dooren is aspirant van het Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek (FWO) Vlaanderen en is wetenschappelijk medewerker aan de Faculteit Psychologie en Pedagogische Wetenschappen van de Katholieke Universiteit Leuven.

Dirk Janssens is hoogleraar aan de Faculteit Wetenschappen en verantwoordelijke voor de Academische Lerarenopleiding Wiskunde van de Katholieke Universiteit Leuven.

Lieven Verschaffel is gewoon hoogleraar aan de Faculteit Psychologie en Pedagogische Wetenschappen van de Katholieke Universiteit Leuven.

Correspondentieadres: Dirk De Bock, Centrum voor Instructiepsychologie en -technologie, Katholieke Universiteit Leuven, Vesaliusstraat 2, B-3000 Leuven. E-mail: dirk.debock@avl.kuleuven.ac.be

Abstract

Improper linear reasoning in secondary school students: an in-depth study

A series of recent studies in which collective tests were administered to large groups of 12 to 16 year old students demonstrated that they have an almost irresistible tendency towards improper linear reasoning in problems about enlarging and reducing geometrical figures. Moreover, these students proved to be almost insensible to diverse types of help that were provided in these studies. This article reports on an in-depth study by means of semi-standardized individual interviews aimed at unravelling the thinking processes underlying students' improper linear reasoning. Four essential factors explaining the occurrence and resistance of this type of reasoning were revealed, namely: (a) the intuitiveness of the linear model; (b) the conviction that a relation between quantities is always linear; (c) particular shortcomings in the basic geometrical knowledge; and (d) inadequate habits and beliefs about mathematical problem solving.