

**Met Sprongen Vooruit. Een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars in het getalengebied tot 100 - een onderwijsexperiment**

Academisch proefschrift Universiteit Utrecht, Freudenthal Instituut, 2001, 254 pagina's  
ISBN 90-73346-46-0

Julie J.M. Menne

De Onderwijsraad noemde onlangs het Freudenthal Instituut een goed voorbeeld van een *kennisgemeenschap*, waar onderzoekers en docenten regelmatig contact hebben om hun onderzoeksresultaten en praktijkervaringen uit te wisselen. Men doet dit onder andere door veel nadruk te leggen op *ontwikkelingsonderzoek* gericht op de ontwikkeling en verbetering van onderwijsmethoden. Het voorliggende proefschrift vormt daarvan een goede illustratie. Het onderzochte oefenprogramma ondersteunt de introductie van een nieuwe rekenstrategie in de onderbouw op basisscholen met relatief veel zwakke en allightone rekenaars.

Deze nieuwe rekenstrategie vloeit voort uit de ingrijpende vernieuwing van het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs, waaraan onder leiding van prof. Hans Freudenthal 30 jaar geleden begonnen werd in de vorm van zogenaamde Wiskobasprojecten. Later werd deze vernieuwing onder leiding van prof. Adri Treffers en collega Ed de Moor uitgebouwd naar het niveau van het curriculum en de rekenmethodes. De recente TAL-brochures van het Freudenthal Instituut schetsen op een duidelijke wijze dit uitgewerkte raamwerk van Tussendoelen Annex Leerlijnen voor de onderbouw en de bovenbouw van de basisschool. Dit proefschrift biedt theoretische en empirische verantwoording van een der centrale aspecten, namelijk een nieuwe rekenstrategie gericht op inzichtelijk en flexibel hoofdrekenen.

Internationaal ziet men soortgelijke vernieuwingen op gang komen. Zo is in Engeland (onder impuls van de nieuwe Labour-regering) onlangs het hoofdrekenen ingevoerd met meer aandacht voor handige rekenstrategieën. In het Engelse onderwijs was men erg

lang het schriftelijk onder-elkaar-rekenen als belangrijkste formele procedure blijven aanleren. Geeft men nu een voorbeeldsom zoals  $12 + 35$  aan Engelse leerkrachten, dan zullen deze in meerderheid de volgende oplossingsstrategie verwoorden:  $10 + 30 = 40$ ,  $2 + 5 = 7$ , samen  $40 + 7 = 47$ . Uit eigen ervaring kan ik hieraan toevoegen dat men grote ogen opzet bij de mededeling dat de meeste Nederlandse kinderen de som  $12 + 35$  zo nooit zullen uitrekenen en een handiger en kortere strategie zullen volgen: eerst de getallen om-draaien, en dan  $35 + 10 = 45$ ,  $45 + 2 = 47$ . De eerste strategie wordt genoemd het Splitsen (in tientallen en eenheden) en volgt de formele getalpositiestructuur, zoals dat eigenlijk vroeger ook bij het schriftelijk onder-elkaar-rekenen gebeurde. Bij de tweede strategie wordt als het ware "gesprongen" langs een denkbeeldige getallenlijn volgens een ander *sequentieel* model.

Met deze illustratie is meteen aangegeven welke vakdidactische vernieuwing in dit proefschrift centraal staat. Deze efficiënte en flexibele sequentiële manier van rekenen was als strategie van (ervaren) hoofdrekenaars reeds langer bekend. Het Splitsen ligt echter als aanpak voor de hand wanneer de getalstructuur met blokjes (eenheden) en staven (tientallen) wordt geconcretiseerd, zoals in veel rekenonderwijs gebruikelijk was/is. Bij de operatie Optellen voldoen beide strategieën. Echter, bij moeilijker aftreksommen, zoals  $63 - 28$ , blijkt het splitsen gevoeliger voor fouten: bijvoorbeeld eerst  $60 - 20 = 40$  en dan de 'false reversal'  $8 - 3 = 5$  (fout antwoord 45), omdat het kind tegen de impasse  $3 - 8 = ?$  aanloopt en deze niet op een andere manier weet op te lossen. Uit onderzoek is gebleken dat de nieuwe sequentiële strategie hier minder problemen geeft en vlotter verloopt:  $63 - 20 = 43$ ,  $43 - 8 = 35$ . Daarom is deze strategie op voorstel van het Freudenthal Instituut (Treffers en De Moor) vanaf de negentiger jaren in het Nederlandse rekenonderwijs meer benadrukt, met steun van de (lege) getallenlijn als nieuw model en de kralenketting als voorloper op concreet niveau. De strategie wordt aangeduid als Erbij - of

Eraf Rijken, maar wordt ook vaak de Sprongmethode genoemd.

Tot zover de context van dit proefschrift. Het onderwijstheoretisch kader komt aan bod in hoofdstuk 1, aan de hand van de vijf principes van de “realistische” theorie (Treffers) van het reken-wiskundeonderwijs. Ook wordt een vergelijking gemaakt met andere didactische benaderingen, waarvan de “structuralistische” (Piaget) de meest bekende is die zich via de nadruk op concretisering van getallen en rekenoperaties (door middel van staven en blokjes, en andere hulpmiddelen) al eerder afzette tegen de traditionele “mechanistische” benadering van het cijferend (onder-elkaar-) rekenen volgens vaste procedures. Beide moderne didactieken maken meer ruimte voor informele strategieën en de eigen inbreng van kinderen, en stimuleren daardoor het gevarieerde en flexibele (hoofd)rekenen. Een groot verschil is echter, dat de structuralistische didactiek blijft vasthouden aan de formele getalstructuur (tientallen/eenheden) als uitgangspunt - en daarmee aan het Splitsen als strategie. De realistische didactiek kiest er thans duidelijk voor om nog meer aan te sluiten bij het Tellen als informeel begingedrag van kinderen en deze natuurlijke strategie niet te onderdrukken (Piaget), maar juist verder te ontwikkelen (Treffers) via allerlei speelse telactiviteiten voor kleuters (zie TAL-brochure) en qua niveau te verhogen en te verkorten naar het meer gestructureerde Rijken op de kralenketting en het tellen in “sprongen” van 5 en 10 op de getallenlijn (zie TAL-brochure en dit proefschrift).

Wanneer via deze nieuwe leerlijn de rekenoperaties optellen en aftrekken tot 100 worden beheerst (in groep 4), dan wordt vervolgens het Splitsen geïntroduceerd als belangrijke alternatieve strategie, en als voorbereiding op het cijferend rekenen in de bovenbouw. Bijkomend argument is dat de beruchte aftrekfouten bij het Splitsen (vgl. hierboven) nu eerder door de kinderen zelf kunnen worden gecorrigeerd door de som even met de alternatieve Sprongmethode uit te rekenen.

Deze vakdidactische argumentatie in hoofdstuk 1 is boeiend om te lezen, en belangrijk, omdat deze nieuwe realistische leer-

lijn het bovengenoemde strategieonderscheid duidelijker profileert, en daarmee een nieuwe “stap vooruit” zet ten opzichte van de structuralistische didactiek. Niet iedereen is het hiermee eens, en dat komt in de discussie aan de orde. Jammer is echter dat de psychologische kant onderbelicht blijft. Deze blijft nu beperkt tot de recente hypothese dat uit herenonderzoek (Dehaene) zou blijken dat de getallenlijn als mentale representatie wel degelijk een natuurlijk model is. Oudere argumenten uit de ‘problem-solving’-literatuur, bijvoorbeeld dat probleemvereenvoudiging een bekende aanpakstrategie is die zou kunnen verklaren waarom juist zwakke rekenaars graag splitsen, blijven nu onbesproken. Ook de rol van werkgeheugen (belasting) wordt niet besproken, maar komt terloops hier en daar wel ter sprake in de vakdidactische argumentatie. Bij een analyse van het onderscheid in strategiekenmerken tussen Rijken en Splitsen kunnen deze psychologische aspecten toch niet gemist worden?

In de Slotbeschouwing (hoofdstuk 5) zijn actuele ontwikkelingen in Amerikaanse vernieuwingsprojecten aanleiding tot verdere discussie over deze nieuwe (en oude) strategieën en modellen. Deze discussies zullen zeker nog een vervolg krijgen, en we mogen daarom blij zijn met de duidelijkheid van de realistische standpuntbepaling in dit proefschrift.

Ten slotte het onderzoek dat zich met name richt op de zwakke rekenaars in de onderbouw van de basisschool, omdat deze wat meer moeite lijken te hebben met het aanleren van deze nieuwe *sequentiele* strategie. Het laatste PPO-onderzoek van het Cito wijst in dit verband op belangrijke tekorten - met name bij allochtonen onder hen - in de vaardigheid “Tellen en ordenen” van getallen tot 100 (en daarboven). Dit onderzoeksdeel van het proefschrift werd na een ontwerp- en een ontwikkeljaar uitgevoerd door leerkrachten van acht groepen 4 op Utrechtse basisscholen, en wordt beschreven in de hoofdstukken 2 en 3. De vakdidactische bespreking van de opzet en verdere ontwikkeling en uitvoering van het programma is moeilijk samen te vatten, en wij verwijzen daarvoor naar het proefschrift zelf.

Met name het productieve karakter van

het oefenprogramma bevat diverse creatieve lessuggesties om de eigen inbreng van kinderen in de les te vergroten. Bijvoorbeeld het liefelijk springen van getallen voor de klas (ook op het speelplein of thuis) met respectievelijk grote sprongen (voor de tientallen) en kleine huppen (voor de eenheden); de andere kinderen moeten het aldus uitgebeelde getal raden (25 of 46, enzovoort; kinderen doen dit om de beurt). Verrassend is ook hoe de saaie sommen, vooral bekend van het reproductieve oefenen, hier een heel ander karakter krijgen als “eigen producties” van de kinderen, die nu sommen van een bepaald type moeten bedenken en opgeven aan de vogel Waku-Waku (handpop). Deze voorbeelden van productief oefenen illustreren opnieuw de (motiverende) kracht van het creëren van een realistische contextsituatie in de klas als belangrijk onderwijsprincipe.

De resultaten van het oefenprogramma (hoofdstuk 4) werden met behulp van bestaande toetsen uit het Cito-leerlingvolgsysteem in kaart gebracht bij de experimentele groepen ( $N = 152$ ) en controlegroepen ( $N = 52$ ). Het aandeel zwakke rekenaars in de laagste Cito-categorieën E en D was aan beide kanten groter dan normaal. Alleen bij de experimentele groepen was er halverwege en aan het eind van het leerjaar een duidelijke positieve verschuiving naar hogere prestatieniveaus. Itemanalyses van criteriumopgaven als  $45 + 27$  en  $43 - 18$  illustreren dat het hier om een cruciale vooruitgang gaat, met name ook van de grote groep *allochtone* leerlingen in de doelgroep. Daarmee bewijst dit proefschrift een belangrijke bijdrage te leveren aan de verdere ontwikkeling van het realistische reken-wiskundeonderwijs.

M. Beishuizen

Universiteit Leiden (Onderwijsstudies)

In het Nederlandse reguliere basisonderwijs is nauwelijks nog een school te vinden die nog werkt met een traditioneel mechanistische rekenmethode. In de loop der jaren zijn vrijwel alle scholen overgegaan op een reken-wiskundemethode die gestoeld is op een realistische grondslag. Met de keuze voor, en invoering van zo'n methode hebben de leraren zich echter nog niet automatisch ook de uitgangspunten eigengemaakt waar de realistische methoden op zijn gebaseerd, laat staan dat die uitgangspunten geheel volgens de bedoelingen in het dagelijkse lesgeven worden toegepast. Dat laatste is doorgaans een kwestie van langere adem, zoals uit onderzoek blijkt. Inmiddels echter, is ook bij de leraren werkzaam op scholen voor speciaal basisonderwijs (sbo) belangstelling ontstaan voor leerprogramma's gebaseerd op de realistische didactiek. Uit recente enquêtegegevens, verzameld door de projectgroep Speciaal Rekenen van het Freudenthal Instituut (met een respons van 70%), blijkt dat ruim 80% van de schoolteams een realistische methode had aangeschaft. Dat betekent voor de praktijk van het reken-wiskundeonderwijs een ingrijpende koerswijziging. Terwijl in de tot nu toe gebruikte materialen het accent doorgaans werd gelegd op onder meer oefenen, automatiseren en vooral memoriseren, cijferen, geheugenwerk, en standaardopgaven die individueel (en niet interactief) gemaakt moesten worden, betekent de koerswijziging dat ervan wordt uitgegaan dat de leraar de leerlingen ruimte biedt om zelf eens iets uit te zoeken. De leerlingen worden gestimuleerd eigen informele werkwijzen te benutten, daarover te praten en te reflecteren. Bovendien worden betrekkelijk nieuwe leergebieden geïntroduceerd (meetkunde, schatten, hoofdrekennen, zakrekenmachine), terwijl het vertrouwde cijferwerk een stuk minder aandacht krijgt. Mooie doelstellingen en principes, maar wordt de lat voor leerlingen in het sbo niet te hoog gelegd? Met andere woorden is de vraag of het verstandig is dat scholen voor het sbo de keuze maken voor een realistische reken-wiskundemethode. Deze vraag staat centraal in het promotieonderzoek van Milo en de resultaten van dit onderzoek kunnen dan ook van groot belang zijn voor het innovatiebeleid in het Speciaal Basis-

onderwijs op het gebied van reken-wiskunde.

Milo heeft deze brede onderzoeksvraag teruggebracht tot de vraag welke van twee 'instructional designs' de beste resultaten oplevert. Hij onderscheidt in dit verband een sturende didactiek (directe instructie) en een, in de terminologie van Van Parreren, banende didactiek met veel ruimte voor eigen inbreng van de leerlingen. Het getalengebied waar het onderzoek op is gericht, loopt van 20 tot 100. Er staat een tweetal rekenstrategieën centraal, namelijk de uit eerdere studies bekende Rijkstrategie ( $68 - 20 = 48$ ,  $48 - 3 = 45$ ) en de Splitsstrategie ( $68 - 23$ ;  $60 - 20 = 40$ ,  $8 - 5 = 3$ ,  $40 + 3 = 43$ ).

De promovendus heeft voor de volgende onderzoeksopzet gekozen. De leerlingen die in de groep zaten waaraan directe instructie werd gegeven, kregen één van beide strategieën voorgeschreven. Met de andere leerlingen (banende instructie) werden beide strategieën besproken en vergeleken en elke leerling mocht uiteindelijk zelf, naar eigen voorkeur, voor een bepaalde strategie kiezen en deze gebruiken. In een pilotstudie (16 leerlingen) is eerst nagegaan of de beide instructievormen werden uitgevoerd zoals bedoeld en dat bleek in redelijke mate het geval.

In een vervolgonderzoek werden een 70-tal leerlingen gedurende een half jaar in groepjes van drie tot vijf leerlingen geïnstrueerd volgens de boven beschreven condities. Uit het onderzoek bleek dat de leerlingen die in de sturende conditie volgens de Rijkstrategie te werk moesten gaan op die strategie meer variaties bedachten dan de leerlingen die volgens de Splitsstrategie te werk moesten gaan. Dat is begrijpelijk, omdat de Rijkstrategie immers meer variaties toelaat dan de Splitsstrategie. Bovendien bleek dat de directe instructie het meeste effect op het uitvoeren van de Rijkstrategie had. Ook dat mag weinig verwondering wekken, omdat de Rijkstrategie minder aanleiding tot fouten geeft dan de Splitsstrategie. Onder meer uit de literatuurverwijzing blijkt dat Milo ervan op de hoogte is dat bij het toepassen van de Splitsstrategie het volgende soort fouten voorkomt:  $48 - 15$ :  $40 - 10 = 30$ ,  $8 - 5 = 3$ ; omdat optellen ( $30 + 3 = 33$ ) bij een aftrekgave de leerlingen vreemd voorkomt,

geven ze er de voorkeur aan nog maar eens af te trekken:  $30 - 3 = 27$ . Als een adequate strategie wordt voorgeschreven, heeft dat meer succes dan wanneer een strategie wordt voorgeschreven die denkfouten uitlokt. Dat geldt zeker voor zwakke rekenaars. Dat is dus wat uit het onderzoek van de promovendus is gebleken. In de groep leerlingen die zélf een van beide strategieën mocht kiezen (de banende conditie dus) bleken opnieuw de leerlingen met een rijgende strategie het meest succesvol.

Weinig leerlingen in *beide condities* gebruiken overigens meer dan één strategie, en sommige leerlingen gebruiken strategieën die niet tijdens de lessen waren toegestaan en dit leidde in de meeste gevallen niet tot de juiste oplossing. Milo meent dat flexibele rekenaars niet zonder meer ook goede rekenaars zijn (zie ook zijn derde stelling). Als het zwakken van de ene onbegrepen strategie naar de andere onbegrepen strategie als een uiting van flexibiliteit wordt gezien, kan de onderzoeker gelijk hebben.

De *algemene conclusie* die Milo trekt uit zijn onderzoek, luidt dat de leerlingen die direct geïnstrueerd werden op de Rijkstrategie, volgens een prestatietest en een transfertest, beter presteerden dan de leerlingen die zelf een strategie mochten kiezen en beter dan de leerlingen die een Splitsstrategie moesten leren. Ook was het zo dat leerlingen die moesten Rijken en de leerlingen die zelf een aanpak mochten kiezen op de transfertoets, beter presteerden dan de "gedwongen Splitsers". Nu wordt benadrukt dat kinderen in het sbo meer baat hebben bij een *gestuurde didactiek* en nadeel ondervinden van een *banende didactiek*. Dit betekent dat een realistische didactiek *niet* geschikt is voor leerlingen in het sbo, meent Milo. De vaardigheden die verwacht worden bij een *realistische didactiek* (de banende conditie) zijn voor deze leerlingen te hoog gegrepen. Deze conclusie wordt echter niet bevestigd door verwant onderzoek en nauwelijks gedekt door de onderzoeksgegevens zoals vermeld in Milo's eigen rapportage. Zo heeft Kroesbergen (2002) in een uitvoerig opgezet onderzoek (265 leerlingen) laten zien dat zwakke rekenaars kunnen profiteren van banende instructie en dus niet steeds afhankelijk zijn van sturende instruc-

tie. Milo trekt bovendien de conclusie dat “banen” staat voor “realistisch” en “sturen” niet. De essentie van een realistische didactic is echter niet dat leerlingen “vrij” worden gelaten, maar dat de interactie zodanig verloopt dat de leraar intervenueert wanneer nodig, niet ingrijpt wanneer de kinderen op het goede spoor zitten, reflectie uitlokt, bijstuurt en hints geeft wanneer dat opportuun is, etc. Wanneer een leraar het nodig vindt om (bij) te sturen is dat niet in strijd met realistisch wiskundeonderwijs, zoals Milo beweert. De promovendus struikelt als hij concludeert dat realistisch reken-wiskundeonderwijs de sbo-leerlingen beter onthouden kan worden, over een door hemzelf gecreëerde conceptuele verwarring. Daarenboven richt Milo zich in zijn onderzoek slechts op één kenmerk van de realistische reken-wiskunde, namelijk het instructiekenmerk. Op grond van onderzoek naar dat ene kenmerk kan natuurlijk geen conclusie over de reikwijdte van de realistische theorie worden getrokken. Dan zou Milo ook moeten hebben gekeken naar andere onderwijsken-

merken waar deze theorie uitspraken over doet, zoals: mathematiseren op verschillende niveaus, niveaus van reflectie en probleemoplossen, flexibiliteit in denken, constructie van leergangen, mathematiseren en symboliseren, functioneren van informele strategieën, etc.

Tot slot is het opvallend dat de onderzoeker zijn conclusies vrijwel uitsluitend baseert op gemiddelden. Veel mogelijk interessante gegevens over subgroepen en individuele kinderen zijn daardoor niet boven tafel gekomen.

## Literatuur

Kroesbergen, R (2002). *Mathematics education for low-achieving students. Effects of different instructional principals on multiplication learning*. Doetinchem: Graviant Educatieve Uitgeverijen.

*J. M. C. Nelissen*  
*Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht*