Hoofdrekenstrategieën voor optellen en aftrekken tot 100 bij hoogbegaafde leerlingen en leerlingen met leerproblemen

E. van Lieshout en F. Meijers[1]

Samenvatting

Het doel van deze studie was, te achterhalen of hoogbegaafde leerlingen verschillen van leerlingen met leerproblemen in de keuze van strategieën waarmee zij optel- en aftrekopgaven tot 100 uit het hoofd oplossen. Achttien hoogbegaafde basisschoolleerlingen (gemiddelde leeftijd 9.3 jaar) en 18 leerlingen uit het speciaal basisonderwijs (gemiddelde leeftijd 12.8 jaar) werden gematcht op algemene rekenkennis. De kinderen kregen een tempotoets en een toets waarin ze de stappen van hun mentale oplossing moesten opschrijven. De hoogbegaafde leerlingen bleken vaker handige en efficiënte strategieën te hanteren en beter te presteren op de moeilijkste opgaven (redactieopgaven met tientalpassering) dan de andere leerlingen. Daartegenover bleken de kinderen met leerproblemen juist efficiënter te zijn in het beantwoorden van gemakkelijke opgaven ("kale" sommen zonder tientalpassering). De resultaten bevestigden de hypothese dat deze twee groepen verschillen in het patroon van oplossingsstrategieën.

1 Inleiding

1.1 Doel van het onderzoek

Het doel van deze studie was, uit te zoeken of hoogbegaafde leerlingen verschillen van leerlingen met leerproblemen in hun keuze van strategieën waarmee zij optel- en aftrekopgaven tot 100 uit het hoofd oplossen. Daarbij dienen zich twee mogelijkheden aan: de eerste mogelijkheid is dat hoogbegaafde kinderen andere strategieën of een ander patroon van strategieën gebruiken bij het hoofdrekenen dan kinderen met leerproblemen. De tweede mogelijkheid is dat hoogbegaafde kinderen alleen sneller zijn in hun ontwikkeling van reken-wiskundevaardigheden. Als hoogbegaafde kinderen andere strategieën of andere patronen van strategieën blijken te gebruiken, dan is de vraag wat dit verschil met kinderen met leerproblemen kan hebben veroorzaakt. Het was echter niet de bedoeling deze lastiger vraag in deze studie te beantwoorden. Dit onderzoek concentreerde zich op de beschrijving van de aard van de verschillen tussen beide groepen kinderen als een startpunt voor verder onderzoek.

Als de rekenbekwaamheid van hoogbegaafde kinderen alleen in een sneller tempo zou ontwikkelen dan de bekwaamheid van kinderen met leerproblemen, zou dat een ondersteuning voor de kwantitatief-verschilhypothese zijn. Anderzijds, als hoogbegaafde kinderen andere strategieën of patronen van strategieën gebruiken dan kinderen met leerproblemen, dan zou dat de kwalitatief-verschilhypothese ondersteunen. Met een kwantitatief verschil bedoelen we dat het verschil alleen een kwestie van eerder of later is. De schoolse prestaties en alle corresponderende vaardigheden, deelvaardigheden en cognitieve bekwaamheden van de gemiddeld en laag presterende leerlingen kunnen volgens deze hypothese worden gezien als eenvoudig achterlopend op het ontwikkelingsstadium van de hoogbegaafde leerlingen. Met een kwalitatief verschil bedoelen we dat er verschillende onderliggende patronen van deelvaardigheden en cognitieve bekwaamheden zijn die in hetzelfde prestatieniveau resulteren.

1.2 Studies van reken- en wiskundekennis bij hoogbegaafden

Er is betrekkelijk weinig onderzoek gedaan waarin hoogbegaafde kinderen zijn vergeleken met niet-hoogbegaafde kinderen op rekenbekwaamheid in de basisschool. Een van de voorbeelden van onderzoek waarin zo'n vergelijking werd gemaakt, is een studie van Geary en Brown (1991). Zij bestudeerden de verschillen in telvaardigheden en de vaardigheid automatisch rekenfeiten te reproduceren bij 14 hoogbegaafde, 12 normale en 15 rekengestoorde leerlingen van groep 5 en 6 (‘grade’ 3 en 4). De gemiddelde leeftijd was 130 maanden voor de rekengestoorde, 125 maanden voor normale en 119 maanden voor hoogbegaafde kinderen. De kinderen moesten 40 eenvoudige optelopgaven zoals 7+4 of 3+2 beantwoorden. De resultaten lieten zien dat de hoogbegaafde groep niet alleen de herinneringsstrategie vaker dan de andere groepen gebruikten, maar dat ze ook een lagere proportie herinneringsfouten maakten. Is hier sprake van kwalitatieve verschillen? Het is bekend dat kinderen in het algemeen verschillende stadia in telstrategieën passeren voordat ze het stadium van automatische herinnering van rekenfeiten bereiken (vgl. Carpenter & Moser, 1984; Siegler & Jenkins, 1989). Het is dus mogelijk dat dit onderzoek alleen momentopnamen uit het ontwikkelingsniveau van de drie groepen laat zien en dat uiteindelijk alledrie de groepen dezelfde ontwikkeling in een verschillend tempo doormaken.

In tegenstelling tot het feit dat betrekkelijk weinig onderzoek op het gebied van eenvoudig rekenen door hoogbegaafde leerlingen is gerapporteerd, hebben veel studies zich gericht op het meer gevorderde rekenen en wiskunde. Lubinski en Humphreys (1990) vonden sterke aanwijzingen voor een gegeneraliseerd verschil in schoolse vaardigheden van hoogbegaafde en niet-hoogbegaafde leerlingen. De onderzoekers analyseerden de data van een longitudinaal onderzoek met een steekproef van bijna 100.000 leerlingen van ‘grade’ 10 en een deelsteekproef hieruit met ongeveer 1000 wiskundig hoogbegaafde leerlingen. “Mathematically gifted students were found to be intellectually superior across a wide range of cognitive abilities...” (p. 327), hetgeen als ondersteuning van een g-factorstandpunt werd gezien. Er was geen speciale onderliggende vaardigheid, zoals ruimtelijk voorstellingsvermogen, die meer dan andere cognitieve vaardigheden gecorreleerd was met de wiskundige begaafdheid. Dat zou in overeenstemming zijn met de kwantitatief-verschilhypothese.

Montague en Applegate (1993) vergeleken 30 goede, 30 gemiddelde en 30 zwakke probleemoplossers in de middelbare school op cognitieve en metacognitieve kenmerken. Het gemiddelde IQ van de goede leerlingen was 136, terwijl het gemiddelde IQ van de gemiddeld en zwak presterende leerlingen 104 en 97 was. De gemiddelde leeftijd van alle leerlingen was 13 jaar. De leerlingen met leerproblemen verschilden significant van de andere twee groepen in algemene rekenprestaties en probleemoplossen. Volgens de auteurs is het zwakke probleemoplossen van de leerlingen met leerproblemen minder gerelateerd aan calculatiefouten in het oplossingsproces dan aan een gebrekkige vaardigheid om opgaven te representeren en de geschikte vergelijkingen en operaties te voorspellen. Deze verschillen hoeven echter niet op een kwalitatief verschil te wijzen. De gegevens van de drie groepen zouden kenmerkend voor hun ontwikkelingsstadium kunnen zijn en daarmee in overeenstemming met de kwantitatief-verschilhypothese.

Om kwalitatieve verschillen op te sporen gebruikten we in het onderhavige onderzoek een design waarin gematcht was op rekenwiskundeniveau (lijkend op het vaak gebruikte Reading-Level-Match Design (Rack, Snowling & Olson, 1992)). Dit betekent dat we kinderen vergeleken die gematcht waren op hun prestatie op een algemene reken-wiskundekennistoets. Als we alleen een verschil in leeftijd zouden vinden (waarbij de hoogbegaafde kinderen het jongst zijn), zou dat pleiten voor de kwantitatief-verschilhypothese. Als we daarbij ook nog verschillen in enkele deelvaardigheden of andere cognitieve vaardigheden zouden vinden, zou dat suggereren dat er ook sprake is van kwalitatieve verschillen. Dit design geeft meer inzicht in factoren die mogelijk aan de verschillen tussen groepen bijdragen dan designs waarin de kinderen alleen zijn gematcht op chronologische leeftijd.

1.3 Hoofdrekenen

Het domein dat we bestudeerden was het hoofdrekenend optellen en aftrekken tot 100. Hoofdrekenen verschilt op verscheidene manieren van cijferen. Bij het cijferen wordt de som in verticale vorm opgeschreven en wordt de som kolomsgewijs opgelost. Vaak wordt een standaardalgoritme gebruikt. Tussenresultaten van *onthouden* en *lenen* kunnen opgeschreven worden, wat de geheugenbelasting verlaagt. In tegenstelling daarmee worden vaak zelf bedachte strategieën gebruikt om deze opgaven zonder papier en pen op te lossen (Fuson & Smith, 1997). In Nederland en enkele andere landen worden kinderen onderwezen in een strategie die kan worden beschreven als het springen vanaf een van de twee getallen langs een denkbeeldige getallenrij (Beishuizen, 1993). Deze rijg- of sprongstrategie (die Beishuizen (1992) ook wel G10-procedure noemt) maakt voornamelijk gebruik van de ordinale eigenschappen van getallen.

Veel kinderen maken echter spontaan gebruik van een andere strategie. Deze strategie maakt gebruik van de kardinale eigenschappen van getallen. Dat betekent dat ze de eigenschap van getallen gebruiken, dat zij van 10 tot 100 kunnen worden gesplitst in tientallen en eenheden. In zekere zin lijkt dit op de kolomsgewijze strategie bij het cijferen. In verschillende onderzoeken (Beishuizen, 1992; Van Lieshout, 1997) is echter aangetoond dat deze splitsstrategie (door Beishuizen, 1992, ook wel 1010-procedure genoemd) waarschijnlijk verantwoordelijk is voor het maken van fouten en vaak wordt gebruikt door laag presterende leerlingen, terwijl de rijgstrategie de betere strategie lijkt te zijn. Deze strategie wordt vaker door de bekwamere leerlingen gebruikt (Beishuizen, 1993; Van Lieshout, 1997).

Het verschil in effectiviteit van de rijg- en splitsstrategie kan gezien worden als een resultaat van het omgaan met beperkingen van het geheugen. Het aantal stappen waaruit de splitsstrategie bestaat is groter dan het aantal stappen in de rijg- of sprongstrategie (zie Tabel 2). Hitch (1978) toonde reeds aan dat hoofdrekenen plaatsvindt door achtereenvolgens verschillende stappen uit te voeren die opslag in het werkgeheugen vereisen. Hij toonde aan, dat hoe langer tussentijdse uitkomsten in het werkgeheugen moeten worden gehouden voordat ze nodig zijn voor het lopende rekenproces, hoe meer van deze informatie vergeten wordt. Het lijkt evenzeer dat in het geval van de splitsstrategie tussentijdse antwoorden langer in het werkgeheugen moeten blijven dan in de rijgmethode. Er kan dus meer verlies van informatie door verval optreden in de splitsstrategie. Zoals Tabel 2 laat zien, is het verschil in stappen tussen de rijg- en de splitsstrategie groter voor aftrek- dan voor optelsommen. Het uitvoeren van de splitsstrategie bij aftreksommen kost de meeste stappen. Wolters, Beishuizen, Broers en Knoppert (1990) vonden ondersteunende evidentie voor een verklaring die uitgaat van geheugenbeperkingen. Zij vonden dit door de oplossingstijden bij de rijg- en splitsstrategie met elkaar te vergelijken. Deze geheugenverklaring past mooi bij Beishuizens (1993) suggestie dat speciaal aftrekopgaven met lenen minder vaak goed worden opgelost met de splits- dan met de rijgstrategie.

Waarom gebruiken kinderen deze riskante splitsstrategie? Een aannemelijke verklaring is dat zij hun kennis over optellen en aftrekken met getallen onder de 10 generaliseren (Beishuizen, 1993). Zij passen deze kennis eenvoudig toe op de eenheden en tientallen afzonderlijk. Voor optelopgaven zonder tientalpassering werkt dat. En ieder of bijna ieder reken-wiskundecurriculum dat het optellen en aftrekken van getallen tussen 20 en 100 onderwijst, zal beginnen met deze eenvoudige optelsommen. Zonder geconfronteerd te worden met opgaven (zoals aftrekopgaven met lenen, bijv. 54-26=) die moeilijker op te lossen zijn door deze methode, is er een kans dat vooral minder bekwame leerlingen hun oplossingswijze overgeneraliseren naar deze moeilijker opgaven (Fuson & Smith, 1997). Zwak presterende leerlingen lijken vaak vast te houden aan hun oplossingsmethode, zelfs als de moeilijker opgaven een adequatere strategie vereisen of een aanpassing van hun eerder geleerde strategie.

1.4 Hypothesen en vraagstellingen

Onder de aanname dat er een kwalitatief verschil is tussen de twee groepen leerlingen, verwachtten wij te vinden dat de leerlingen met leerproblemen vaker de riskante splitsstrategie gebruiken dan de hoogbegaafde leerlingen. In het geval van een kwalitatief verschil verwachtten wij bij de hoogbegaafde leerlingen ook meer strategieën te vinden die aangepast zijn aan moeilijker opgaven, zoals de rijgstrategie en de nog niet toegelichte rond-af-eerste-getalstrategie, dan bij de leerlingen met leerproblemen. Deze drie strategieën (de splits-, rijg- en rond-af-eerste-getalstrategie) behoren tot de meest voorkomende strategieën (Beishuizen, 1993; Van Lieshout, 1997) en worden met nog een vierde regelmatig voorkomende strategie hier verder de sleutelstrategieën genoemd. Daarnaast is nagegaan of hoogbegaafde leerlingen meer handige rekenwijzen gebruikten dan leerlingen met leerproblemen. Onder handige manieren van rekenen verstaan we niet-standaard rekenwijzen die rekening houden met de specifieke eigenschappen van de opgave.

Ten slotte verwachtten we, met betrekking tot de twee belangrijkste sleutelstrategieën, de eerder door Beishuizen (1993) en Van Lieshout (1997) gevonden relatie te repliceren tussen het gebruik van de splitsstrategie en lage rekenprestaties, evenals de relatie tussen het gebruik van de rijgstrategie en hoge rekenprestaties.

2 Methode

2.1 Proefpersonen

In Nederland bestaat geen speciaal onderwijs voor hoogbegaafde leerlingen. Wij rekruteerden deze leerlingen daarom via een advertentie in een tijdschrift voor hoogbegaafde kinderen en hun ouders. Wij vroegen in deze advertentie om leerlingen die aan de volgende criteria voldeden: ze moesten bekwaam zijn in hoofdrekenen, ze moesten leerling van een basisschool zijn en ten slotte moest hun IQ hoger zijn dan 125. Vierentwintig leerlingen, die de hoogste score op een tempotoets voor rekenen hadden, werden uiteindelijk uitgenodigd mee te doen aan het onderzoek. De tempotoets bestond uit aftrekopgaven tot 100 met tientalpassering. De toets wordt in de procedurebeschrijving toegelicht.

De vergelijkingsgroep werd geformeerd in een school voor speciaal basisonderwijs. In het Nederlandse schoolsysteem gaat het hier om kinderen met leerproblemen. Aan de leerkrachten werd gevraagd leerlingen te selecteren die optel- en aftrekopgaven tot 100 hadden gehad. Van deze leerlingen werden 24 leerlingen geselecteerd die het meest dicht bij de CITO-toetsscores van de hoogbegaafde leerlingen kwamen. Het betrof de vaardigheidsscores in het CITO Leerlingvolgsysteem Rekenen-Wiskunde. Omdat de gemiddelden van deze twee groepen significant verschilden, werden de hoogst scorende hoogbegaafde leerlingen, waarvoor geen match met een gelijk hoog scorende moeilijk lerende leerling bestond, van verdere deelname uitgesloten. Dezelfde procedure werd gevolgd voor de laagst scorende leerlingen uit de groep met leerproblemen. De resulterende groepen bestonden ieder uit 18 proefpersonen. Het aantal jongens en meisjes was 12 en zes in de hoogbegaafde groep (HB-groep) en 17 en één in de groep met leerproblemen (LP-groep). Ondervertegenwoordiging van meisjes wordt niet alleen aangetroffen onder de kinderen met leerproblemen in het speciaal onderwijs, het wordt ook in de literatuur over het voorkomen van hoogbegaafdheid gemeld (zie bijvoorbeeld Lubinski & Humphreys, 1990). De gemiddelde score op de CITO-test was 78.11 ($SD = 5.93$) voor de hoogbegaafde groep en 76.06 ($SD = 7.60$) voor de groep met leerproblemen. Dit verschil was niet significant: $t(34) = 0.90$, $p = .37$.

De gemiddelde ruwe score van de hoogbegaafde kinderen op de Raven Standard Progressive Matrices was significant hoger dan de gemiddelde score van de kinderen met leerproblemen: $M_{\text{Hoogbegaafd}} = 46.56$ ($SD = 4.67$), $M_{\text{Leerproblemen}} = 40.67$ ($M = 6.81$), $t(34) = 3.03$, $p = .005$. Als deze twee gemiddelde ruwe scores omgezet worden in leeftijdsgerelateerde normscores (Duitse normen, Heller, Kratzmeier & Lengfelder, 1998), dan scoort de HB-groep gemiddeld hoger dan 99.5% van de normgroep, terwijl de LP-groep gemiddeld lager dan 8% van de normgroep scoort.

De gemiddelde leeftijd van de HB-groep bedroeg 9.32 jaar en was 12.76 jaar voor de groep leerlingen met leerproblemen (voor meer details, zie Resultaten).

2.2 Procedure en instrumenten

De hoogbegaafde kinderen werden voor individuele testafname op school bezocht. De sessie startte met de tempotoets. Iedere subtest van deze tempotoets duurde één minuut. De tweede test was de Raven Standard Progressive Matrices. Na deze test werd de kinderen de strategietoets voorgelegd.

De tempotoets voor rekenen bestond uit vijf onderdelen, ieder bestaande uit een toets-

Tabel 1

Aantal opgaven per opgaventype (voorbeelden tussen haakjes) in de strategietoets

Opgaventype	Tientalpassering Zonder	Tientalpassering Met
Redactieopgaven		
Directe aftrekking	3 (56 – 24 =)	3 (54 – 26 =)
Indirecte optelling (klein verschil)	2 (65 + . = 69)	2 (85 + . = 92)
Optelling	2 (21 + 47 =)	
Optelling, tweede eenheid is 8		2 (54 + 28 =)
Optelling, tweede eenheid is 9		2 (67 + 29 =)
Kale opgaven		
Directe aftrekking	2 (56 – 24 =)	2 (54 – 26 =)
Indirecte optelling (groot verschil)	2 (31 + . = 97)	2 (36 + . = 94)
Optelling	2 (21 + 47 =)	
Optelling, tweede eenheid is 8		1 (54 + 28 =)
Optelling, tweede eenheid is 9		1 (67 + 29 =)

blad met 16 rijtjes van 10 sommen. De vijf onderdelen waren: optelsommen zonder tientalpassering (bijv. 32+45=), aftreksommen zonder tientalpassering (bijv. 45-23=), optelsommen met tientalpassering (bijv. 28+47=), aftreksommen met tientalpassering (bijv. 47-28=) en indirecte optelsommen (puntsommen) met en zonder tientalpassering (bijv. 34+ .= 72 en 32 + .= 74). Aan de leerlingen werd gezegd dat ze één minuut voor ieder onderdeel hadden en dat ze zoveel mogelijk sommen goed moesten uitrekenen. Voorafgaand aan ieder toetsonderdeel werden de leerlingen geïnformeerd over welk opgaventype ze konden verwachten. Alle getallen waren 'at random' geselecteerd uit de getallen van 1 tot 98, behalve getallen met twee gelijke cijfers of met een nul als eenheid. De som van de optelopgaven was kleiner dan 100. De eenheden van de twee getallen van een opgave waren nooit gelijk aan elkaar. Dit gold ook voor de twee tientallen als de opgave twee tweecijferige getallen bevatte.

De strategietoets bestond uit 28 opgaven die zonder tijdslimiet gemaakt mochten worden. Zestien van deze opgaven hadden de vorm van redactieopgaven. Vijftien van de 28 opgaven betroffen een tientalpassering. De eenheden van het tweede getal van drie optelopgaven bestonden uit een negen. Tabel 1 geeft een overzicht van de opgavenkenmerken. De opgaven werden in een 'random'-volgorde gepresenteerd in een boekje met vier opgaven per pagina. Onder iedere opgave was voldoende kladruimte waarop de kinderen hun oplossingsstappen moesten opschrijven. Als een kind deze stappen niet opschreef, spoorde de proefleider het kind aan dat te doen. De opgaven voldeden aan dezelfde eisen voor de keuze van getallen als bij de tempotoets, met de uitzondering dat alle opgaven tweecijferige getallen bevatten. Om het kind uit te leggen wat van hem of haar werd verwacht, vroeg de proefleider voorafgaand aan de feitelijke toets aan het kind de som 38+21= uit te rekenen en de oplossingsstappen hardop te zeggen. De proefleider schreef deze stappen op om te laten zien wat de taak van het kind zou zijn. Als de oplossing een rijgstrategie was dan liet de proefleider ook een splitsstrategie zien. Na een splitsstrategie liet de proefleider juist een rijgstrategie zien. Als het kind geen van beide strategieën vertoonde, dan liet de proefleider beide strategieën zien. Vervolgens vroeg de proefleider de oplossing voor een tweede oefensom (56+36=) op te schrijven en volgde de procedure als bij de eerste oefening.

Om de algemene reken-wiskundekennis van de leerlingen vast te stellen, werd het CITO Leerlingvolgsysteem Rekenen-Wiskunde gebruikt. Deze gestandaardiseerde groepstest wordt routinematig door de meeste Nederlandse scholen gebruikt. De scholen, die hun leerlingen enkele maanden voor de start van ons onderzoek op het door de CITO-handleiding voorgeschreven moment hadden getoetst, stelden ons de individuele scores van de leerlingen ter beschikking.

2.3 Scoring

Scoring van de strategieën

De oplossingsstrategieën werden gescoord in 11 categorieën. De meeste categorieën waren gebaseerd op voorafgaand onderzoek (Beishuizen, 1993). Andere werden gedefinieerd na een eerste inspectie van de strategieën. Diverse strategieën bestonden uit twee variaties: een waarin eerst de tientallen werden verwerkt en een ander waarin de eenheden eerst werden verwerkt. Deze variaties werden als verschillende strategieën gescoord. Tabel 2 toont de 11 categorieën met voorbeelden van de oplossingen.

Scoring van sleutelstrategieën

Er werden vier sleutelstrategieën onderscheiden: de rijg- of sprongstrategie, de splitsstrategie, de rond-af-eerste-getalstrategie en de gemengde splits- en rijgstrategie. De twee variaties op de rijgstrategie, een waarin de tientallen eerst werden verwerkt en een waarin de eenheden eerst werden verwerkt, werden voor de analyse samengenomen. Dit werd niet gedaan bij de splitsstrategie. De splitsstrategie, waarbij eerst de eenheden worden verwerkt, is waarschijnlijk niet zo riskant als de splitsstrategie waarin eerst de tientallen worden verwerkt. Dat is zo omdat het eerst verwerken van de eenheden (wat minder vaak gebeurt dan het starten met de tientallen) de rekenaar in het geval van een aftrekopgave met tientalpassering mogelijk onmiddellijk aanzet tot het lenen van de tientallen, die dan nog niet zijn verwerkt. Daar tegenover brengt het eerst verwerken van de tientallen de rekenaar in de positie dat hij of zij pas halverwege ontdekt dat er in het tweede getal minder eenheden zijn dan in het eerste getal, terwijl de tientallen al verwerkt zijn. En dit kan de reden voor bijvoorbeeld de groter van kleiner-fout (bijv. 3-8=5) zijn (Beishuizen, 1993).

Deze vier sleutelstrategieën werden gekozen, omdat voorgaand onderzoek (Beishuizen, 1993; Van Lieshout, 1997) liet zien dat de rijg- en splitsstrategie de belangrijkste strategieën zijn in termen van frequentie en verklarende kracht met betrekking tot de prestaties in hoofdrekenen. De rond-af-eerste-getalstrategie werd gekozen omdat Beishuizen, Van Putten en Van Mulken (1997) lieten zien dat deze strategie (door Klein & Beishuizen, 1994, de A10-strategie genoemd) ook een relatief belangrijke strategie was. Ten slotte werd de gemengde splitsrijgstrategie gekozen (door Beishuizen 1993, de 10t-strategie genoemd), omdat Van Lies-

Tabel 2

Scoringscategorieën voor de oplossingsstrategieën (tussen haakjes waar mogelijk de terminologie van Beishuizen, 1992, 1993 en Klein & Beishuizen, 1994)

Categorie	Voorbeeld	Stappen
Splits, tientallen eerst (1010)	23 + 45 = 65 – 28 =	20+40=60, 3+5=8, 60+8=68 60-20=40, 15-8=7, 40-10=30, 30+7=37
Splits, eenheden eerst (e1010)	23 + 45 = 65 – 28 =	3+5=8, 20+40=60, 60+8=68 15-8=7, 60-10=50, 50-20=30, 30+7=37
Rijg, tientallen eerst (G10)	23 + 45 = 65 – 28 =	23+40=63, 63+5=68 65-20=45, 45-8=37
Rijg, eenheden eerst (eG10)	23 + 45 = 65 – 28 =	23+5=28, 28+40=68 65-8=57, 57-20=37
Splits-Rijg (10t)	23 + 45 = 65 – 28 =	20+40=60, 60+3=63, 63+5=68 60-20=40, 40+5=45, 45-8=37
Rond-af-eerste-getal (A10)	28 + . = 65 65 – 28 =	28+2=30, 30+35=65, 35+2=37 65-5=60, 60-20=40, 40-3=37
Zonder stappen	28 + . = 35	7
Balans	65 – 29 =	66-30=36
Rond-af-tweede-getal, tientallen eerst (G10v)	23 + 39 =	23+40=63, 63-1=62
Rond-af-tweede-getal, eenheden eerst (eG10v)	23 + 39 =	23-1=22, 22+40=62
Anders of onbekend		

hout (1997) deze strategie met een aanzienlijke frequentie als de op twee na meest voorkomende strategie vond na de rijg- en splitsstrategieën.

Scoring van handige strategieën
Er werden drie handige strategieën onderscheiden. Deze werden alleen als handig erkend als ze werden toegepast op opgaven waarvan de oplossing met zo'n strategie als efficiënter kon worden gezien dan wanneer een andere strategie uit het scoringssysteem werd toegepast. Als handige combinaties van strategie en opgave in de huidige strategietoets werd in de eerste plaats de rond-af-tweede-getalstrategie beschouwd. Dit werd alleen gedaan als deze strategie werd toegepast op de opgaven waarin het tweede getal op negen eindigde (zowel de variant met eerst de tientallen als de variant met eerst de eenheden werden hierin betrokken.) Het betrof kale opgaven en redactieopgaven met een directe additieve structuur en tientalpassering (zie als voorbeelden in Tabel 2 de opgaven en de bijbehorende strategie in de twee categorieën rond-af-tweede-getal). In de twee overige gevallen ging het steeds om de toepassing van de zonder-stappenstrategie op de redactieopgaven met een indirecte optelstructuur (a+ .= b), een klein verschil tussen het eerste en tweede getal en respectievelijk wel of geen tientalpassering. Zie de categorie Zonder stappen in Tabel 2.

3 Resultaten

Een algemeen alfaniveau van .05 werd voor alle statistische toetsen gebruikt. Hierboven is in par. 2.1 gemeld dat het verschil in gemiddeld algemeen rekenniveau, gemeten met de CITO-toets, van de twee groepen niet significant was. Ter controle zijn de hieronder volgende analyses ook nog eens verricht met deze score als covariaat. In vrijwel alle gevallen leverde dat geen ander patroon van significanties op. De enkele keer dat dat wel het geval was, is dat vermeld.

3.1 Leeftijd
De HB-groep (M = 111.78 maanden, SD = 16.24) bleek 3.4 jaar jonger te zijn dan de LP-groep (M = 153.06 maanden, SD = 6.49). Dit verschil was significant: (t(22.39) = 10.02, p < .001, dus als er geen verschillen in strategieën zouden blijken te zijn, dan zou het enige geconstateerde verschil een verschil in ontwikkelingsniveau van 3.4 jaar zijn.

3.2 Gebruik van verschillende strategieën
Tabel 3 toont de frequenties van de verschillende strategieën per groep. De maximum frequentie van een willekeurige strategie is 28 (het totaal aantal opgaven in de strategietoets), waarbij de frequentie van de andere strategieën uiteraard nul moet zijn. De tabel laat zien dat splitsstrategie (tientallen eerst), de rijgstrategie (tientallen eerst) en de rond-af-eerste-getalstrategie de meest voorkomende strategieën zijn. Bij de hoogbegaafden namen ze samen 70% van de frequentie voor hun rekening, terwijl dat ruim 80% voor de leerlingen met leerproblemen was.

3.3 Frequentie van de sleutelstrategieën
Een multivariate variantieanalyse van de frequentie van de vier sleutelstrategieën leverde een significant groepseffect op: F(4, 31) = 2.94, p = .04. Univariate analyses lieten alleen significante effecten zien voor de splitsstrategie (met de tientallen eerst), hetgeen

Tabel 3
Frequenties van de 11 oplossingsstrategieën in de hoogbegaafde groep en de groep met leerproblemen

	HB	LP
Splits Tienen	7.94	13.56
Splits Enen	0.61	0.28
Rijg Tienen	6.28	6.61
Rijg Enen	2.89	1.50
Splits-Rijg	0.78	0.72
Rond af Eerste	5.39	3.22
Geen Stap	2.44	1.83
Balans	0.06	0.11
Rond af Tw T	1.28	0.17
Rond af Tw E	0.11	0.00
Ander	0.22	0.00

Noot. HB = Hoogbegaafd; LP = Leerproblemen; Splits Tienen = Splits, Tientallen eerst; Splits Enen = Splits, Eenheden eerst; Rond af Eerste = Rond af eerste getal; Rond af Tw T = Rond af Tweede Getal, Tientallen eerst; Rond af Tw E = Rond af Tweede Getal, Eenheden eerst.

Tabel 4

Frequenties van de vier sleutelstrategieën in de hoogbegaafde groep en de groep met leerproblemen

	Hoogbegaafd		Leerproblemen	
Strategie	*M*	*SD*	*M*	*SD*
Splits*	7.94	7.56	13.56	7.43
Rijg	9.17	7.38	8.11	8.73
Rond af eerste	5.39	5.04	3.22	1.99
Splits - Rijg	0.78	1.63	0.72	1.13

* Splits, tientallen eerst

werd verwacht, en de rond-af-eerste-getalstrategie, resp. $t(34) = 2.25$, $p = .02$, eenzijdig, en $t(34) = 1.70$, $p = .05$, eenzijdig. Zoals Tabel 4 laat zien, gebruikte de LP-groep de splitsstrategie - zoals verwacht - vaker dan de HB-groep, terwijl het omgekeerde gold voor het gebruik van de rond-af-eerste-getalstrategie. De extra covariantieanalyse die werd uitgevoerd om te controleren voor het verschil in algemeen rekenniveau gebaseerd op de CITO-score, liet zien dat het verschil in gebruik van de rond-af-eerste-getalstrategie net niet meer significant was ($p = .06$). Samenvattend: de hypothese dat leerlingen met LP vaker dan HB-leerlingen de riskante splitsstrategie zouden gebruiken, werd bevestigd. De verwachting dat HB-leerlingen vaker de meer aan moeilijker opgaven aangepaste strategieën zouden toepassen, werd voor de rijgstrategie niet bevestigd. Voor de rond-af-eerste-getalstrategie bleek de bevestiging van deze hypothese twijfelachtig.

3.4 Handige strategieën

Het aantal handige strategieën die aangepast waren aan de kenmerken van de vijf geselecteerde opgaventypen, werd onderworpen aan een multivariate variantieanalyse. Het groepseffect bleek significant te zijn, $F(3, 32) = 3.37$, $p = .02$. Univariate analyses lieten zien dat handige strategieën significant vaker werden gebruikt door de HB-groep dan door de LP-groep bij opgaven met een indirecte additieve structuur, een klein verschil tussen de twee getallen en geen tientalpassering, $t(34) = 1.99$, $p = .03$, eenzijdig, en bij optelopgaven met negen als laatste cijfer in het tweede getal, $t(34) = 2.03$, $p = .03$, eenzijdig. In het eerste geval ging het om de zonderstappenstrategie en in het tweede geval om de rond-af-eerste-getalstrategie. Er werd geen significant effect voor de andere combinatie van strategie en opgaventype gevonden. De vraag of HB-leerlingen vaker handige strategieën gebruiken dan LP-leerlingen kan hiermee bevestigend worden beantwoord.

3.5 Aantal correct opgeloste sommen in de tempotoets

Het aantal juiste antwoorden op de tempotoets wordt in Tabel 5 getoond. Deze variabele werd geanalyseerd in een 2 (groep: HB of LP) x 2 (operatie: optellen of aftrekken) x 2 (tientalpassering: zonder of met) variantieanalytisch design met herhaalde metingen op de twee laatstgenoemde factoren. Van de hoofdeffecten was alleen Groep niet significant, terwijl de andere hoofdeffecten, Operatie en Tientalpassering, wel significant waren, $F(1, 34) = 18.83$, $p = .0001$, $MSE = 5.13$, $\eta^2 = .36$ en $F(1, 34) = 175.72$, $p < .00001$, $MSE = 7.31$, $\eta^2 = .84$. De kinderen gaven meer juiste antwoorden op de optelsommen ($M = 12.86$) dan op de aftreksommen ($M = 11.22$). Evenzo losten ze sommen zonder tientalpassering ($M = 15.03$) vaker goed op dan sommen met tientalpassering ($M = 9.05$).

Van de interacties was alleen de Groep x Tientalpasseringsinteractie significant, $F(1, 34) = 20.26$, $p = .00008$, $MSE = 7.31$, $\eta^2 = .37$. Deze interactie werd verder geanalyseerd door het groepseffect binnen de twee niveaus van de factor Tientalpassering apart te toetsen. Het verschil tussen beide groepen in het aantal correct opgeloste sommen zonder tientalpassering was significant, $F(1, 34) = 4.32$, $p = .045$, $MSE = 47.89$, $\eta^2 = .11$, ten gunste van de LP-groep. De LP-groep bleek

Tabel 5

Aantal goed opgeloste opgaven in de tempotoets door de hoogbegaafde leerlingen en de leerlingen met leerproblemen

	Hoogbegaafd		Leerproblemen	
Tiental-passering	Op-telling	Aftrek-king	Op-telling	Aftrek-king
Nee	13.89	12.78	17.50	15.94
Ja	10.56	8.22	9.50	7.94

meer juiste antwoorden (M = 16.72) op deze opgaven te geven binnen één minuut dan de HB-kinderen (M = 13.34). Er bleken geen significante verschillen tussen deze twee groepen (resp. M = 8.72 en M = 9.39) te bestaan bij de juiste beantwoording van sommen met tientalpassering. Concluderend: ondanks de gelijke prestaties van de LP- en HB-groep op de algemene reken-wiskundekennistoets, bleek de HB-groep op een bepaald onderdeel van de tempotoets lager te presteren dan de LP-groep. Dit is een aanwijzing voor de juistheid van de kwalitatief-verschilhypothese.

Er werden diverse correlaties berekend tussen het aantal goed gemaakte sommen in ieder van de vijf opgavencategorieën van de tempotoets en de frequentie van de vier sleutelstrategieën in de strategietoets. In tegenstelling tot wat verwacht werd, waren geen van deze correlaties significant.

3.6 Proportie correct opgeloste opgaven in de strategietoets

De proportie correct opgeloste opgaven in de strategietoets (behalve de vier optelopgaven) werd eveneens geanalyseerd. Tabel 6 geeft een overzicht van de gemiddelden. De opgaven met een directe subtractieve structuur en de opgaven met een indirecte additieve structuur werden apart geanalyseerd. Het aantal correct opgeloste opgaven met een directe subtractieve structuur werd geanalyseerd in een 2x2x2 (Groep x Tekst x Tientalpassering) variantieanalystisch design met herhaalde metingen op de laatste twee factoren. Met het label Tekst wordt de aanwezigheid van tekst in de opgaven aangeduid (dat wil zeggen redactieopgaven tegenover kale opgaven). De Groep x Tekst x Tientalpassering bleek significant, $F(1, 34) = 4.83$, $p = .035$, $MSE = 0.035$, $\eta^2 = .12$. Geen van de andere effecten was significant.

Het Groep x Tekst x Tientalpasseringsinteractie-effect werd verder geanalyseerd door de tweeweg interactie-effecten te onderzoeken waarin de factor Groep was betrokken. Binnen het teksteffect was het Groep x Tientalpassering interactie-effect significant voor de redactieopgaven, $F(1, 34) = 9.44$, $p = .004$, $MSE = 0.04$, $\eta^2 = .09$ en niet bij de kale opgaven. Binnen het tientalpasseringseffect was het Groep x Tekstinteractie-effect significant bij de opgaven met tientalpassering, $F(1, 34) = 4.82$, $p = .035$, $MSE = 0.04$, $\eta^2 = .12$, en niet bij de opgaven zonder tientalpassering. De significante interacties werden vervolgens afzonderlijk geanalyseerd door het verschil tussen de groepen binnen deze vier factorcombinaties afzonderlijk te toetsen. Drie van deze vergelijkingen van beide groepen leverden geen significant effect op: redactieopgaven zonder tientalpassering, kale opgaven zonder tientalpassering en kale opgaven met tientalpassering. Het enige significante verschil bestond binnen redactieopgaven met tientalpassering, $t(18) = 3.83$, $p = .001$, $SE = .07$, met de HB-groep als de hoger presterende groep. Samengevat: van de vier combinaties van opgavenkenmerken vertoonde slechts één, de combinatie van redactieopgave en tientalpassering, de superieure prestatie van de HB-groep. Zoals Tabel 6 laat zien waren diverse proporties bijna maximaal. De gevonden interactie kan daarom een gevolg van plafondeffecten zijn geweest. Zonder deze plafondeffecten zouden de hoogbegaafde leerlingen wellicht op meer opgaventypen hoger dan de leerlingen met leerproblemen hebben gescoord.

Zulke interactie-effecten waren niet aanwezig bij de opgaven met een indirecte additieve structuur. De proportie juiste antwoor-

Tabel 6

Proportie goed opgeloste indirecte optelopgaven in de strategietoets door de hoogbegaafde leerlingen en de leerlingen met leerproblemen

	Hoogbegaafd		Leerproblemen	
Tiental-passering	Kale opg.	Redactie-opg.	Kale opg.	Redactie-opg.
Nee	.92	.89	.86	.89
Ja	.94	.94	.86	.67

den op deze opgaven werd geanalyseerd in een 2 x 2 x 2 (Groep x Tekst/Grootte x Tientalpassering)-design met herhaalde metingen op de laatste twee factoren. Het label Tekst/Grootte geeft aan dat de aanwezigheid van tekst en de grootte van het verschil tussen de twee getallen gecorreleerd waren (zie Tabel 1). Deze factor werd niet als verklarende factor maar louter als mogelijke onderdrukker van foutenvariantie gebruikt. Het enige significante verschil was het hoofdeffect Groep, $F(1, 33) = 12.43$, $p = .0013$, $MSE = 0.29$, $\eta^2 = .27$. De proportie goed beantwoorde opgaven was hoger in de HB-groep, $M = .95$ ($SD = .13$), dan in de LP-groep, $M = .63$ ($SD = .36$).

Samenvattend: ondanks de gelijke prestaties van de HB- en LP-groep op de algemene reken-wiskundekennistoets, bleek er toch een verschil te zijn in prestaties tussen beide groepen. Dit is opnieuw een aanwijzing voor de juistheid van de kwalitatief-verschilhypothese.

3.7 Correlaties met betrekking tot prestaties en strategieën

Er werden correlaties berekend tussen de proportie goed opgeloste opgaven in de strategietoets en de frequentie van de vier sleutelstrategieën. Zoals verwacht correleerde de proportie goede antwoorden significant negatief met de frequentie van de splitsstrategie, $r(35) = -.47$, $p = .004$. Zoals eerder vermeld, werd zo'n relatie niet gevonden voor het aantal correct beantwoorde sommen in de tempotoets. Daarom werd een correlatie berekend tussen dit aantal en de proportie goed beantwoorde opgaven van de strategietoets. Deze correlatie bleek laag en niet significant te zijn, $r(35) = -.04$, $p = .83$. Het aantal juiste oplossingen in de strategietoets correleerde niet met de frequentie van de overige drie sleutelstrategieën.

4 Discussie

De belangrijkste vraagstelling was of een kwalitatief, danwel kwantitatief gezichtspunt het best het verschil beschrijft tussen hoogbegaafde leerlingen en leerlingen met leerproblemen in het hoofdrekenend optellen en aftrekken tot 100. Om deze vraag te beantwoorden werden diverse prestatiescores en registraties van strategieën geanalyseerd. Het is belangrijk te herinneren dat beide groepen waren gematcht op algemene vaardigheid in rekenen-wiskunde.

4.1 Rekenprestaties

De analyses van de tempotoets voor rekenen lieten zien dat er slechts één verschil was tussen de hoogbegaafde groep en de groep met leerproblemen. Hoewel beide groepen, zoals verwacht kon worden, bekwamer waren bij opgaven zonder tientalpassering dan bij opgaven met tientalpassering, overtroffen de leerlingen met leerproblemen de hoogbegaafde leerlingen in het aantal goede antwoorden op opgaven zonder tientalpassering. De strategieën om opgaven op te lossen zonder de noodzaak het tiental te passeren zijn mogelijk vroeger geautomatiseerd dan opgaven die wel tientalpassering noodzakelijk maken. Misschien leidde de 3.4 jaar langere ervaring in school van de kinderen met leerproblemen tot een hoger niveau van automatisering bij het toepassen van een oplossingsstrategie dan bij de hoogbegaafde leerlingen, gezien hun korte schoolervaring, mogelijk was. Deze testsituatie met tijdsdruk is mogelijk gunstig voor leerlingen die al enige vaardigheid hebben verworven in het uitvoeren van stappen bij de berekeningen (misschien zelfs bij de toepassing van eenvoudige telstrategieën in dit type opgaven). Deze langere ervaring van kinderen met leerproblemen was waarschijnlijk niet genoeg om de bekwaamheid tot het oplossen van de moeilijker opgaven met tientalpassering te beheersen. Daartegenover was de kortere tijd, die de hoogbegaafde leerlingen in vergelijking tot de leerlingen met leerproblemen de school pas hadden bezocht, mogelijk te weinig om de oplossingsstrategieën tot hetzelfde niveau te automatiseren als de leerlingen met leerproblemen. Wel hadden zij kennelijk de cognitieve vaardigheden om de toepassing van strategieën al vroeg te begrijpen.

Een ander patroon van prestatieverschillen verschijnt uit de strategietoets. De analyse van de prestaties op de directe aftrekopgaven liet zien dat beide groepen niet van elkaar verschilden. Er was echter een uitzondering.

De leerlingen met leerproblemen konden niet bijblijven bij het prestatieniveau van de hoogbegaafde leerlingen op de klaarblijkelijk moeilijkste aftrekopgaven, namelijk de redactieopgaven met tientalpassering. Voor deze opgaven zijn geautomatiseerde vaardigheden voor het optellen en aftrekken van getallen in kale sommen zonder tientalpassering niet genoeg. Het kind heeft ook inzicht nodig in wat gedaan moet worden als tientalpassering nodig is en moet ook kennis bezitten om de taal van de redactieopgaventekst te begrijpen en een adequate representatie van de opgavenstructuur te vormen (Kintsch, 1986). Mogelijk zijn de hoogbegaafde kinderen in deze testsituatie zonder tijdsdruk beter cognitief toegerust om deze twee verzwarende factoren aan te kunnen: de noodzaak de tekst te begrijpen en de noodzaak het tiental te passeren. De slechte resultaten van de kinderen met leerproblemen kunnen gedeeltelijk worden verklaard door hun frequent gebruik van de riskante splitsstrategie. Want van deze strategie is bekend dat zij foutgevoelig is wanneer zij wordt toegepast op opgaven met tientalpassering (Beishuizen, 1993; Van Lieshout, 1997).

In het deel van de strategietoets dat de opgaven met een indirecte optelstructuur vertoonde, overtroffen de hoogbegaafde kinderen - ongeacht de variaties in opgaven - de kinderen met leerproblemen duidelijk in hun prestaties. Dit is in overeenstemming met de eerdere bewering dat de hoogbegaafde kinderen de cognitieve vaardigheden hadden om de rekenopgaven op te lossen, hoewel mogelijk minder geautomatiseerd dan de kinderen met leerproblemen.

4.2 Rekenstrategieën en hun relatie met rekenprestaties

De analyse van de vier sleutelstrategieën en de relaties met de prestaties liet verschillende dingen zien. In de eerste plaats waren de rijg- en splitsstrategie, in overeenstemming met voorgaand onderzoek (Beishuizen, 1993; Van Lieshout, 1997) in termen van frequentie, de belangrijkste strategieën. Het is overigens in dit onderzoek niet uit te sluiten dat de instructie bij de toets daarin een bijdrage heeft gehad. In contrast met het onderzoek van Van Lieshout (1997), maar in overeenstemming met de studie van Beishuizen e.a. (1997), was de rond-af-eerste-getalstrategie ook een relatief belangrijke strategie. In tegenstelling tot de studie van Van Lieshout (1997), was de gemengde splits-rijgstrategie van ondergeschikt belang. Verder verschilden de groepen niet in de frequentie van de rijgstrategie. Er werd geen correlatie gevonden tussen rekenprestaties en het gebruik van de rijgstrategie, hoewel van deze strategie wordt gezegd dat deze succesvoller is dan de splitsstrategie (Beishuizen, 1993).

Voorts bleken er enige aanwijzingen te zijn dat het gebruik van de rond-af-eerstegetalstrategie meer met hoogbegaafdheid dan met leerproblematiek was geassocieerd. Nederlandse reken-wiskundecurricula besteden zelden aandacht aan deze strategie. Misschien ontdekten hoogbegaafde leerlingen deze strategie zelf, terwijl leerlingen met leerproblemen ofwel deze strategie altijd al met een lagere frequentie hadden gebruikt, ofwel deze strategie misschien hadden afgeleerd door hun langere contact met het rekencurriculum. Beishuizen e.a. (1997) vonden dat leerlingen die deze strategie gebruikten meer dan andere leerlingen in staat waren opgaven hoofdrekenend op te lossen.

Zoals verwacht, was het gebruik van de splitsstrategie meer aan leerproblemen dan aan hoogbegaafdheid verbonden. Beishuizen (1993) en Van Lieshout (1997) vonden een duidelijke relatie tussen het gebruik van de splitsstrategie en lage prestaties in hoofdrekenen. Deze bevinding werd in het huidige onderzoek ondersteund door het feit dat de frequentie van de splitsstrategie negatief bleek te correleren met de prestaties in de strategietoets. Deze klaarblijkelijk riskante splitsstrategie wordt ook weinig onderwezen in het Nederlandse rekencurriculum en is misschien ook een zelf ontdekte strategie die gebaseerd is op de ervaring met de eenvoudiger optel- en aftreksommen onder de 10 (Beishuizen, 1993). De jongere, competentere hoogbegaafde kinderen lijken meer adequate strategieën te ontwikkelen, terwijl de oudere, minder competente leerlingen nog blijven vasthouden aan hun inefficiënte splitsstrategie. Toch is niet geheel uit te sluiten dat het frequentere gebruik van de splitsstrategie door de leerlingen met leerproblemen een gevolg is van het onderwijs. De school voor speciaal onderwijs gebruikte ten tijde van het onderzoek een methode waarin voor het optellen en aftrekken onder de honderd zowel de rijgstrategie als de splitsstrategie werden gebruikt (Pluspunt, oude versie). Maar het is mogelijk dat tijdens de feitelijke lessen toch werd aangesloten bij de door de kinderen gehanteerde splitsmethode, zoals dat vaker lijkt te gebeuren in het speciaal onderwijs. Daar zijn in dit onderzoek echter geen gegevens over beschikbaar.

Weliswaar bleek de frequentie van de splitsstrategie negatief te correleren met de prestaties in de strategietoets, maar niet met de prestaties op de tempotoets. De bovendien ontbrekende relatie tussen de prestaties op de tempotoets en de prestaties op de strategietest trekt de overeenkomst tussen de strategieën die in beide toetsen werden gebruikt in twijfel. Het gebruik van de splitsstrategie was inderdaad alleen gerelateerd aan de prestatiescore in de toets waarin de leerlingen was gevraagd de stappen van hun strategie op te schrijven. Misschien pasten de leerlingen hun strategiekeuze aan aan de taakeisen van de twee verschillende testsituaties. Welke strategieën zij gedurende de tempotoets gebruikten, blijft onduidelijk.

Een andere manier om naar het gebruik van strategieën te kijken, is het tellen hoe vaak een (niet-standaard) strategie is gebruikt die het meest geschikt lijkt te zijn voor de kenmerken van de opgave. In twee van de drie voor deze analyse in aanmerking komende combinaties van strategie en opgaventype, gebruikten de hoogbegaafde leerlingen deze handige strategieën inderdaad vaker dan kinderen met leerproblemen. De hoogbegaafde leerlingen pasten bijvoorbeeld hun strategiekeuze vaker aan aan het voorkomen van een negen als eenheid in het tweede getal van een opgave door de rond-af-tweede-getal-strategie te gebruiken. Deze resultaten kunnen worden geïnterpreteerd als ondersteuning van het kwalitatief gezichtspunt. Siegler en Lemaire (1997) toonden aan dat het hebben van de mogelijkheid tot het kiezen van strategieën de prestaties ten goede komt. Mogelijk kunnen hoogbegaafde leerlingen op jonge leeftijd hetzelfde rekenniveau halen als kinderen met leerproblemen, omdat zij meer strategieën in hun repertoire hebben waaruit ze een keuze kunnen maken, rekening houdend met de kenmerken van de opgave.

Samenvattend: het patroon van strategieën en prestaties was verschillend voor beide groepen, hetgeen een ondersteuning voor de kwalitatief-verschilhypothese vormt. Het is echter niet zeker of dit een direct resultaat is van verschillen in aangeboren of vroeg verworven cognitieve capaciteiten van beide groepen. De kwalitatieve verschillen kunnen compleet of gedeeltelijk een gevolg zijn van een verschillende geschiedenis van schoolervaringen. Het verschil van 3.4 jaar kan een hoop verschillende ervaringen veroorzaken, die bijvoorbeeld bestaan uit de mogelijkheid om bepaalde typen rekenopgaven te oefenen en de oplossingswijze te automatiseren. Dit onderzoek is slechts een begin om de aard van de verschillen in hoofdrekenen van hoogbegaafde kinderen en kinderen met leerproblemen te beschrijven. Om de invloed van aangeboren en vroeg verworven bekwaamheden en de rechtstreekse invloed van het rekencurriculum te scheiden zijn longitudinale designs nodig.

4.3 Praktische implicaties

Er zijn twee praktische implicaties. De eerste betreft het individuele onderzoek van kinderen die mogelijk hoogbegaafd zijn. Het hier gerapporteerde onderzoek liet zien dat kinderen met dezelfde score op een algemene rekentoets verschilden in hun patroon van deelvaardigheden. De hoogbegaafden gebruikten efficiëntere en handigere strategieën dan de kinderen met leerproblemen en overtroffen de kinderen met leerproblemen op de moeilijker rekenopgaven. Tegelijkertijd waren hun strategieën om eenvoudiger opgaven op te lossen minder geautomatiseerd dan die van de kinderen met leerproblemen, maar we verwachten dat de hoogbegaafde kinderen in dit opzicht de kinderen met leerproblemen snel zullen inhalen. Het is dus mogelijk dat de capaciteiten van hoogbegaafde leerlingen zullen worden onderschat door alleen naar de score op de algemene rekentoets te kijken. Zorgvuldig onderzoek van de oplossingsstrategieën en het type opgaven dat is opgelost, is nodig om onderschatting te voorkomen of te verminderen. Evenzo worden kinderen met leerproblemen mogelijk overschat op hun vaardigheid tot het aanpakken van de moeilijker opgaven, als de diagnostiek alleen op de score op de algemene rekenvaardigheidstoets wordt gebaseerd.

Ten tweede is de implicatie voor het reken-wiskundeonderwijs aan hoogbegaafde leerlingen, dat zij waarschijnlijk beter worden gediend door ze moeilijker opgaven te geven dan geschikt lijkt op basis van hun score op een algemene reken-wiskundetoets.

Noten

1 Wij danken de ouderorganisatie Pharos die ons gelegenheid gaf een oproep tot deelname aan het onderzoek in hun tijdschrift te zetten.

Literatuur

Beishuizen, M. (1992). Effecten van honderdveld en rekenstaven bij goede en zwakke rekenaars. In A.J.J.M. Ruijssenaars, & J.H.M. Hamers (Red.). *Leerproblemen op school. Rekenen als probleem* (pp. 109-128). Amersfoort: Acco.

Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education, 24,* 294-323.

Beishuizen, M., Putten, C.M. van, & Mulken, F. van (1997). Mental arithmetic and strategy use with indirect number problems up to hundred. *Learning and Instruction, 7,* 87-106.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*, 179-202.

Fuson, K.C., & Smith, S.T. (1997). Supporting multiple 2-digit conceptual structures and calculation methods in the classroom: issues of conceptual supports, instructional design, and language. In M. Beishuizen, K.P.E. Gravemeijer, & E.C.D.M. van Lieshout (Eds.). *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 163-198). Utrecht: Cdß Press.

Geary, D.C., & Brown, S.C. (1991). Cognitive addition: Strategy choice and speed-of-processing differences in gifted, normal, and mathematically disabled children. *Developmental Psychology, 27*, 398-406.

Heller, K.A., Kratzmeier, H., & Lengfelder, A. (1998). *Matrizen-Test-Manual Band 1. Ein Handbuch mit deutschen Normen zu den Standard Progressive Matrices van J. C. Raven.* Göttingen: Beltz-Test.

Hitch, G.J. (1978). The role of short-term working memory in mental arithmetic. *Cognitive Psychology, 10,* 302-323.

Kintsch, W. (1986). Learning from text. *Cognition and Instruction, 3,* 87-108.

Klein, T., & Beishuizen, M. (1994). Assessment of flexibility in children's mental arithmetic. In J.E.H. van Luit (Ed.). *Research on learning and instruction of mathematics in kindergarten and primary school* (pp. 125-152). Doetinchem: Graviant.

Lieshout, E.C.D.M. van (1997). What can research on word and context problems tell about effective strategies to solve subtraction problems? In M. Beishuizen, K.P.E. Gravemeijer, & E.C.D.M. van Lieshout (Eds.). *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 79-111). Utrecht: Cdß Press.

Lubinski, D., & Humphreys, L.G. (1990). A broadly based analysis of mathematical giftedness. *Intelligence, 14*, 327-355.

Montague, M., & Applegate, B. (1993). Mathematical problem-solving characteristics of middle school students with learning disabilities. *Journal of Special Education, 27*, 175-201.

Rack, J.P., Snowling, M.J., & Olson, R.K. (1992). The nonword reading deficit in developmental dyslexia: A review. *Reading Research Quarterly, 27,* 29-53.

Siegler, R.S., & Jenkins, E. (1989). *How children discover new strategies*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Siegler, R.S., & Lemaire, P. (1997). Older and younger adults' strategy choices in multiplication: Testing predictions of ASCM using the choice/no-choice method. *Journal of Experimental Psychology: General, 126,* 71-92.

Wolters, G., Beishuizen, G., Broers, G., & Knoppert, W. (1990). Mental Arithmetic: Effects of calculation procedure and problem difficulty on solution latency. *Journal of Experimental Child Psychology, 49,* 20-30.

Manuscript aanvaard: 31 januari 2002

Auteurs

E.C.D.M. van Lieshout is hoogleraar Orthopedagogiek met betrekking tot onderwijsleerproblemen

F. Meijers is orthopedagoge bij de Stichting Centrum voor Remedial Teaching en Opvoeding te Eindhoven

Correspondentieadres: Vrije Universiteit, Afdeling Orthopedagogiek, Faculteit der Psychologie en Pedagogiek, Van der Boechorststraat 1, 1081 BT Amsterdam, e-mail: ECDM.van.Lieshout@psy.vu.nl

Abstract

Mental addition and subtraction up to 100 in gifted children and children with learning deficiencies

The aim of this study was to find out whether gifted children differ qualitatively or quantitatively from children with learning deficiencies (LD) in the choice of strategies to solve addition and subtraction problems up to 100 mentally. Eighteen gifted primary school students (mean age: 9.3 years) were compared with 18 students with LD (mean age:12.8 years) who were matched on general math knowledge. The children were given a speed test and a strategy test in which they had to write down their mental solution steps. The gifted children appeared to use more efficient and clever strategies and outperformed the LD children on the most difficult problems (word problems with regrouping of tens and ones). In contrast, the LD children were more efficient in answering easy problems (bare problems without regrouping). The difference in the pattern of abilities between the two groups supported the qualitative difference hypothesis.