Discussie

Realiteit van wiskunde-onderwijs VWO ter discussie

Aad Goddijn
Freudenthal instituut, Universiteit van Utrecht

Inleiding

In het voorjaar van 1998 stak er in de pers een kleine storm op over de kwaliteit van het Nederlandse wiskundeonderwijs. Aanleiding was de inaugurale rede van 17 april die Frans Keune hield bij zijn benoeming tot hoogleraar algebra in Nijmegen (Keune, 1998a). Keune koos ervoor niet in te gaan op zijn wetenschappelijk specialisme maar sprak zijn zorg uit over ontwikkelingen in het Nederlandse wiskundeonderwijs onder de titel *Naar de knoppen*. Om te beginnen zette hij uiteen wat wiskunde volgens hem is: wiskunde gaat over abstracte objecten en zuivere deductie is de enige werkmethode. Toepassingen van de wiskunde zijn er uiteraard, maar wiskunde is geen natuurwetenschap. De bedoeling van wiskundeonderwijs moet zijn logisch te leren denken; de wiskunde is daar de juiste context voor, omdat die context volmaakt helder is.

Met voorbeelden uit wiskundemethoden laat Keune zien dat de 'nieuwste trend' op gebied van wiskunde (de zogenaamde realistische wiskunde) de plank misslaat. Keune is er duidelijk over dat het hem vooral gaat om de groep leerlingen die via de top van het VWO in een van de exacte vakken terecht zullen komen. Die groep komt in de onderbouw van het VWO niet aan zijn trekken en het gevolg is dat de belangstelling voor de bèta-vakken ernstig daalt.

De inaugurale rede – inclusief de publiciteit er omheen – had het karakter van een manifest en eindigde dan ook met een plan tot actie: het ontwikkelen van een via Internet beschikbare methode waarin het gaat om het juiste samenspel van abstractie, deductie en toepassing.

In de wetenschapsbijlage van de *NRC* (Van Delft, 1998) brengt hij de kwestie ook direct in verband met het Freudenthal instituut:

> Het Freudenthal instituut mag internationaal aan de weg timmeren, waar het abstractie en realiteit door elkaar klutst tot een mistig geheel is de betere leerling de klos.

Ook in de *Nieuwe Wiskrant* heeft Keune zijn standpunt kunnen toelichten (Keune, 1998b). In een korte reactie wijst Martin Kindt (Kindt, 1998) van het Freudenthal instituut erop dat de voorstelling van zaken die Keune van realistisch wiskundeonderwijs geeft niet strookt met wat in de literatuur hierover te vinden is, en gaat op de voornaamste verschillen in inzicht in. Kindt heeft ook twijfels over de uitwerking van 'Wiskunde 12-16' in de huidige schoolboeken. (Die worden overigens door onafhankelijke auteursgroepen ontwikkeld.)

Ook wordt een misverstand rechtgezet: de huidige stilte aan de poorten van de Mathematische Instituten heeft weinig met het wiskundeprogramma van de basisvorming te maken, dat is daar nog te vers voor, en ook niet met een realistische stroming in het VWO-programma; wiskundestudenten van nu hebben immers het VWO-B wiskundeprogramma in hun bagage, dat niemand met de term 'realistisch' in welke betekenis dan ook zal beschrijven. Bovendien blijkt de belangstelling voor de bèta-vakken in Amerika en andere Europese landen de laatste jaren minstens even hard terug te lopen als in Nederland. Verband zoeken met de aard van het Nederlandse wiskundeonderwijs of wijzen op (mogelijke) betrekkelijkheid van internationaal vergelijkingsonderzoek als TIMSS zet weinig zoden aan de dijk.

Een tegenstelling?

In het volgende uitgebreide fragment (Keune, F. 1998b, p. 48) komt een scherpe tegenstelling naar voren:

> Het is het samenspel van abstractie, deductie en toepassing dat de wiskunde zo krachtig maakt. Goed wiskundeonderwijs is gericht op dit samenspel van deze aspecten van de wiskunde. Vroeger lag de nadruk op abstractie en deductie en liet men de toepassing geheel over aan andere vakken, voornamelijk aan de natuurkunde.

Tegenwoordig worden in het voortgezet onderwijs abstractie en deductie grotendeels genegeerd en heeft men alleen oog voor het gebruik van de wiskunde. Dit wiskundegebruik is door gebrek aan abstractie en deductie noodzakelijkerwijs van een laag niveau.
Door het wegwerken van abstractie en deductie, twee wezenskenmerken van de wiskunde, blijft iets over dat geen wiskunde meer is. Toch is dit precies wat in de realistische wiskunde gebeurt. Abstracte zaken worden vervangen door zaken uit de leefwereld. De deductie is vervangen door waarnemen.

De tegenstelling is die tussen concreetheid, laag niveau, waarneming, werkelijkheid en toepassingen aan de ene kant en abstractie, deductie en goede wiskunde aan de andere kant. Daarmee wordt de wiskunde als een geïsoleerd, goed herkenbaar gebied voorgesteld, waarin begrippen absoluut helder zijn en geschikt zijn (gemaakt) voor logisch redeneren. Vermoedelijk wordt deze opvatting over de afgrenzing van het vakgebied gedeeld door een fors deel van de wiskundige beroepsgroep, in ieder geval op het moment dat wiskundigen zich openbaar uitspreken over de aard van hun specialisme.

Het accentueren van deze tegenstelling treffen we al bij Plato aan in de Philebusdialoog (Plato, ongeveer 360 voor Christus), waarin twee soorten rekenen tegenover elkaar worden gezet. Plato legt Socrates in de mond:

Er is een belangrijk kenmerk van verschil, Protarchus. De gewone rekenaar handelt met ongelijke eenheden: zijn 'twee' kan zijn twee legers, twee koeien of twee wat dan ook, van het kleinste in de wereld tot het grootste; terwijl de filosoof met hem niets van doen wil hebben, tenzij deze toestemt dat elk voorkomen van zijn eenheid precies gelijk is aan alle andere.

In 'de filosoof' herkennen we uiteraard Plato zelf, die zich niet bezig wil houden met voorbijgaande vluchtigheden als legers en koeien, maar wel met de van alle verwarringen ontdane zuivere idee 'twee'. (Op de mogelijkheid ook deze 'twee' met de term 'concreet' aan te duiden, kom ik later nog terug).

Ik wil wijzen op twee andere aspecten van dit fragment. Ook al voelt Plato zich verderop in de dialoog gedwongen de getallen van de filosoof 'beter' te vinden, hij legt ons in de opsomming 'legers, koeien, wat dan ook, het grootste en het kleinste in de wereld' juist ook de rijkdom van de 'twee' van de gewone rekenaar voor. Het tweede punt is dat de filosoof wel met de gewone rekenaar wil spreken, maar dan onder één voorwaarde: deze moet een bepaalde actie ondernemen, namelijk toestemmen dat elke eenheid gelijk is aan alle andere.

Opmerkelijk is de conclusie die Keune trekt direct na het bovengeciteerde fragment (Keune, 1998b, p. 48):

Realistische wiskunde is dus geen wiskunde. Men doet er beter aan om te spreken van rekenen.

Het is ongebruikelijk om van 'realistische wiskunde' te spreken. In zwang is wel de term 'realistisch wiskundeonderwijs'. Het verschil is essentieel: ook al zou wiskunde een van 'de werkelijkheid' onderscheidbare wereld zijn, dan nog kan het didactisch van groot belang zijn in het onderwijs meer aan bod te laten komen dan wiskunde in zijn uitgekristalliseerde vorm.

Heel grof – maar te beperkt – kan het uitgangspunt van realistisch wiskundeonderwijs toegelicht worden met de twee aspecten die zojuist bij het fragment uit de dialoog van Plato zijn aangegeven: de rijkdom van de werkelijkheid kan een goed uitgangspunt zijn om via een bewuste activiteit te komen tot de wiskunde van de filosoof. De alledaagse werkelijkheid is daarbij absoluut niet het enige uitganspunt, de essentie van realistisch wiskunde onderwijs ligt veel meer in de nadruk op wiskunde als activiteit, niet als kant en klaar product dat in het onderwijs moet worden 'overgedragen'.

Realistisch wiskundeonderwijs

De theorie van het realistisch wiskundeonderwijs legt onder andere grote nadruk op het proces van mathematiseren, dat in eerste instantie de overgang van concrete ervaringen naar de abstractie omvat, maar ook meer is. Freudenthal gaat in *Revisiting Mathematics Education* (Freudenthal, 1991) dan ook diep in op dit begrip. Het omvat zowel axiomatiseren, formaliseren in de traditionele zin, maar ook het modernere modelleren en het omvattende 'looking for essentials'. Het is de wiskundige activiteit bij uitstek:

> I myself insist on including in this one term the entire organizing activity of the mathematician, whether it affects mathematical content and expression, or more naive, intuitive, say lived experience, expressed in everyday language.

De 'mathematician' is hier duidelijk niet alleen de vakspecialist. De nadruk op activity is hier een constante. Iets eerder staat:

> To be sure, as popular as axioms and axiomatising might be in modern mathematics, they are only the highlights and the finishing touches in the course of an activity where the stress is on form rather than on content.

Onder 'looking for essentials' staat een lijstje opgenomen dat er zo uit ziet:

within a situation and across situations,
within a problem and across problems,
within a procedure and across procedures,
within an organisation and across organisations,
within a scheme and across schemes,
within an algorithm and across algorithms,
within a structure and across structures,
within a formulation and across formulations,
within a symbolisation and across symbolisations,
within an axiomatic system and across axiomatic systems.

Waarmee de brede range waarop de activiteit 'mathematiseren' van toepassing is nog eens wordt aangegeven.

Over mathematiseren als de essentiële activiteit is De Lange (1987) zeer duidelijk waar het gaat om wiskunde A (voornamelijk gericht op gebruik van wiskunde in de sociale wetenschappen), maar ook binnen de didactiek van het rekenen is deze gedachte theoretisch verhelderd en door praktijk ondersteund, men zie bijvoorbeeld Streefland, 1990. Realistisch rekenonderwijs propageert met name ook door reflectie geleide flexibiliteit van werkwijze, in tegenstelling tot het systematisch inslijpen van één enkel algoritme voor het oplossen van een specifiek probleem. Zo zal een leerling niet alleen leren dat 39 + 39 onder elkaar gezet kan worden om cijferend tot een resultaat te komen, maar ook merken dat er een route naar de uitkomst is via 40 - 1 en 80 - 2. De tegenstelling is weer dezelfde: die van rekenen leren als door reflectie geleide activiteit aan de ene kant en aan de andere kant die van het inslijpen van een algoritme, in de uitgekristalliseerde vorm die door anderen reeds is ontwikkeld. In dit licht gezien is 'rekenen' wiskundig veel rijker dan door Keune in bovenstaand citaat wordt gesuggereerd.

Gezegd moet worden dat er op het gebied van wiskunde B (gericht op exacte wetenschappen en techniek) veel minder is gepubliceerd waarin de theorie van het realistisch wiskunde onderwijs expliciet wordt genoemd. Vanuit het Freudenthal instituut gezien is dat goed verklaarbaar: op dit gebied is het Freudenthal instituut betrekkelijk recent bij de ontwikkeling van een curriculum betrokken, in feite pas actief bij de ontwikkeling van de nieuwe bovenbouwprofielen vanaf 1995.

In het advies van de Vakontwikkelgroep Wiskunde, (Sjamaar, e.a., 1995) worden drie hoofdaspecten van de wiskunde genoemd: modelleren, abstraheren en redeneren. Binnen het project Profi van het Freudenthal instituut werd hieraan vormgegeven in het experimenteel ontwerp voor de wiskundeprogramma's voor de profielen Natuur en Techniek en Natuur en Gezondheid, maar men liet zich ook, net als de Vakontwikkelgroep, inspireren door hoofdstuk 3 van het rapport van de commissie Wiskunde B VWO (De Lange, 1994). Daarin wordt een visie op wiskunde leren uiteengezet; gesteld wordt dat begripsontwikkeling een proces is:

> De eerste introductie van een bepaald begrip zal soms onvolledig of intuïtief moeten blijven; door bij alle gelegenheden waarin het begrip zich aandient expliciet op de betekenis in te gaan, wordt het begrip gaandeweg preciezer omschreven. Afhankelijk van de aard van het begrip kan een goede definitie in een later stadium worden gegeven, of zal dit wegens te grote moeilijkheidsgraad of complexiteit aan het vervolgonderwijs moeten worden overgelaten (p. 47).

Het gaat hier niet over een aanbeveling hoe wiskunde aan vakgenoten moet worden gepresenteerd; daar mag, zo men dat wil, een definitie van een begrip aanvang zijn. Wiskundeonderwijs op het VWO is blijkbaar iets anders.

Wiskundedocent G. Huls doet in de *Nieuwe Wiskrant* van juni 1998 (Huls, 1998) verslag van een experiment Voortgezette Meetkunde, uitgaande van in het Profi-project ontwikkeld materiaal. Het verslag opent met een beschrijving van een toepassing maar gaat verderop vooral in op het leren bewijzen. Het verslag is bedoeld voor docenten wiskunde en verwijzingen naar de theorie van het realistisch wiskundeonderwijs zijn daar niet per se nodig. Het had makkelijk gekund; de gebruikte tekst in het experiment richt zich expliciet op de gang van praktische uitgangssituatie naar wiskundige theorie.

Door Keune wordt 'realistische wiskunde' opgevat als blijvend bij de realiteit, in genoemde publicaties worden 'toepassingen' juist als startpunt voor abstractie, formalisatie en deductie gezien. Een groter tegenstelling in interpretatie is nauwelijks denkbaar. Het is goed mogelijk dat de term 'realistisch' dit misverstand in de hand werkt. In de inleiding tot de bundel waarin de bijdrage van Streefland (Streefland, 1990) is opgenomen wordt het misverstand al op de eerste bladzijde genoemd en opgehelderd. In de openbare discussie van dit moment had de verwarring makkelijk vermeden kunnen worden.

Maar er is wel wat aan de hand: algebra

Zoals al vermeld in de reactie van Kindt, moet de huidige praktijk in de onderbouw niet vereenzelvigd worden met wat door voorstanders van realistisch wiskundeonderwijs wordt beoogd. De praktijk van de wiskunde in de onderbouw van het VWO is gevarieerd. Veel docenten kiezen momenteel voor extra activiteiten buiten de methoden om, in feite omdat ze het met Keune eens zijn dat de gangbare wiskundemethoden te weinig uitdaging bieden voor de meer getalenteerde leerling, en ook omdat er te weinig gewerkt wordt aan formalisatie en abstractie. Vaak wordt ook gesteld dat er te weinig aandacht is voor oefenen van vaardigheden, met name van algebraïsche aard. Het is nuttig een blik terug in de tijd te werpen, omdat het vaststellen van oorzaak en gevolg hier van belang is.

Vóór de periode waar we ons nu in bevinden werd het onderbouw wiskundeprogramma nog in grote mate bepaald door de verandering van de late jaren 60, die bekend staat als de New Math. De beweging van de New Math – gestart door wiskundigen van professie – beoogde wat nu ook weer voorgesteld wordt: de wiskunde zuiver te houden. Dat werd toen gedaan door het onderwijs op te zetten vanuit een reeds bereikte systematiek van de wiskunde zelf, waarin verzamelingenleer en structuur brengen in verzamelingen de leidraad was. Bij algebra ging het meer om de kennis van en inzicht in 'wetten' als de distributiviteit en bij meetkunde was het abstracte concept transformatie belangrijker dan het te transformeren object zelf.

Met veel idealisme werd dit concept voor het onderwijs uitgewerkt maar binnen dertig jaar wordt overal afstand genomen van dit gedachtegoed.

In een Cito-examenopgave uit de nadagen van de New Math werd gevraagd naar het aantal elementen van de verzameling S, gedefinieerd door

$$S = \{ z \in Z \mid z^2 + z + \tfrac{1}{4} = 0 \}$$

Er was keuze uit 0, 1, 2, of meer.

De taal is die van de formele wiskunde; hoe ver de ontaarding gaat blijkt vooral uit de toelichting van het Cito, waarin verwacht werd dat de vergelijking opgelost zou worden met behulp van de algemene methode voor het oplossen van vierkantsvergelijkingen: de bekende wortelformule. Dat zelfs binnen de New Math-benadering een triviale oplossing voor de hand ligt (z is geheel, dus $z^2 + z$ ook, dus is $z^2 + z + \frac{1}{4}$ niet geheel en daarom ongelijk nul), werd door niemand meer gezien.

Het (extreme, maar niet alleenstaande) voorbeeld illustreert hoe door te veel nadruk te leggen op de abstracte kant van de wiskunde, de wiskunde in het onderwijs ontaardde in een loos ritueel waar in de uiterlijke schijn van het vak – symbolen en formules – werd opgehouden maar waarin in ieder geval wiskundigen hun vak niet herkennen.

De operatie W12-16 van de jaren 1987-1992 was bedoeld om een programma te ontwikkelen en uit te testen dat betekenisvolle wiskunde voor iedereen moest bevatten. In zo'n programma heeft de genoemde opgave geen plaats.

Uit het experiment W12-16 kies ik als voorbeeld de volgende opgave die tot het experimentele examen 1992 hoorde.

De tabel in de bijlage [hier niet afgedrukt] gaat over $x^3 + x$ en $\frac{1000}{x}$.

11. Kies voor x de waarden 2, 5 en 8 en vul de tabel in.
12. Reken uit hoeveel verschil er is tussen $x^3 + x$ en $\frac{1000}{x}$ als $x = 100$.
13. Gebruik de getallen uit de tabel en schets in het assenstelsel op de bijlage de grafieken van de functies $x \rightarrow x^3 + x$ en $x \rightarrow \frac{1000}{x}$.
14. Geef een waarde voor x waarvoor $x^3 + x$ en $\frac{1000}{x}$ ongeveer aan elkaar gelijk zijn. Bereken hoe groot het verschil dan is.
15. Schrijf op hoe je een waarde voor x kunt vinden waarvoor het verschil tussen $x^3 + x$ en $\frac{1000}{x}$ kleiner is dan in vraag 14.

De meerkeuzevorm is verlaten. De opgave begint met twee betrekkelijk gemakkelijke onderdelen, maar daarna wordt de leerling gevraagd zelf een methode onder woorden te brengen. Dat zal een vorm van steeds beter benaderen van de oplossing van de vergelijking zijn, een wiskundig proces dat hier misschien onschuldig aandoet, maar makkelijk aanleiding kan zijn voor voortzetting op hoger niveau.

De opgave bevat geen verwijzing naar een concrete werkelijkheid maar heeft wel de sfeer van 'realistisch wiskundeonderwijs' in de zin dat het gaat om een situatie waarin de leerling zich kan inleven, waarin de situatie dus realiteit wordt en waarin de leerling zelf constructies kan uitvoeren. Ook kan opgemerkt worden dat in het bedoelde oplossingsproces – het geleidelijk inklemmen van de gezochte oplossing – het concept van oplossen van een vergelijking helder zichtbaar blijft.

Ook de inklemopgave heeft de mogelijkheid van ontaarding in zich, kan aangediend worden als recept dat (bijna) altijd benaderen van een oplossing van een vergelijking toelaat. Dat is echter niet de opzet van het voorgestelde algebraprogramma, zoals bij inzage van *Achtergronden van het Nieuwe leerplan wiskunde 12-16* (Abels, e.a., 1992) snel blijkt.

Wie de opgave nu ziet, kan licht de indruk krijgen dat het niveau ervan niet hoog is. Zo wordt er alleen maar ingevuld in formules en worden geen typisch algebraische manipulaties vereist. Toch wezen veel docenten er in de projectperiode herhaaldelijk op dat het projectteam te hoge verwachtingen had van wat mogelijk was, als een dergelijke opgave werd voorgesteld. Die waarschuwingen hebben hun weerslag gehad.

Terugkijkend kan vastgesteld worden: in het project W12-16 is veel aandacht geweest voor de middengroep van leerlingen, die van de Mavo en ook voor de VBO-stroom, zij het in een later stadium, maar voor de groep leerlingen die het VWO ingaat betrekkelijk weinig. Dat is indertijd al binnen de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs, die het project begeleidde, geconstateerd; de hoop was misschien dat de auteurs van leerboeken voldoende aanvulling zouden bieden. Voor dezen geldt echter nog meer dat ze luisteren naar wat docenten van nu met leerlingen van nu in het algemeen denken te kunnen bereiken.

Keune is ook niet de enige die vaststelt dat de toekomstige VWO-leerling hierdoor vaak niet voldoende uitgedaagd wordt, veel leerlingen uit die groep zeggen hetzelfde.

Of valt het mee: meetkunde en groei

In zijn rede citeert Keune enkele fragmenten uit Netwerk. De gekozen voorbeelden gaan over berekenen van oppervlakte van figuren met punten op een rooster en het gebruik daarvan in relatie tot de stelling van Pythagoras. Een bewijs was in Netwerk niet te vinden, aldus Keune. Hij vergezelt het voorbeeld van een bewijs, zoals hij dat zelf heeft overgeschreven van het bord van de heer Peters op de HBS.

Zonder de aanpak van Netwerk te verdedigen – dat laat ik over aan de betreffende auteursgroep – wil ik toch wel de vraag stellen: wordt bewijzen dan geleerd door overschrijven?

Het antwoord op de vraag is vaak 'ja, maar' geweest. De leerlingen die het vroeger op deze manier inderdaad leerden, waren er wel. Maar wiskundedocenten die in de bedoelde periode actief waren, vertellen dat de groep die het leerde klein was. Overigens: niet alle leerlingen uit die kleine groep zijn zich daarvan achteraf nog bewust. De meetkunde die nu in de onderbouw van het VWO in de boeken verschijnt is minder direct op deductie en geheel niet op werken binnen een axiomatisch systeem gericht. Ruimtelijke oriëntatie speelt er daarentegen een grote rol, leren zien van patronen ook en het gebruik maken daarvan bij redeneringen en berekeningen. Reflectie is er zeker wel, activiteiten die voorbereiden op bewijzen ook. De gewraakte opgave van Netwerk hoort daar bij, al blijft het ontbreken van een verdergaande redenering kwalijk. Deductie blijft in de onderbouw vaak lokaal en is weinig gesystematiseerd. De vraag is hoe ernstig dat is, als we kijken naar het vervolg.

Zoals al gezegd werd, komt het klassieke bewijzen in de meetkunde weer terug in het VWO, maar nu wel in een breder kader waar ook toepassingen bij horen en alleen voor die groep waarvoor het redelijkerwijs zinvol en haalbaar lijkt: binnen het profiel Natuur en Techniek.

Opmerkelijk is dat bij het experimentele examen van 1997 ongeveer de helft van de huidige wiskunde-B groep tot de kern van de zaak komt bij de examenopgave van 1997. Zie de bespreking in de *Nieuwe Wiskrant* (Lagerwaard & Lent, 1997). Van de helft van deze groep mag verwacht worden dat ze, was de herprofileringsoperatie voltooid, het profiel N&T gekozen zou hebben; de andere helft zou vermoedelijk N&G gekozen hebben, waarin het onderwerp Voortgezette Meetkunde geen plaats heeft. Bij het begin van het experiment heb ik er al op gewezen dat het leeftijdsverschil tussen de meetkundeleerlingen van voor 1968 en die van nu een positief effect heeft op de houding ten opzichte van het bewijzen (Goddijn, 1995). Zo stellen leerlingen van nu soms zelf kritische vragen over onderbouwing van de meetkunde: een niveau van actief met axiomatiek bezig zijn dat vroeger niet voorkwam.

Bij observeren van het meetkunde-experiment in de klas bleek dat de problemen die leerlingen met bewijzen in de meetkunde hebben zelden met het gebruik van de logica te maken hebben, maar meer met het herkennen van de juiste componenten in een figuur waardoor het bewijs gaat lopen. De leerlingen die nu meedoen in het experiment hebben nog een tamelijk kaal meetkundeprogramma genoten in de onderbouw. De hoop bestaat dat de nieuwe onderbouw, waarin meer aan intuïtief meetkundig inzicht wordt gewerkt eerder een positieve uitwerking zal hebben dan een negatieve.

Een ander voorbeeld van een lijn van onderbouw naar VWO-top is het onderwerp 'groei'. In de nieuwe onderbouw komen expliciet lineaire, kwadratische en exponentiële groei ter sprake; het algebraprogramma is namelijk breder van opzet dan de vroeger heersende microscopie van de kwadratische functie. In het kader van toepassingen wordt verkend hoe deze groeitypen zich tot elkaar verhouden, welk groeitypen sterker zijn dan anderen. Men kan zich hier gemakkelijk talloze praktijksituaties bij voorstellen. In de Voorgezette Analyse van het VWO profiel N&T wordt daar nadrukkelijk op voortgebouwd, maar nu in de formele vorm van klassieke limieten als bijvoorbeeld

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2^x} = 0$$

die hier ook bewezen worden.

Vormende waarde

Keune wijst op de gevaren van het veronachtzamen van abstractie en deductie in de onderbouw van het voortgezet onderwijs. Hij noemt onder andere:

> Er is geen training in logisch redeneren, hetgeen ook maatschappelijke consequenties heeft: logisch kunnen denken is voor iedereen van grote waarde (Keune, 1997c).

Er is nog nooit expliciet transfer aangetoond van leren logisch denken in de zuiver wiskundige context naar contexten daarbuiten. Het zijn vaak de wiskundigen geweest die dit geloof in de vormende waarde van het vak naar voren brengen. Dijksterhuis, eminent historicus van de wiskunde die zich gepassioneerd met hervormen van het wiskundeonderwijs bezig hield, was een groot voorbeeld, zie de inmiddels bekende biografie van K. van Berkel uit 1996.

Er zijn ook argumenten naar voren te brengen waarom die transfer helemaal niet zo waarschijnlijk is. Keune zelf stelt bijvoorbeeld dat de abstracte en welgedefinieerde objecten van de (zijn) wiskunde de helderheid hebben waardoor zuiver logisch denken erover mogelijk is. Daarmee wordt dan feitelijk ook gesteld dat de minder welgedefinieerde onderwerpen waar men zich buiten de wiskunde mee bezighoudt, zich daar minder voor lenen. Het lijkt er dan ook eerder op dat het een gevaarlijke schijn van logisch denken oplevert als de redeneertechniek die bij de wiskunde opgeld doet, daarbuiten wordt toegepast.

Met weinig succes is ook geprobeerd door expliciet logica te onderwijzen, studenten op een hoger plan van denken over hun eigen vak – inclusief wiskunde – te brengen. Bij de beschrijving van ervaringen met de VWO-meetkunde werd al iets dergelijks gezegd: de logica zelf is zelden het probleem, de wiskundige inhoud (de meetkundige objecten) maakt het moeilijk een juiste bewijsweg te vinden.

Lang voor de termen 'vormende waarde' en 'transfer' bestonden sprak Blaise Pascal – eminent wiskundige uit de 17e eeuw – zich er in zijn *Esprit de Géométrie et Esprit de Finesse*, van vóór 1662, al over uit. Heeft men eenmaal, zo zegt hij, het hoofd zo gedraaid dat men de objecten van de meetkunde kan zien, dan is redeneren ermee gemakkelijk. Maar in het dagelijks leven is het andersom: daar zijn de objecten waar men over spreekt een ieder bekend, maar ze zijn met vele en zijn niet helder omschreven; daardoor is het redeneren ermee uiterst lastig. Pascal voegt eraan toe, dat wie geheel doortrokken is van de Esprit de Géométrie, niet noodzakelijk ook een meester is van de Esprit de Finesse, en andersom.

Nu bedoelt Keune misschien ook meer dat toepassingen van de wiskunde van groot maatschappelijk belang zijn. Dat is juist, maar het is een veel minder vergaande claim.

Abstractie en de realiteit van de wiskunde

In zijn rede stelt Keune:

> Wat is er volgens mij nu echt mis met ons wiskundeonderwijs? De meest diepgaande fout is het verwarren van abstractie en realiteit. Abstractie is ontstaan uit de behoefte aan helderheid. In de hersenspinsels van de wiskunde is er sprake van absolute helderheid. In ons onderwijs wordt dat mistig gemaakt en dat is zonde. Het is een gemiste kans voor het leren van exact denken (Keune, 1998a).

Ook Schalkwijk (1998) stelt dat bij het leren bewijzen het scheiden van realiteit en wiskunde van belang is:

> Vermenging van leefwereld en wiskunde frustreert het bewijzen; de grens daartussen moet duidelijk worden gemarkeerd, zeker niet worden verdoezeld, om te kunnen begrijpen wat de betekenis van beide werelden voor elkaar is (p. 22).

Schalkwijk citeert met instemming hierbij Freudenthal (1973):

> ... Sie [Wiskunde en werkelijkheid] sollen ihm [de leerling] nicht getrennt vorgesetzt werden. Er soll es lernen, sie selber zu trennen, so bald ihre gegenseitige Beziehungen so innig geworden sind, dass die Trennung keiner Seite schadet (p. 527).

Er is nog wel groot verschil tussen 'de grens daartussen moet worden gemarkeerd' en 'soll es lernen, sie selber zu trennen', maar Schalkwijk, die probeert leerlingen (een selectie van de VWO-B leerlingen) in een speciale cursus actief en onderzoekend met wiskunde bezig te laten zijn, blijkt het het principe van actief mathematiseren in de praktijk van zijn onderzoek wel te huldigen. Kan men bij het voorgaande nog spreken van een gang van concreet naar abstract, bij het bestuderen van wiskunde lijkt vaak ook het omgekeerde plaats te hebben, zij het in een iets andere zin.

Professor N. Kuiper heeft tijdens een college Lineaire algebra voor mij eens mooi verwoord wat er mis is met het begrippenpaar concreet/abstract. Wat concreet of abstract is, hing volgens hem niet van het onderwerp af, maar van de betrokken persoon. Zo kan een getal als 5 voor sommige kinderen nog abstract zijn, ook in de zin dat het nog realiteit-gebonden is. Voor anderen kan 5 al zeer concreet zijn, ze weten precies wat er mee gedaan kan worden en wat niet. Voor hen kan een getal als de wortel uit min één echter weer onoverkomelijk abstract zijn, terwijl een geschoold wiskundige zich in een omgeving van dit getal even thuis voelt als een schilder bij zijn kwast.

Ofwel: abstractie is weliswaar iets dat veroverd kan worden, maar kan dan ook verdwenen zijn: de verovering van het abstracte maakt de zaken concreet. Zo ook het al genoemd rapport Wiskunde B VWO:

> 'Beauty is in the eye of the beholder', en abstractheid ook. Het leven is vol concepten die bij eerste kennismaking abstract aandoen maar waar men gaandeweg mee vertrouwd raakt, zodat het gevoel van abstractie verdwijnt (p. 51).

De ander zin is: Keune spreekt over het a priori vaststaan van de abstractheid van de objecten waar de wiskunde zich mee bezighoudt; Kuiper en het rapport Wiskunde B spreken over de subjectieve veranderlijkheid van de abstractheid; abstractheid is dan meer een kwalificatie hoe een object of begrip gezien of beleefd wordt.

Realistisch wiskundeonderwijs gaat dan ook niet – zoals gesuggereerd wordt door Keune – over concrete materiële realiteiten, maar wil steeds uitgaan van wat voor de leerling realiseerbaar is. Dat kunnen zaken zijn die tot normaliter 'concreet' worden genoemd, maar ook begrippen die traditioneel tot de zuivere wiskunde behoren.

Vanuit filosofisch standpunt gezien is het onderscheid tussen abstractie en realiteit ook al een hachelijke zaak, omdat natuurlijk ook de vraag beantwoord moet worden: wat wordt met realiteit bedoeld? Een naïeve beperking tot wat materieel is, voldoet natuurlijk niet. Zonder hier op dit gebied vol voetangels en klemmen in te gaan, wil ik nog wel wijzen op het feit dat diverse filosofen die zich momenteel bezig houden met de filosofie van de wiskunde, ontevreden zijn met het onderscheid dat gemaakt wordt over de status van de wiskundige beweringen enerzijds en de beweringen binnen andere disciplines anderzijds. Met status bedoel ik: welk waarheidscriterium moet er voor dergelijke uitspraken worden aangelegd? De wiskunde afdoen als afzonderlijk zuiver formeel systeem leidt ertoe dat waarheid niet meer kan zijn dan interne consistentie. De praktizerend wiskundige hoeft daar niet van wakker te liggen, maar vanuit filosofisch standpunt blijft het een kunstgreep die het onderliggende probleem vermijdt.

Tegenover deze formalistische visie op wiskunde (veelal geassocieerd met Hilbert) staat de platonistische, die in zekere zin het bestaan van de wiskundige werkelijkheid erkent, ongeveer zoals Plato de Ideeën als werkelijkheid en koeien en legers als vluchtige afschaduwingen ervan beschouwde.

Tot deze groep behoort onder ander Kurt Gödel; hij stelde, sprekend over 'the objects of transfinite set theory':

> But, despite their remoteness from sense experience, we do have a perception also of the objects of set theories, as is seen from the fact that the axioms force themselves upon us as being true. I don't see why we should have less confidence in this kind of perception, i.e. in mathematical intuition, than in sense perception, which induces us to build up physical theories and to expect that future sense perceptions will agree with them and, more, to believe that a question not decidable now has meaning and may be decided in the future.

Aldus geciteerd in 'Mathematical Truth, door Paul Benacerraf, zie *The Philosphy of Mathematics* (ed. Hart 1997). In deze bundel zijn ook de bijdragen van o.a. Hart, Maddy en Tait op dit punt interessant voor de filosofisch geïnteresseerde.

Tot slot

In het voorgaande zijn diverse visies op wiskunde en wiskundeonderwijs aan bod geweest. De formalistische visie en de platonistische zijn – weer, nog steeds – punt van discussie.

Davis & Hersch (1981) halen dezelfde passage van Gödel aan bij hun beschrijving van de platonistische visie, maar noemen ook René Thom, die niet vanuit de verzamelingenleer, maar vanuit de meetkunde spreekt. Ze stellen ook dat het in de dagelijkse wiskundige praktijk niet zo veel uitmaakt en vatten dat samen met:

> Most writers on the subject seem to agree that the typical working mathematician is a Platonist on weekdays and a formalist on sundays. That is, when he is doing mathematics he is convinced that he is dealing with an objective reality whose properties he is attempting to determine. But then, when challenged to give a philosophical account of this reality, he finds it easiest to pretend that he does not believe in it after all (p. 321).

Evenzo kan men eerst benadrukken dat beroepswiskundigen en onderwijsontwikkelaars met een realistische visie op wiskundeonderwijs fundamenteel verschillende visies op het vak kunnen hebben, om er geleidelijk achter te komen: beiden gaat het om 'goed' wiskundeonderwijs. Laten beide groepen in overleg blijven met respect voor elkaars uitgangspunten, werkelijke en beledene.

Literatuur

Abels, M. e.a. (1992) *Achtergronden van het Nieuwe leerplan wiskunde 12-16.* Freudenthal instituut, RU Utrecht.

Davis, P. J. & Hersch, R. (1981). *The Mathematical Experience.* Penguin Books.

Delft, D. van (1998). Pannenkoekwiskunde. In: *Bijlage Wetenschap en Onderwijs van de NRC*, 25 april 1998.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education; China lectures.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe, I & II.* Klett Studiebücher, Stuttgart.

Goddijn, A. (1995). De diepte van het platte vlak. *Nieuwe Wiskrant 15-3, maart 1995*, pp. 6-12, Freudenthal instituut, Utrecht.

Hart, W. D. ed. (1997) *The Philosphy of Mathematics.* Oxford University Press.

Huls, G. (1998) Voronoidiagrammen en bewijzen in de klas. *Nieuwe Wiskrant 17-4, juni 1998*, pp. 18-22, Freudenthal instituut, Utrecht.

Keune, F. (1998a). *Naar de knoppen.* Inaugurale rede 17 april 1998, Katholieke Universiteit Nijmegen. *http:www.sci.kun.nl/math~keune.*

Keune, F. (1998b). Naar de knoppen. *Nieuwe Wiskrant 17-4, juni 1998*, p. 48, Freudenthal instituut, Utrecht.

Kindt, M. (1998). Beknopt weerwoord. *Nieuwe Wiskrant 17-4, juni 1998*, p. 49, Freudenthal instituut, Utrecht.

Lagerwaard, K. & Lent, G. van. (1997). Q. E. D. Meetkundebewijzen in het eindexamen. *Nieuwe Wiskrant 17-2, december 1997*, p. 4-9, Freudenthal instituut, Utrecht.

Lange, J. de, (1987). *Mathematics, Insight and Meaning.* Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijscomputercentrum, Rijksuniversiteit Utrecht.

Lange, J. de e.a. (1994). *Rapport studiecommissie Wiskunde B VWO.*

Pascal, B. (voor 1662). Difference entre l'esprit de géométrie et l'esprit de finesse. *Nr. 512 (nummering Lafuma) van de Pensées; Oevres Complétes,* Editions du Seuil, 1963).

Plato, (-360). Philebus, geciteerd in Fauvel J. & Gray, J.: *The History of Mathematics, a reader*; Macmillan Press 1988.

Schalkwijk, L. T. J. M. van. (1998). *Onderzoekend Wiskunde Leren.* Proefschrift Katholieke Universiteit van Nijmegen.

Sjamaar, M. e.a. (1995). *Advies examenprogramma's havo/vwo wiskunde.* Den Haag, 1995.

Streefland, L. (1990) Realistic Mathematics Education (RME), What does it mean? In: *Context, Free productions, Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education, K. Gravemeijer, M. van den Heuvel, L. Streefland; researchgroup for Mathematical Education and Educational Computer Centre*, State University of Utrecht.