

# Realistisch modelleren van problematische wiskundige toepassingsopgaven op de basisschool

Een review van het recent onderzoek

L. Verschaffel, E. De Corte en S. Lasure

## Samenvatting

Enkele jaren geleden hebben zowel Greer als Verschaffel, De Corte en Lasure aangetoond dat leerlingen uit de bovenbouw van de basisschool een sterke neiging hebben om hun ervaringskennis omtrent de concrete, reële situatie waarop een rekenvraagstuk betrekking heeft, te negeren tijdens het oplossingsproces. Daarbij maakten zij gebruik van een serie van speciaal ontwikkelde opgaven waarbij er zich vanuit realistisch oogpunt een probleem stelt bij het omzetten van de probleemsituatie in een passend wiskundig model. In dit artikel wordt een aantal vervolgstudies hieromtrent besproken. Eerst wordt ingegaan op enkele onderzoeken waarin de resultaten uit de bovenvermelde studies gerepliceerd zijn onder vrijwel identieke omstandigheden. Dan worden twee lijnen van onderzoek besproken naar de effectiviteit van bepaalde ingrepen in de experimentele setting die erop gericht zijn bij de leerlingen een meer realistische aanpak en oplossingswijze uit te lokken. De eerste lijn betreft het toevoegen van 'scaffolds' gericht op het verhogen van de alertheid van leerlingen tijdens het oplossen van dergelijke problematische opgaven; de tweede het verhogen van de authenticiteit van de experimentele setting. Daarna komt onderzoek aan bod waaruit gebleken is dat ook (aspirant-)leerkrachten over het algemeen niet geneigd zijn om schoolvraagstukken op een realistische wijze te benaderen. Vervolgens wordt verslag uitgebracht van een onderwijsexperiment waarin men erin geslaagd is om de neiging van leerlingen tot niet-realistisch wiskundig modelleren via aangepaste instructie te doorbreken. Aan het einde van dit artikel wordt kort ingegaan op de theoretische, methodologische en onderwijspraktische implicaties van dit onderzoek.

## 1 Onrealistisch modelleren aangetoond: aanvankelijke studies

Een veel gehoorde kritiek aan het adres van het traditionele vraagstukkenonderwijs is dat leerlingen op het einde van de basisschool een sterke neiging ontwikkeld hebben om hun ervaringskennis omtrent de concrete situatie waarop een rekenvraagstuk betrekking heeft, compleet te negeren tijdens de verschillende fasen van het oplossingsproces. Dit zou een van de voornaamste verklaringen zijn waarom deze vraagstukkendidactiek er onvoldoende in slaagt om bij leerlingen de bekwaamheid te ontwikkelen in het functioneel gebruik van de geleerde wiskundige begrippen en technieken in reële toepassingsituaties (Burkhardt, 1994; De Corte & Verschaffel, 1985; Nesher, 1980; Treffers & De Moor, 1990). Greer (1993) en Verschaffel, De Corte en Lasure (1994) verzamelden overtuigende empirische steun voor deze neiging van leerlingen om vraagstukken op een oppervlakkige, routinematige manier aan te pakken, zonder rekening te houden met de concrete situatie of context waarop het vraagstuk betrekking heeft. In het onderzoek van Verschaffel e.a. (1994) werd aan een groep van 75 10-11-jarige leerlingen een toets gegeven bestaande uit tien itemparen. Het ene vraagstuk uit elk itempaar was een standaardopgave (S-item) die 'probleemloos' gemodelleerd en opgelost kan worden door middel van één of twee rekenkundige basisbewerkingen met de getallen uit de opgave (bijv. 'Karel heeft 6 planken van 2 meter gekocht. Hoeveel planken van 1 meter kan Karel hiervan zagen?'). Bij de andere opgave uit elk paar vormt de omzetting in een passend wiskundig model wél een probleem (P-item), tenminste als men de context waarrond deze opgave is

opgebouwd 'au sérieux' neemt (bijv. 'Steven heeft 4 planken van 2,5 meter gekocht. Hoeveel planken van 1 meter kan Steven hiervan zagen?'). Tabel 1 geeft een overzicht van de tien P-items uit deze toets. De leerlingen werd niet enkel gevraagd om hun antwoord op te schrijven, maar ook hoe ze aan dit antwoord gekomen waren en of ze daar nog commentaar op wensten te geven. Het aantal antwoorden en/of commentaren op de P-items waaruit bleek dat de leerling rekening gehouden had met de reële opgavensituatie, was alarmerend laag: slechts 17% van alle leerlingreacties op deze P-items was als realistische reacties (RRs) te beschouwen. Bij het zo-even vermelde plankenitem bijvoorbeeld gaf slechts 10% van de leerlingen te kennen dat men in werkelijkheid slechts 2 planken van 1 m kan zagen uit één plank van 2,5 m, en dat derhalve 4 van deze planken slechts 8 planken van 1 m kunnen opleveren (in plaats van 10). De overige leerlingen reageerden vrijwel allemaal met het verwachte, stereotiepe antwoord; '4 x 2,5 = 10' zonder enige verdere commentaar. Wel was er een relatief groot verschil in het percentage RRs op de diverse P-items: terwijl het percentage RRs bij acht van de 10 opgaven minder dan 20% bedroeg, steeg dit bij de twee opgaven waarin het quotiënt van een niet-opgaande deling adequaat geïnterpreteerd moet worden (nl. het bus- en het ballon-item) tot ongeveer 50%.

Gelijkaardige resultaten werden bekomen in Greers (1993) onderzoek, waarin een grote groep leerlingen van de eerste graad van het secundair onderwijs in vrijwel identieke omstandigheden als in de studie van Verschaffel e.a. (1994) een analoge toets kreeg. De helft van de P-items uit deze toets waren dezelfde als die uit het onderzoek van Verschaffel e.a. (1994), terwijl de andere helft uit andersoortige P-items bestond. Ook Greer vond op de meeste P-items een bedroevend gering aantal realistische antwoorden of commentaren. Een uitzondering hierop vormden weerom het bus-item en het ballon-item, die beide beduidend meer RRs uitlokten dan de overige P-opgaven.

De alarmerende resultaten van deze studies hebben de voorbije jaren geleid tot nogal wat vervolgonderzoek, dat in onderhavig artikel voorgesteld en besproken wordt. Paragraaf 2 bevat een overzicht van de studies waarin het door Greer (1993) en Verschaffel e.a. (1994) beschreven fenomeen bij leerlingen van diverse nationaliteiten is gerepliceerd onder (vrijwel) identieke omstandigheden. In de twee daaropvolgende paragrafen komen twee reeksen vervolgstudies aan bod, waarin gepoogd is om het aantal RRs op deze P-items te verhogen via diverse ingrepen in de experimentele setting die erop gericht zijn bij de leerlingen een meer realistische aanpak- en oplossingswijze uit te lokken. In de eerste reeks studies, die in paragraaf 3 besproken wordt, gebeurde dit door

Tabel 1  
De tien P-items uit de toets van Verschaffel e.a. (1994)

P1	Karel heeft 5 vrienden en Joris heeft 6 vrienden. Karel en Joris besluiten samen een feestje te geven en nodigen al hun vrienden uit. Alle vrienden komen. Hoeveel vrienden zijn er op het feestje? (VRIENDEN)
P2	Steven heeft 4 planken van 2,5 meter gekocht. Hoeveel planken van 1 meter kan Steven hiervan zagen? (PLANKEN)
P3	Iemand giet eerst een volle emmer water van 40 graden en dan een volle emmer water van 80 graden in een kuip. Hoeveel graden is het water in deze kuip? (WATER)
P4	450 soldaten moeten per bus naar het oefenterrein vervoerd worden. Hoeveel bussen zijn er nodig, als je weet dat er 36 soldaten in één bus kunnen? (BUS)
P5	De recordtijd van Jan op de 100 meter is 17 seconden. In hoeveel tijd loopt Jan 1 kilometer? (LOPER)
P6	Bruno en Saskia gaan naar dezelfde school. Bruno woont 17 kilometer van school en Saskia 8 kilometer. Hoever wonen Bruno en Saskia van elkaar? (SCHOOL)
P7	Veerle, Lies, Paul en Sven krijgen van opa een doos met 18 ballonnen. Zij verdelen die ballonnen eerlijk onder elkaar. Hoeveel ballonnen krijgt ieder? (BALLON)
P8	Rob is geboren in 1978. Het is nu 1993. Hoe oud is Rob? (LEEFTIJD)
P9	De afstand tussen twee palen bedraagt 12 meter. Hoeveel stukken touw van 1,5 meter lang moet men aan elkaar knopen om de beide palen te verbinden? (TOUWEN)
P10	Deze vaas wordt gevuld met water. Na 10 seconden staat het water 4 cm hoog. Hoe hoog zal het water staan na 30 seconden? (Deze opgave was vergezeld van een tekening van een gedeeltelijk gevulde, kegelvormige vaas) (VAAS)

de leerlingen alert te maken op het problematische gehalte van sommige toetsitems of door hen er uitdrukkelijk op te wijzen dat andere dan 'conventionele' antwoorden toegelaten waren. In de tweede reeks onderzoeken, die in paragraaf 4 aan bod komen, trachtte men dit te realiseren door het authenticiteitgehalte van de experimentele setting te verhogen. In paragraaf 5 volgt een bespreking van enkele constaterende studies waarin men op zoek is gegaan naar bepaalde aspecten van de instructie die mede verantwoordelijk gesteld kunnen worden voor het ontstaan en de ontwikkeling van de neiging van leerlingen tot niet-realistisch modelleren. In paragraaf 6 beschrijven we een construerend onderzoek waarin is nagegaan of het mogelijk is om de dispositie tot niet-realistisch modelleren en oplossen van leerlingen uit de bovenbouw van de basisschool te doorbreken via aangepaste instructie. Aan het einde van dit artikel plaatsen we enkele theoretische en methodologische kanttekeningen bij de gerapporteerde onderzoeksgegevens en bekijken we de implicaties ervan voor de praktijk van het vraagstukkenonderwijs.

## 2 De studies van Greer (1993) en Verschaffel e.a. (1994) gerepliceerd

De resultaten van Greer (1993) en Verschaffel e.a. (1994) werden gerepliceerd in verschillende landen, waaronder Japan, Nederland,

Noord-Ierland, Venezuela en Zwitserland. Meestal gebeurde dit in het kader van een meer uitgebreide studie naar het effect van bepaalde variaties in de aanbieding van de P-items of in de testsetting. Vanwege deze variaties komen we op deze studies in de volgende paragrafen (paragraaf 3 of 4) nog terug. Maar ter ondersteuning van de alomtegenwoordigheid en de robuustheid van het door Greer (1993) en Verschaffel e.a. (1994) beschreven fenomeen, rapporteren we thans de resultaten van vier studies waarin groepen van leerlingen een gedeelte of alle tien P-items uit het onderzoek van Verschaffel e.a. (1994) aangeboden kregen onder gelijkaardige of identieke testcondities:

- Reusser en Stebler (1997a) pasten de test van Verschaffel e.a. (1994) toe bij 439 leerlingen van het eerste jaar secundair onderwijs uit het Duitssprekend gedeelte van Zwitserland;
- Yoshida, Verschaffel en De Corte (1997) legden dezelfde test voor aan 91 leerlingen van het vijfde leerjaar uit drie willekeurig geselecteerde klassen van een Japanse basisschool;
- Hidalgo (1997) vroeg 119 leerlingen van het vijfde leerjaar uit vier verschillende scholen van Venezuela eveneens deze test op te lossen;
- Caldwell (1995) bood vijf items uit de test van Verschaffel e.a. (1994) aan samen met twee P-items uit de test van Greer (1993) aan 75 jongens en meisjes van het vijfde leerjaar uit drie verschillende scholen in Noord-Ierland.

Tabel 2  
Percentages RRs op de P-items uit de studies van Greer (1993), Verschaffel e.a. (1994), Reusser en Stebler (1997a), Yoshida e.a. (1997), Hidalgo (1997) en Caldwell (1995)\*

P-item	Greer	Verschaffel	Reusser	Yoshida	Hidalgo	Caldwell
Vrienden	-	20	11	13	23	5
Planken	-	13	14	0	16	-
Water	-	17	21	11	11	-
Bussen	55	49	49	62	11	65
Loper	6	3	5	7	0	0
School	-	3	5	2	1	-
Ballonnen	85	59	75	52	55	81
Verjaardag	-	3	2	0	0	-
Touw	8	0	6	2	0	1
Vaas	2	4	0	4	0	-
Totaal	-	17	18,5	15	12	-

\* Voor de volledige tekst van de P-items in de eerste kolom van de tabel, zie Tabel 1. De gemiddelde percentages RRs werden alleen berekend voor die studies waarin de tien P-items werden aangeboden.

De resultaten van deze replicatieonderzoekingen, die in Tabel 2 zijn opgenomen, komen zeer sterk overeen met die van de twee oorspronkelijke studies: het overgrote deel van de leerlingen vertoonde een sterke neiging om hun realiteitsgebonden kennis te negeren bij het oplossen van de meeste P-items, en het relatief percentage RRs voor de afzonderlijke P-items was zeer gelijkaardig als in de twee initiële onderzoekingen. Een opmerkelijke terugkerende vaststelling is dat de twee vraagstukken rond een niet-opgaande deling (nl. het bus- en het ballon-item) telkens veel meer RRs uitlokten dan de overige P-items.

In de studies van Reusser en Stebler (1997a), Hidalgo (1997) en Caldwell (1995) werden leerlingen achteraf ook individueel of klassikaal bevraagd over het waarom van het grote aantal niet-realistische reacties (NRs). Sommige leerlingen beweerden dat ze het 'probleematisch' gehalte van bepaalde P-items weliswaar hadden opgemerkt, maar daar in hun uiteindelijk antwoord bewust geen rekening mee hadden gehouden, omdat zij een onderscheid maakten tussen (het oplossen van) een wiskundevraagstuk op school enerzijds en (het oplossen van) een reëel buitenschools probleem anderzijds. Bij wijze van voorbeeld geven we hierna enkele uitspraken van leerlingen tijdens een klasgesprek dat Reusser en Stebler (1997a, p. 317) organiseerden kort na de afname van hun collectieve toets:

- 'I did think about the difficulty, but then just calculated it the usual way. (Why?) Because I just had to find some sort of solution to the problem. And that was the only way it worked. I've got to have a solution, haven't I?'
- 'I suspected that it wouldn't work but I solved it anyway. (Why?) Because otherwise the task wouldn't have been solved.'

Anderen gaven toe dat ze er geen moment aan gedacht hadden dat deze P-items moeilijk op te lossen waren of beter op een andere manier waren opgelost (bijv. 'Simply did not think of it' of 'It would never have crossed my mind to ask whether this task can be solved at all').

De resultaten van deze replicatiestudies bieden overtuigende empirische steun voor het bestaan van een sterke, en bij sommige leerlingen blijkbaar bewuste neiging om realiteitsgebon-

den kennis uit te sluiten bij het modelleren en oplossen van toepassingsopgaven die in een schoolse context worden aangeboden. Men kan zich hierbij echter de vraag stellen of deze alarmerende resultaten niet mede in de hand gewerkt zijn door bepaalde aspecten van de onderzoekssituatie waarin ze werden verkregen. In de volgende twee paragrafen rapporteren we twee verschillende reeksen van onderzoekingen waarin pogingen ondernomen zijn om het aantal RRs van de leerlingen op de P-items uit de onderzoekingen van Greer (1993) en Verschaffel e.a. (1994) te verhogen via bepaalde ingrepen in de experimentele setting.

### 3 De relatieve ineffectiviteit van 'scaffolds' gericht op het verhogen van de alertheid van leerlingen tijdens het oplossen van P-items

In deze paragraaf bespreken we de opzet en de belangrijkste resultaten van een eerste reeks vervolgonderzoekingen die verder gaan dan het puur constateren van de neiging van leerlingen tot niet-realistisch wiskundig modelleren. Kenmerkend voor deze studies is het doorvoeren van minimale ingrepen in de experimentele setting die leerlingen ervoor waarschuwen dat de probleemopgaven speciale aandacht vergen of die de leerlingen sterker uitnodigen tot het geven van een realistische reactie.

De studie van Yoshida, Verschaffel en De Corte (1997) was in eerste instantie een replicatie van het onderzoek van Verschaffel e.a. (1994) bij Japanse vijfdeklassers (zie paragraaf 2). Maar daarnaast had deze studie tot doel het effect na te gaan van een beperkte vorm van hulp: terwijl de ene helft van de Japanse leerlingen (n = 46) dezelfde neutrale instructie kreeg als in de studie van Verschaffel e.a. (1994), werd de andere helft (n = 45) expliciet gewaarschuwd dat de test meerdere problematische items bevatte en uitdrukkelijk uitgenodigd om deze problematische items aan te stippen en uit te leggen waarom ze niet of moeilijk (eenduidig) op te lossen waren. Terwijl in de neutrale conditie 15% van alle reacties als

realistisch te beschouwen waren (zie ook Tabel 2), werden in de waarschuwingconditie 20% RRs teruggevonden. Uit de statistische analyse bleek dat het verschil tussen deze gemiddelde percentages niet significant was, hetgeen betekent dat de extra waarschuwing geen betekenisvol effect had op de neiging tot niet-realistisch antwoorden van deze Japanse leerlingen.

De experimentele setting uit de aanvankelijke studies werd ook gewijzigd in een niet-gepubliceerde studie van Greer en Caldwell (voor een kort verslag zie Greer, 1997) met 13-14 jarigen in Noord-Ierland, waarvoor drie toetsen ontwikkeld werden – respectievelijk ‘Mathematics test’, ‘Estimation test’ en ‘Mathematical puzzles’ genaamd – waarvan elke leerling er één kreeg. De toets met als titel ‘Mathematics test’ bestond uit verscheidene S- en P-items uit de aanvankelijke studie van Greer (1993), die aan de leerlingen werden aangeboden als een wiskundetest, zonder extra instructies. De ‘Estimation test’ bevatte dezelfde P-items samen met drie echte schatopgaven. In de toets getiteld ‘Mathematical puzzles’ tenslotte kwamen eveneens dezelfde P-items voor, maar ditmaal waren ze vergezeld van drie complexe wiskundige raadsels. De verwachting was dat de leerlingen die met de laatste twee toetsen geconfronteerd zouden worden, meer op hun tellen zouden passen en (dus) op de P-items meer RRs zouden produceren. Doch deze alternatieve aanbiedingswijzen leidden niet tot een betekenisvolle toename in de proportie RRs. Uit de gesprekken die de onderzoekers achteraf met de leerlingen voerden kwam naar voren dat velen er (uitdrukkelijk) van uitgingen dat er een onderscheid bestaat tussen het soort van ‘conventionele’ antwoorden dat van leerlingen verwacht wordt tijdens de wiskundelessen op school, en de manier waarop levensechte probleemsituaties beantwoord worden. Zo zei een 10-jarige in antwoord op de vraag van de interviewer waarom hij geen realiteitsgebonden kennis had ingeschakeld bij het oplossen van de P-items uit de test getiteld ‘Mathematics test’: ‘I know all these things, but I would never think to include them in a maths problem. Math isn’t about things like that. It’s about getting sums right and you don’t need to know outside things to get sums right’.

Van Lieshout, Verdwaald en Van Herk (1997) vergeleken de antwoorden van leerlingen uit twee klassen van het gewoon basisonderwijs en drie klassen voor bijzonder onderwijs op een schriftelijke toets bestaande uit tien S-items en tien P-items, waarvan de ene helft afkomstig was uit de studie van Verschaffel e.a. (1994) (nl. P1, P4, P5, P6 en P9 uit Tabel 1) en de andere door de auteurs zelf geconstrueerd was. Voor het begin van de test kregen de leerlingen een mondelinge, klassikale instructie waarin twee voorbeeldopgaven (waaronder één P-item!) besproken werden; daarbij beklemtoonde de leerkracht dat bij sommige opgaven verschillende correcte antwoorden (zelfs antwoorden zoals ‘Dit is een onoplosbare opgave’) acceptabel waren. Hoewel de resultaten in deze studie wat hoger lagen dan in die van Verschaffel e.a. (1994) – wellicht omwille van de introductie – bleef het aantal NRs overweldigend: meer dan de helft van de P-items lokte minder dan 20% RRs uit; het school-item (P6 uit Tabel 1) en het vrienden-item (P1) bleken het moeilijkst. Merkwaardig ten slotte is dat de leerlingen van het buitengewoon onderwijs significant vaker de P-items met RRs beantwoordden (42%) dan de leerlingen uit het regulier onderwijs (29%).

Gelijkaardige resultaten werden ook nog verkregen in twee experimenten van Reusser en Stebler (1997b) bij Zwitserse leerlingen, waarvan hier enkel het tweede, meest omvangrijke en meest systematische besproken wordt. Reusser en Stebler (1997b) lieten de tien P-items uit Verschaffel e.a. (1994) oplossen door 439 leerlingen van het eerste jaar secundair onderwijs. De experimentele condities waaronder de opgaven werden opgelost, varieerden evenwel in de mate waarin de leerlingen gewaarschuwd werden voor het mogelijks problematisch karakter van de opgaven.

- In conditie 1 werd een identieke instructie gegeven als in het onderzoek van Verschaffel e.a. (1994).
- In conditie 1a werd aan vier P-items (nl. het looper-item, het school-item, het touw-item en het vaas-item) een zin toegevoegd bedoeld om de leerlingen alert te maken voor een eventuele moeilijkheid met deze opgaven (bijv. ‘Maak een tekening voor je de volgende opgave oplost’ bij het school-

item, of 'Bestudeer de figuur aandachtig' bij het vaas-item).

- In conditie 2 werd na elk item expliciet gevraagd om de kwaliteit van de betreffende opgave (duidelijkheid van het item, oplosbaarheid,...) te beoordelen.
- In conditie 3 werd, naast de vragen uit conditie 2, aan het begin van de toets ook de volgende algemene waarschuwing opgenomen: 'Wees alert. Sommige opgaven zijn niet zo gemakkelijk als ze er op het eerste gezicht uitzien. Er zijn er zelfs waarvoor het niet zeker is of ze wel oplosbaar zijn'.

Hoewel het totaal aantal RRs (44%) in deze studie meer dan dubbel zo hoog lag dan in de studie van Verschaffel e.a. (1994) en in hun eigen replicatieonderzoek (zie Tabel 2), bleven nog steeds meer dan 50% van de leerlingreacties ondubbelzinnig niet-realistisch. Een variantieanalyse toonde aan dat de percentages RRs van de testcondities 1, 2 en 3 niet significant van elkaar verschilden (respectievelijk 42,5, 38,6 en 41,1%). Er werd echter wel een significante toename van RRs geobserveerd in conditie 1a: bij de vier P-items waaraan in deze conditie een specifieke waarschuwendende zin was toegevoegd, lag het aantal RRs een stuk hoger. In tegenstelling tot een expliciete algemene waarschuwing over het dubbelzinnig of zelfs onoplosbaar karakter van de opgaven, leidden itemspecifieke waarschuwingen dus wel tot een matige stijging in het aantal RRs.

Tenslotte onderzocht Lasure (1995; zie De Corte, Verschaffel, Lasure, Borghart & Yoshida, in press; Verschaffel, 1996) de hardnekkigheid van de neiging van leerlingen uit de bovenbouw van de basisschool tot routinematig, niet-realistisch modelleren in een studie die uit twee delen bestond. In een eerste deel werden zeven itemparen uit Verschaffel e.a. (1994) (met de volgende P-items: het vrienden-item, het planken-item, het bus-item, het looper-item, het school-item, het touw-item en het vaas-item uit Tabel 1) schriftelijk aangeboden aan 64 leerlingen van het vijfde leerjaar. Zestien procent van alle reacties van de leerlingen op deze toets waren RRs, wat vrijwel gelijk is aan het resultaat uit de eerste studie (Verschaffel e.a., 1994; zie paragraaf 1) en geheel in de lijn ligt van de gemiddelde percentages RRs uit de in paragraaf 2 besproken replicatiestudies. Op

basis van de resultaten op deze toets werden de 15 meest 'realistische' en de 15 minst 'realistische' probleemoplossers geselecteerd om aan het tweede deel van het onderzoek deel te nemen. Daarin werden bij deze leerlingen individueel één of twee 'scaffolds' toegepast gericht op het realistisch modelleren van de P-items die zij oorspronkelijk op niet-realistische wijze aangepakt en beantwoord hadden. Bij de eerste 'scaffold' werden de leerlingen die op een bepaald P-item met een NR gereageerd hadden, geconfronteerd met de RR op datzelfde item gegeven door een fictieve klasgenoot (bijv. aan een leerling die oorspronkelijk geantwoord had met  $4 \times 2,5 = 10$  planken' op het planken-item zei de interviewer: 'Zoals je op dit blad kunt zien, antwoordde één van je klasgenoten met  $4 \times 2 = 8$  planken. Wat is het beste antwoord? Waarom?'). Indien de leerling bij zijn aanvankelijke NR bleef, werd vervolgens een tweede 'scaffold' gegeven, die bestond uit een expliciete 'hint' vanwege de interviewer om de probleemsituatie te verpersoonlijken, te concretiseren of te tekenen (bijv. 'Kan je de planken tekenen? Kan je ook tekenen wat er met deze planken in het vraagstuk gebeurt? Kan je op je tekening zien hoeveel planken van 1 m Steven kan zagen uit deze vier planken?'). Hoewel deze 'scaffolds' in een significant aantal gevallen de leerlingen hun NR voor een RR deed inruilen (het percentage RRs steeg van 23% tijdens de schriftelijke test tot 40% na de eerste vorm van hulp en tot 57% na de tweede 'scaffold'), bleef het totaal aantal RRs op het eind van de individuele interviews nog altijd verrassend laag. Immers, in bijna de helft van de gevallen (nl. 43%) bleven de leerlingen uiteindelijk vasthouden aan hun initieel onrealistisch antwoord, zelfs na de tweede sterke 'hint' in de richting van het realistisch antwoord. Hieruit kan geconcludeerd worden dat de neiging van leerlingen uit de bovenbouw van de basisschool tot niet-realistisch modelleren en oplossen van schoolvraagstukken zeer sterk en persistent is.

Globaal genomen laat deze eerste reeks van studies naar het effect van ingrepen in de experimentele setting zien dat expliciete, algemene waarschuwingen aan de leerlingen omtrent het dubbelzinnig of zelfs onoplosbaar karakter van de P-opgaven, geen betekenisvolle stijging in

het aantal RRs teweegbrengen. Daaruit blijkt de persistentie van de neiging van veel leerlingen om contextgebonden wiskundige toepassingsopgaven op een stereotiepe, niet-realistische manier te modelleren en op te lossen. Alleen heel nadrukkelijke, itemspecifieke aanvullingen of waarschuwingen resulteerden in een behoorlijke stijging van het aantal RRs, maar zelfs dan was deze stijging nog aan de lage kant.

#### 4 De relatieve effectiviteit van het verhogen van de authenticiteit van de experimentele setting

In deze paragraaf bespreken we onderzoek naar het effect van het wijzigen van een ander aspect van de experimentele setting waarmee gewerkt is in de aanvankelijke studies van Greer (1993) en Verschaffel e.a. (1994), nl. de authenticiteit van de probleemsituaties waarmee de leerlingen geconfronteerd worden.

DeFranco en Curcio (1997) gingen uit van de vaak geconstateerde moeilijkheid van leerlingen om de uitkomst van een niet-opgaande deling, zoals het bus-item uit Tabel 1, adequaat te interpreteren (zie o.a. Greer, 1993; Silver, Shapiro & Deutsch, 1993; Verschaffel e.a., 1994) (zie paragraaf 2). Zij onderzochten hoe leerlingen de rest van een deling interpretererden bij toepassingsopgaven die in twee verschillende experimentele condities waren ingebed, nl. (1) een restrictieve schoolse en (2) een realistische buitenschoolse setting. In deel 1 van deze studie werden 20 zesdeklassers geconfronteerd met een variant van het bus-item in een schoolse context; in een individueel interview kregen ze een aantal vraagstukken aangeboden evenals enkele vragen over wiskundig probleemoplossen op school. In deel 2 van het onderzoek werden dezelfde 20 leerlingen gevraagd om per telefoon minibussen te bestellen om de leerlingen van hun klas naar een schoolfeest te vervoeren. Terwijl het bus-item in de schoolse context slechts door twee van de 20 leerlingen juist beantwoord werd, bedroeg het aantal correcte antwoorden in de meer realistische setting 16. Hoewel dit onder-

zoek slechts slaat op één type van P-items uit de toets van Greer (1993) en Verschaffel e.a. (1994) en op een gering aantal subjecten, leveren de resultaten toch sterke steun voor de hypothese dat het inbedden van deze P-opgaven in een (meer) authentieke setting het aantal RRs betekenisvol doet toenemen.

Uitgaande van een socioculturele analyse van de specifieke kenmerken van de experimentele setting in de studies van Greer (1993) en Verschaffel e.a. (1994), meenden Wyndhamn en Säljö (1997) dat door leerlingen de opgaven te laten oplossen in het kader van betekenisvolle en communicatieve projecten met anderen, het aantal RRs sterk zou toenemen. Om deze hypothese te toetsen, zetten zij een empirische studie op rond het school-item uit de toets van Verschaffel e.a. (1994) en rond nog een tweede opgave omtrent afstanden:

- Anna en Berra gaan naar dezelfde school. Anna woont op 500 meter van de school en Berra woont op 300 meter van de school. Hoever wonen ze van elkaar? (= school-item)
- Wat is de afstand tussen Alstad en Broby volgens deze wegwijzers? (= wegwijzer-item).

Deze items werden evenwel niet als klassieke schoolvraagstukken aangeboden, maar werden geïntroduceerd in een gesprek tussen telkens drie leerlingen en een onderzoeker. Het gesprek waarin de eerste opgave ingebed zat, ging over de weg die de leerlingen aflegden van en naar de school; terwijl het probleem werd geformuleerd, werd een fictieve kaart van een school met haar omgeving getoond. De tweede taak maakte deel uit van een gesprek over wegwijzers: hoe ze eruit zien, waar je ze kan vinden, hoe ze geïnterpreteerd dienen te worden, enz... Bij deze opgave hoorde een figuur met twee wegwijzers waarvan de ene de afstand tot Broby (17 km) in de ene richting aangeeft en de andere de afstand tot Alstad (8 km) in de tegenovergestelde richting. De eerste taak werd aan acht homogene groepen van 10-11-jarigen voorgelegd; de tweede taak aan zes groepen van 12-jarigen. In de loop van het gesprek kwamen alle groepen – behalve één – tot de conclusie dat het onmogelijk is één antwoord te geven, maar dat 'it all depends'. Het enige groepje dat niet tot deze conclusie

kwam bestond uit drie sterke leerlingen die uiteindelijk beslisten om toch maar een getalmatig antwoord te geven op het school-item, hoewel ze zich tijdens het groepsgesprek gerealiseerd hadden dat er in feite meer dan één correct antwoord mogelijk was. Deze bevindingen contrasteren scherp met de resultaten van de oorspronkelijke studie van Verschaffel e.a. (1994) en de replicatieonderzoekingen (zie paragraaf 1 en 2), waarin voor het school-item weinig of geen RRs aangetroffen werden. De studie van Wyndhamn en Säljö (1997) toont dus aan dat het maken van realistische overwegingen en het gebruik daarvan bij het modelleren en oplossen van wiskundige toepassingsopgaven binnen het bereik ligt van de meeste leerlingen. Het volstaat de problemen in te bedenken in een andere, meer betekenisvolle en communicatieve context om hen tot meer realistisch en doordacht probleemoplossen te brengen.

Overigens hebben deze auteurs ook nog in andere studies en met andersoortige opgaven empirische evidentie verzameld die steun biedt aan deze conclusie (Säljö & Wyndhamn, 1993; Wyndhamn en Säljö, 1995). Zo voerden zij reeds in 1993 een experiment uit met 211 leerlingen van 15 à 16 jaar die individueel en schriftelijk het probleem 'Hoeveel kost het om een brief van 120 gram te verzenden naar een binnenlands adres?' moesten oplossen in een wiskundeles of in een les sociale wetenschappen. In beide settings kregen de leerlingen een tabel met de officiële posttarieven voor binnenlandse zendingen met een maximumgewicht van 20, 100, 250, 500 en 1000 gram. Zoals verwacht, werd deze opgave in de twee situaties verschillend opgelost. In de les sociale wetenschappen kwam de overgrote meerderheid (nl. 71%) van de oplossingen tot stand via het 'gewoon' aflezen van de uitkomst in de tabel; slechts een minderheid (29%) bepaalde het tarief via allerlei rekenkundige bewerkingen (bijvoorbeeld: door de tarieven voor een brief van 20 gram en een brief van 100 gram op te tellen, of via het vermenigvuldigen van het tarief voor een brief van 20 gram met 6). In de wiskundeles daarentegen interpreteerde niet minder dan 57% van de leerlingen deze taak als een 'wiskundeopgave' en voerde dus een rekenkundige bewerking uit om tot het ant-

woord te komen, in plaats van het juiste tarief 'gewoon' uit de tabel af te lezen.

Tenslotte zetten Reusser en Stebler (1997b) een onderzoek op waarin ze de oplossingen van 34 leerlingen uit het zesde leerjaar of uit het eerste jaar secundair onderwijs op P-items analyseerden in twee verschillende contexten, nl. (1) dezelfde schoolse context als in de studies van Greer (1993) en Verschaffel e.a. (1994) en hun eigen replicatie- en vervolgonderzoek (Reusser & Stebler, 1997a) dat in paragraaf 2 en 3 voorgesteld werd, en (2) een context waarin dezelfde P-items werden aangeboden onder de vorm van zgn. performantietaken ('performance tasks'). De hypothese van de auteurs was dat de aanbestedingswijze van de taak en de experimentele context waarin de leerlingen deze taak dienden op te lossen, de belangrijkste oorzaken vormden van de vele NRs uit de studies van Greer (1993), Verschaffel e.a. (1994) en hun eigen vroeger werk (Reusser & Stebler, 1997a). Op grond daarvan voorspelden zij dat leerlingen veel minder NRs zouden geven in deze performantietakencontext dan in de schoolse context. Om deze hypothese te toetsen, vormden Reusser en Stebler (1997b) vijf van de tien P-items uit de toets van Verschaffel e.a. (1994) om tot performantietaken: het planken-item, het looper-item, het school-item, het touwen-item en het vaas-item. Dit hield in dat deze opgaven in een meer authentieke context werden aangeboden door concreet materiaal te voorzien (zoals bijvoorbeeld planken, een zaag en een vouwmetre voor het planken-item); tevens werd een duidelijke op handelen gerichte instructie gegeven bestaande uit de volgende stappen: (1) bestudeer de opgave en het concreet materiaal zorgvuldig, (2) maak een voorspelling van het antwoord, (3) voer de taak effectief uit en geef intussen commentaar bij wat je aan het doen bent, (4) beslis of je al dan niet bij je oorspronkelijke voorspelling blijft, (5) schrijf je uiteindelijk antwoord neer. De eerste dag loste elke leerling de vijf P-items op in de schriftelijke, schoolse context, en de volgende dag in de performantiesetting. Zoals verwacht, vonden Reusser en Stebler (1997b) een significante stijging in het percentage RRs van de schoolse conditie naar de performantietakenconditie: voor het planken-item, het looper-item, het touwen-item, en het vaas-item steeg het percentage RRs respectievelijk van 25 naar 56%,



van 12 naar 47%, van 18 naar 62% en van 7 naar 40%; alleen bij het school-item was de stijging niet significant (van 21% naar 36%). De analyse van de probleemoplossingsprocessen van de leerlingen bracht aan het licht dat zowel de aanwezigheid van concreet materiaal als de effectieve manipulatie ervan tijdens het opvolgen van de performantie-instructies had bijgedragen tot de vastgestelde stijging in het aantal RRs. Vermeldenswaard is ook dat enkele leerlingen die tijdens de praktische uitvoeringsfase realistisch geantwoord hadden, toch nog op een niet-realistisch antwoord terugvielen wanneer ze hun uiteindelijke oplossing op het antwoordblad moesten neerschrijven. Hoe dan ook, de betere prestaties van de leerlingen in de performantiesetting vormden een overtuigende bevestiging van de hypothese.

Samenvattend kunnen we stellen dat de onderzoeken die in deze paragraaf besproken werden, aantonen dat het verhogen van de authenticiteit van de context waarbinnen de P-items worden aangeboden (door ze in te bedden in een groepsdiscussie over een maatschappelijk relevant onderwerp of door concreet materiaal en een bijhorende performantie-opdracht te voorzien) een veel hogere stijging van het aantal RRs tot gevolg heeft dan de ingrepen in de experimentele setting die in paragraaf 3 besproken werden.

## 5 De rol van instructievariabelen op het niet-realistisch modelleren van wiskundige toepassingsopgaven

De resultaten van de besproken studies – en met name van de onderzoeken besproken in paragraaf 4 – suggereren dat de neiging van leerlingen om schoolvraagstukken op een niet-realistische manier aan te pakken niet voortvloeit uit een of ander 'cognitief deficit' bij deze leerlingen, maar veeleer het gevolg zijn van het feit dat zij zich in hun oplossingsgedrag – bewust maar vaak ook onbewust – laten leiden door een 'didactisch contract' (Brousseau, 1990). In de context van het wiskundeonder-

wijs verwijst deze term naar een samenhangend stel sociale en socio-mathematische normen (Cobb, Yackel & Wood, 1992; Gravemeijer, 1994, 1997) die in de klas heersen en de interacties tussen de leerkracht en de leerling(en) reguleren (veelal zonder dat de betrokkenen zich daarvan bewust zijn). Dit 'didactisch contract' schrijft dus voor hoe de leerlingen zich moeten gedragen, hoe ze moeten denken en praten tijdens deze lessen, hoe ze op een taak, een vraag, of een tussenkomst van de leerkrachten dienen te reageren... Voor het curriculumonderdeel vraagstukken houdt dit 'didactisch contract' o.a. de volgende (impliciete) afspraken en spelregels in: (a) een vraagstuk dient met een exact getalsmatig antwoord beantwoord te worden; (b) een vraagstuk kan op één en slechts één manier correct opgelost worden; (c) de correcte oplossing is te vinden door één of meer formeel-rekenkundige bewerkingen uit te voeren op de getallen die expliciet in de tekst gegeven staan; (d) het is niet toegelaten om de gegevens of het gevraagde ter discussie te stellen, noch om bij het oplossen van de opgave rekening te houden met contextueel relevante informatie die niet uitdrukkelijk in de probleemformulering 'gegeven' is... (De Corte & Verschaffel, 1985; Gerofsky, 1996; Gravemeijer, 1994, 1997; Greer, 1997; Lave, 1992; Reusser, 1988; Schoenfeld, 1991; Treffers & De Moor, 1990; Wyndhamn & Säljö, 1997). De gerapporteerde onderzoeksresultaten suggereren dat dergelijke afspraken en spelregels het oplossingsgedrag van de leerlingen in de context van het wiskundeonderwijs in sterke mate bepalen. Door de P-items in een andere socioculturele context te plaatsen waarin deze afspraken en regels niet langer gelden – bijvoorbeeld door de items om te vormen tot uitdagende doetaken of door ze in te bedden in een betekenisvolle communicatieve context – kan men de meeste leerlingen er evenwel toe brengen om contextgebonden wiskunde problemen op een meer realistische manier te modelleren en op te lossen.

Dit brengt ons bij de vraag welke aspecten van het (vraagstukken)onderwijs er voor zorgen dat de leerlingen zich in hun aanpak- en oplossingsgedrag door deze afspraken en spelregels laten leiden. We mogen er immers van uitgaan dat ze – evenals andere onderdelen van het

'didactisch contract' (Brousseau, 1990) of als andere socio-mathematische normen (Cobb e.a., 1992; Gravemeijer, 1994; Yackel & Cobb, 1996) – niet *expliciet* op school worden onderwezen noch *bewust* in stand worden gehouden, maar eerder tot ontwikkeling komen en versterkt worden via allerlei impliciete, niet-bedoelde aspecten van de dagelijkse praktijk van het wiskundeonderwijs. Volgens diverse auteurs is het ontstaan en de ontwikkeling ervan toe te schrijven aan de volgende twee kenmerken van het huidige wiskundeonderwijs: (a) het levensvreemd en stereotiep karakter van de overgrote meerderheid van de vraagstukken waarmee leerlingen (onder meer via de rekenmethoden en tests) worden geconfronteerd, en (b) de manier waarop tijdens de vraagstuklessen met deze opgaven wordt omgesprongen, en vooral de geringe aandacht die leerkrachten besteden aan de kritische verkenning van de complexe, en vaak enigszins problematische, relatie tussen de probleemsituatie waarnaar de opgavetekst verwijst enerzijds en het voorgestelde wiskundig model daarvan anderzijds (Davis, 1989; De Corte & Verschaffel, 1985; Gerofsky, 1996; Gravemeijer, 1994, 1997; Greer, 1993, 1997; Lave, 1992; Reusser, 1988; Schoenfeld, 1991; Treffers & De Moor, 1990; Verschaffel e.a., 1994; Verschaffel, in press). Door deze aspecten van de klassieke vraagstukdidactiek zou bij leerlingen langzaam maar zeker de dispositie groeien om de concrete situatie waarin een wiskundig toepassingsprobleem ingebed zit, niet al te ernstig te nemen en om de eigen ervaringskennis daaromtrent buitenspel te zetten. In de onderzoeksliteratuur is er evenwel weinig of geen overtuigende rechtstreekse empirische evidentie voorhanden voor het bestaan van zo'n didactisch contract over het uitsluiten van realistische overwegingen in het vigerend (vraagstukken)onderwijs, noch voor de band tussen de aard en de sterkte van deze socio-mathematische norm enerzijds en de neiging tot niet-realistisch modelleren bij de leerlingen anderzijds.

Een uitzondering hierop vormt een beperkte deelstudie die Reusser en Stebler (1997a) koppelde aan hun onderzoek dat in paragraaf 3 besproken werd. Op het einde van de toetsboekjes met S- en P-items voegden deze onder-

zoekers ook nog een beperkte vragenlijst toe, waarin de leerlingen gevraagd werd om aan te duiden hoe vaak ze in de loop van de voorbije jaren in de wiskundelessen geconfronteerd waren met (a) onoplosbare vraagstukken, (b) open vraagstukken, (c) vraagstukken met meerdere correcte oplossingen en (d) vraagstukken waarin er niet gevraagd wordt naar een precies maar naar een benaderend antwoord. Reusser en Stebler (1997a) vonden geen significant effect van de vertrouwdheid van de leerlingen met opgaven van type (c) en (d) op de proportie RRs op de P-items uit de test, maar voor de eerste twee categorieën van problematische opgaven werd er wel een sterke, positieve samenhang geconstateerd tussen de gerapporteerde frequentie waarmee men tijdens de wiskundelessen met dergelijke opgaven geconfronteerd was en de mate waarin men de P-items op een realistische wijze wist te modelleren en op te lossen.

Indirecte aanwijzingen zijn er ook te vinden in een ouder onderzoek van Radatz (1983), waarin gevonden werd dat het aantal leerlingen dat absurde vraagstukken zoals het bekende 'captain's problem' ('Op een schip zijn er 26 schapen en 10 geiten. Hoe oud is de kapitein?') beantwoordde met de uitkomst van een bewerking op de twee gegeven getallen (bijv. '26 + 10 = 36 jaar'), toenam met het aantal jaren genoten rekenonderwijs.

Een derde studie die enig licht werpt op de rol van instructievariabelen bij het tot stand komen van de neiging tot niet-realistisch modelleren bij leerlingen, is het onderzoek van Verschaffel, De Corte en Borghart (1997) waarin de opvattingen en houdingen (tegen)over realistisch wiskundig modeleren zijn nagegaan bij aspirant-leerkrachten. Een test bestaande uit 14 vraagstukken – waarvan de helft S-items en de helft P-items afkomstig uit de studie van Verschaffel e.a. (1994) – werd tweemaal aangeboden aan 228 eerstejaarsstudenten en 104 derdejaarsstudenten uit drie Vlaamse opleidingsinstituten voor toekomstige leerkrachten basisonderwijs. Tijdens een eerste sessie werden de aspirant-leerkrachten gevraagd om de opgaven zelf op te lossen (= test 1); in een tweede sessie dienden ze vier verschillende antwoorden van (denkbeeldige) leerlingen op

De afstand tussen twee palen bedraagt 12 meter. Hoeveel stukken touw van 1,5 meter lang moet je aan elkaar knopen om de beide palen te verbinden?\*

$12 : 1,5 = 6$ Je hebt 6 stukken van 1,5 m nodig.	A
$12 : 1,5 = 8$ Je hebt 8 stukken van 1,5 m nodig.	B
$12 \times 1,5 = 18$ Je hebt 18 stukken van 1,5 m nodig.	C
dat kan je niet precies weten.	
	D

\* De gegeven score (1, 1/2 of 0) diende telkens in het bijpassend hokje rechtsonder elke oplossing te worden genoteerd (A, B, C en D). In deze opgave geldt oplossing B als het niet-realistisch antwoord en oplossing D als het (meest) realistische.

Figuur 1. Voorbeeld van een opgave uit test 1 van Verschaffel e.a. (1997)

dezelfde opgaven (namelijk een realistisch antwoord, een niet-realistisch antwoord, een rekentechnische fout en een verkeerde operatiefout) te evalueren (= test 2). Gevraagd werd om elk van deze vier antwoordalternatieven met 1 punt te scoren indien ze het antwoord correct achtten, met 0 punten indien ze het antwoord helemaal fout achtten en met 1/2 punt indien ze het antwoord deels correct en deels fout inschatten. Een voorbeeld van een van de items uit test 2 wordt gegeven in Figuur 1.

De resultaten wezen op een sterke neiging bij aspirant-leerkrachten – zelfs bij de derdejaarsstudenten – tot het negeren van hun realiteitsgebonden kennis. Dit bleek in de eerste plaats uit hun eigen spontane oplossingen van de P-items (in test 1), waaronder slechts 48% RRs werden aangetroffen, maar ook uit hun beoordelingen van de antwoorden van (denkbeeldige) leerlingen (test 2). Immers, de NRs werden door de aspirant-leerkrachten over het algemeen beduidend beter gescoord dan de RRs. Het gemiddelde percentage 1- 1/2- en 0-scores dat op de zeven P-items aan het realistische antwoordalternatief werd gegeven, bedroeg respectievelijk 47%, 6% en 47%; voor het niet-realistische alternatief bedroeg het percentage 1-, 1/2- en 0-scores respectievelijk 56%, 26% en 18. Niet-realistische antwoorden kregen dus

in het algemeen een hogere score van de aspirant-leerkrachten dan realistische! Weliswaar werd er een significant verschil in het totaal aantal RRs op test 1 vastgesteld tussen de eerstejaars- (45% RRs) en de derdejaarsstudenten (54% RRs) in het voordeel van de laatste groep, maar – zoals de cijfers laten zien – bleef het percentage RRs in deze laatste groep aan de lage kant. Ook in test 2 gaven de derdejaarsstudenten iets vaker een hoge score voor de RR en een lage score voor de NR dan de eerstejaarsstudenten. Tenslotte vermelden we nog dat in de schriftelijke verantwoordingen die de aspirant-leerkrachten voor hun lage scores op de realistische antwoorden uit test 2 gaven, geregeld een negatieve appreciatie voor het activeren van ervaringskennis over de opgavencontext doorklonk. We erkennen dat deze gegevens nog niet overtuigend aantonen dat de vastgestelde vakgebonden opvattingen en houdingen bij (aspirant-)leerkrachten rechtstreeks verantwoordelijk zijn voor de neiging van leerlingen om hun ervaringskennis uit te sluiten tijdens het modelleren en oplossen van schoolvraagstukken. Maar wanneer we rekening houden met de resultaten van recent onderzoek over de invloed van vakkennis en vakgebonden 'beliefs' en houdingen van leerkrachten op het denken en leren van leerlingen (zie o.m. De Corte, Greer & Verschaffel, 1996), is het erg

aannemelijk dat deze cognities, overtuigingen en attitudes van leerkrachten omtrent het belang van realiteitsgebonden kennis bij het interpreteren en oplossen van contextproblemen, een beslissende invloed uitoefenen op het modellerings- en oplossingsgedrag van hun leerlingen. Verder onderzoek hieromtrent is evenwel vereist.

## 6 Effect van aangepaste instructie op (leren) realistisch modelleren en interpreteren

In een exploratief onderwijsexperiment gingen Verschaffel en De Corte (1996) na of het mogelijk is om in een klascontext betekenisvolle positieve leereffecten te bereiken op het vlak van het realistisch modelleren en interpreteren van wiskundige toepassingsproblemen. Daartoe werd een alternatieve onderwijsleeromgeving aangeboden waarin vraagstukken uitdrukkelijk opgevat worden als oefeningen in realistisch modelleren en interpreteren. De leergang werd gerealiseerd in een vijfde leerjaar van een Vlaamse basisschool en bestond uit vijf leereenheden van ongeveer 2,5 uur die stuk voor stuk inzoomden op één type van toepassingsituaties waarbij er vanuit realistisch oogpunt een moeilijkheid rijst bij het oplossen van de probleemsituatie via de voor-de-handliggende rekenkundige bewerking(en). Bijvoorbeeld: vraagstukken over verdeel- of uitdeelsituaties waarbij de uitkomst van de deling nog geïnterpreteerd dient te worden in functie van de context, vraagstukken waarbij de context een oplossing gebaseerd op een lineair-proportioneel model uitsluit, ... De didactische uitwerking van deze leereenheden was gesteund op de volgende drie pijlers: (1) werken met een set van uitdagende, realistische problemen; (2) gebruik maken van sterk interactieve instructiemethoden zoals groepswork en klassikale discussies afgewisseld met individuele opdrachten; (3) creëren van een nieuwe klascultuur o.a. door met de leerlingen te onderhandelen over nieuwe normen en afspraken omtrent wat er verstaan wordt onder een goed vraagstuk, een goed antwoord, een goede oplossingsweg, enz. Terwijl de leerlingen van de experimentele klas dit programma door-

werkten, volgden twee controleklassen gewoon wiskundeonderwijs.

Van alle leerlingen uit de experimentele klas en de twee controleklassen werd een schriftelijke voortoets en een parallelle natoets afgenomen bestaande uit een tiental P-items waarvan de ene helft niet al te veel afweek van de opgaven waarmee in de leergang was gewerkt (= leeritems) terwijl de andere helft daar sterker van afweek (= nabije-transferitems). In een van de twee controleklassen werd de natoets voorafgegaan door een inleiding waarin de leerlingen aan de hand van twee voorbeelden van P-items expliciet getoond werd dat routinematige antwoorden soms inadequaat zijn vanuit realistisch oogpunt (zoals het geval was in sommige studies die in paragraaf 3 besproken werden). In de experimentele klas werd achteraf ook nog een retentietoets afgenomen, bestaande uit een aantal parallelitems van de opgaven uit de voor- en natoets, maar daarnaast ook uit een aantal items die nog sterker afweken van de opgaven uit de leergang (verre-transferitems).

Uit de analyse van de resultaten bleek een significant positief effect van het experimenteel programma op de neiging van de leerlingen tot realistisch modelleren: terwijl in de beide controleklassen slechts sprake was van een minimale, niet-significante stijging van het aantal RRs van voor- naar natoets, steeg dit percentage in de experimentele klas van 7 naar 51%. Hoewel de stijging groter was voor de leeritems dan voor de nabije-transferitems, was het effect in beide gevallen significant. Tenslotte suggereerden de resultaten op de retentietoets, die ook naar verre transfer van het geleerde peilde, dat het positief effect van het experimenteel programma specifiek noch tijdelijk was. Hoewel er een aantal methodologische tekorten aan deze studie kleven (bijv. het ontbreken van een retentietoets in de controleklassen) en het aantal RRs op de natoets en de retentietoets niet bij alle leerlingen in dezelfde mate toenam (de grootste leerwinst werd geboekt door de sterke leerlingen), suggereren de resultaten globaal genomen toch dat het mogelijk is om de neiging van basisschoolleerlingen tot niet-realistisch modeleren en interpreteren van rekenvraagstukken via aangepaste instructie op een betekenisvolle en blijvende wijze te doorbreken.

## 7 Samenvatting en discussie

In dit artikel hebben we een overzicht gegeven van een reeks nauw verwante recente studies op het gebied van het modelleren en oplossen van problematische wiskundige toepassingsproblemen bij 10-14-jarige leerlingen. Aanleiding voor de besproken onderzoeken vormden de studies van Greer (1993) en van Verschaffel e.a. (1994), waaruit bleek dat de overgrote meerderheid van de leerlingen een sterke neiging vertonen om wiskundige toepassingsopgaven die problematisch zijn vanuit realistisch oogpunt (zgn. P-items) op een stereotiepe, niet-realistische manier te modelleren en op te lossen. Meer concreet komt hun aanpak hierop neer dat zij 'gewoon' een of meerdere standaardbewerkingen uitvoeren met de getallen uit de opgave, zonder rekening te houden met hun ervaringskennis omtrent de reële, concrete situatie waarop het vraagstuk betrekking heeft. In een eerste reeks vervolgstudies, die in paragraaf 2 aan bod kwamen, werden de bevindingen van Greer (1993) en Verschaffel e.a. (1994) gerepliceerd bij verschillende andere leerlingpopulaties.

Om beter zicht te krijgen op de denkprocessen die ten grondslag liggen aan deze neiging van leerlingen tot het negeren van realiteitsgebonden kennis bij het oplossen van dit soort P-items, werden de laatste jaren verscheidene nieuwe onderzoeken opgezet, die we in paragraaf 3 en 4 besproken hebben. Een eerste reeks studies liet zien dat ingrepen in de experimentele setting in de vorm van verbale tussenkomsten die leerlingen er in algemene termen toe aan zetten om alert te zijn, om rekening te houden met aspecten van de realiteit, en/of om ook alternatieve antwoorden te overwegen, niet of nauwelijks leidden tot een daling van het aantal niet-realistische reacties. Enkel wanneer dergelijke algemene waarschuwingen aangevuld werden met of vervangen werden door meer itemspecifieke 'scaffolds', viel er een significante, maar nog steeds bedroevend matige, toename van het aantal realistische reacties te constateren. In een tweede reeks vervolgonderzoeken werden een of meerdere types van P-items aangeboden in een meer authentieke setting. Dit bleek een veel effectievere interventie te zijn want zij leidde

wél tot een betekenisvolle toename van het aantal realistische reacties.

Overigens troffen we in sommige studies ook uittreksels van interviews of van klasgesprekken aan waaruit exemplarisch bleek dat sommige leerlingen zich wel bewust zijn van het feit dat zij zich anders gedragen wanneer zij in de klascontext een rekenvraagstuk aangeboden krijgen dan wanneer ze in de buitenschoolse realiteit met een kwantitatief probleem worden geconfronteerd.

Volgens verscheidene auteurs dient de oorzaak van het ontstaan van deze neiging tot oppervlakkig, niet-realistisch modelleren bij leerlingen te worden toegeschreven aan de praktijk en de cultuur van het traditionele vraagstukkenonderwijs. Zoals uit paragraaf 5 gebleken is, is de empirische basis voor deze verklaring alsnog eerder gering. In zekere zin bieden de bemoedigende resultaten van het exploratief onderwijsexperiment van Verschaffel en De Corte (1996), dat in paragraaf 6 kort besproken werd, onrechtstreeks steun aan de stelling dat de oorzaak van de neiging van leerlingen om vraagstukken op een oppervlakkige, niet-realistische manier aan te pakken, te zoeken is in de vigerende vraagstukkendidactiek. Immers, dit onderwijsexperiment laat zien dat het mogelijk is om deze neiging te doorbreken door een alternatieve leeromgeving te creëren waarin vraagstukken opgevat worden als heuse oefeningen in realistisch modelleren en interpreteren, eerder dan als oefenstof voor het indrillen van stereotiepe oplossingsprocedures.

Tot slot van deze bijdrage plaatsen we nog enkele theoretische en methodologische kanttekeningen bij het onderzoek waarover in dit artikel gerapporteerd werd en staan we stil bij de implicaties ervan voor de praktijk van het vraagstukkenonderwijs op de basisschool.

Ten eerste, de oorzaak van de sterke neiging van leerlingen tot niet-realistisch antwoorden op de problematische items – maar ook van de grote verschillen in het effect van bepaalde ingrepen in de testsituatie of in het onderwijs – hebben we gezocht in het zgn. 'didactisch contract' (Brousseau, 1990) of, anders gezegd, in de heersende socio-mathematische normen

(Cobb e.a., 1992; Gravemeijer, 1994, 1997; Yackel & Cobb, 1996) in verband met 'het spel der schoolvraagstukken' (De Corte & Verschaffel, 1985), die het denken en handelen van leerlingen bepalen. Op een meer algemeen niveau wijzen de gerapporteerde onderzoeksresultaten op de sterke gesitueerdheid of contextafhankelijkheid van de menselijke cognitie, – de kerngedachte van de 'situated cognition'-benadering (Lave, 1992; Rogoff, 1984; Säljö & Wyndhamn, 1988). In tegenstelling tot de traditionele cognitieve psychologie, waarin de menselijke cognitie gezien werd als 'abstract, transcendental, culture-free, unemotional, universal, decontextualized, disembodied, and hence formal' (Lakoff & Nunez, 1997), wordt in het 'situated cognition'-paradigma precies gewezen op het feit dat denk- en leerprocessen zich voltrekken in nauwe interactie met de sociale en culturele context en via participatie aan situatie- en cultuurgebonden activiteiten. Of, zoals Rogoff (1984, p. 2) het uitdrukt: 'From this alternative epistemological stance, thinking is always intricately interwoven with the context of the problem to be solved, thus making context an integral aspect of cognitive events, not a nuisance variable'. De besproken onderzoeksresultaten laten inderdaad zien hoe (subtiele) aspecten van de context waarin leerlingen wiskundige problemen leren oplossen en/of van de setting waarin ze gevraagd worden om het geleerde te demonstreren, een doorslaggevende rol kunnen spelen in de wijze waarop deze opgaven worden opgevat, aangepakt en beantwoord. Tevens suggereren deze bevindingen dat de wiskundige kenniselementen en vaardigheden die leerlingen op school opdoen, net zoals de wiskunde die buitenschools verworven wordt, *gesitueerde* kennis is, of – zoals Lave (1992, p. 81) het uitdrukt – dat '(...) school math is situated practice. School is a site of specialized everyday activity – not a privileged site where universal knowledge is transmitted'. Bijkomend onderzoek is echter vereist om beter zicht te krijgen op de manier waarop diverse aspecten van de klascultuur rechtstreeks of onrechtstreeks bijdragen tot het ontstaan en de handhaving van de socio-mathematische normen in verband met het (leren) oplossen van schoolvraagstukken en met de rol die ervaringskennis en realistische overwegingen daarin spelen.

Ten tweede, hoewel we daar in dit literatuuroverzicht slechts sporadisch op ingegaan zijn, is het goed eraan te herinneren dat de gevonden proporties realistische reacties (RRs) sterk verschillen naargelang van het soort van P-item. Een rationele taakanalyse laat zien dat de P-items waarmee in deze studies gewerkt is, onmogelijk over een zelfde kam te scheren zijn. Allereerst zijn ze gekoppeld aan totaal verschillende wiskundige inhouden; zo komen bij de interpretatie van de uitkomst van een niet-opgaande deling (zie bijv. het bus- en het ballonprobleem) andere wiskundige begrippen en vaardigheden aan bod dan bij het nadenken over de aanwezigheid van een lineair-proportioneel verband (zoals in het loper- en het vaasprobleem). Verder verschilt ook de ervaringskennis waarop beroep wordt gedaan sterk van opgave tot opgave; zo lijkt het aannemelijk dat kinderen sneller uit ervaring weten dat er geen halve bussen bestaan (in het bus-item) dan dat ze beseffen dat het peil van een vloeistof sneller stijgt naarmate het vat smaller wordt (in het vaasprobleem). Een derde belangrijk verschilpunt betreft de aard van de verwachte realistische reactie: bij sommige P-opgaven, zoals het bus- en het planken-item, is dit een precies getal (respectievelijk de getallen 13 en 8); bij andere P-items daarentegen is het (meest) realistische antwoord geen exact getal, maar een benaderend antwoord (bijv. het loper-item), een aanduiding van een interval waarbinnen de uitkomst kan liggen (bijv. het school-item), of een opmerking vanwege de leerling dat de opgave op basis van de beschikbare gegevens niet op te lossen is (bijv. het vrienden-item). Het is evident dat het geven van een realistisch antwoord op deze laatste categorie van opgaven (nog) heel wat verder af staat van het soort antwoorden dat leerlingen gewoon zijn te geven in een traditionele vraagstukkenles dan bij het bus-item bijvoorbeeld. Anders gezegd, om bij de laatste categorie van P-items tot een realistische reactie te komen, dienen leerlingen meer elementen uit het 'didactisch contract' inzake schoolvraagstukken te overtreden dan bij het busprobleem (Hatano, 1997; Van Lieshout e.a., 1997; Verschaffel e.a., 1994; Wyndhamn & Säljö, 1997). Het is derhalve aangewezen om in voortgezet onderzoek te werken aan een theoretisch en empirisch gefundeerde typologie van P-items.

Ten derde is het gebruik van de termen 'standaardopgave' versus 'problematische opgave' (respectievelijk afgekort als S- en P-item) en 'realistische reactie' versus 'niet-realistische reactie' (respectievelijk afgekort als RR en NR) minder eenduidig dan we in het voorafgaande hebben laten uitschijnen. Immers, bij om het even welk wiskundig toepassingsprobleem worden er allerlei veronderstellingen gemaakt die, wanneer men daar zou van afzien, het opgebouwde wiskundig model op de helling zetten. Bij de zgn. standaardvariant van het planken-item (nl. 'Karel heeft 6 planken van 2 m gekocht. Hoeveel planken van 1 m kan hij hieruit zagen?') bijvoorbeeld kan met argumenten dat wie deze opgave met  $6 \times 2 = 12$  planken beantwoordt in feite ook een realistisch aspect over het hoofd ziet, namelijk het feit dat er door het zagen normaliter enkele millimeters hout verloren zullen gaan en dat de resulterende planken dus in feite iets korter dan een meter zullen uitvallen (Gravemeijer, 1997; Greer, 1997). Ook het door ons als realistisch getypeerde antwoord op het bus-item, nl. 13 bussen, is misschien minder realistisch dan op het eerste gezicht lijkt. Zo merkt Hatano (1997) op dat het in de realiteit heel goed mogelijk is dat wanneer 450 kinderen per bus vervoerd moeten worden, er uiteindelijk geen 13 maar toch slechts 12 bussen zullen worden ingezet. Misschien zullen er in elke bus enkele kinderen meer geplaatst worden, of misschien schakelt men naast de bussen ook nog enkele auto's in, enz. Ook Greer (1997) erkent het probleem van de 'fuziness of reality' en merkt in dit verband op dat de kinderen uit de gerapporteerde onderzoeken zeker niet de enigen zijn die tijdens hun wiskundige probleemoplossende activiteit bepaalde aspecten van de realiteit negeren; ook wiskundigen en andere wetenschappers doen dit voortdurend. Maar het belangrijk verschil tussen leerlingen uit die onderzoeken en de wiskunde-experts is, aldus Greer (1997, p. 304), dat 'mathematicians do it *knowingly* (and with regard to the context and goals, the likely levels of inaccuracy, and the technical knowledge and power available)'. Hij vindt het dan ook niet zinvol om oeverloze discussies op te zetten omtrent wat er in een concreet geval wel en niet als een RR en een NR moet worden beschouwd. Veel belangrijker is volgens hem 'the realisation that acts of modeling are taking

place, that different models are possible, and that these are open to debate' (p. 304).

Dit brengt ons tenslotte bij de vraag naar de onderwijspraktische implicaties van het besproken onderzoek. Het is duidelijk dat het geheel van deze studies een pleidooi inhoudt voor een wiskundendidactiek die sterk doordrongen is van het zgn. modelleringperspectief (Greer, 1997). Dit houdt eerst en vooral in dat de leerlingen geconfronteerd worden met een gevarieerder en authentieker opgavenaanbod, waardoor ze 'aan den lijve' ondervinden dat het oplossen van wiskundige toepassingsproblemen meer inhoudt dan het uitvoeren van een of enkele standaardoperaties op de gegeven getallen. Een tweede aspect van dit modelleringperspectief is dat de onderwijsleeractiviteiten die rond deze opgaven plaatsvinden erop gericht zijn leerlingen te laten nadenken en discussiëren over de voor- en nadelen van verschillende modellen, over de spanning tussen de eenvoud en de accuraatheid van een wiskundig model, en over de factoren die ertoe kunnen leiden dat de uitkomst van een wiskundig model niet (helemaal) strookt met de werkelijkheid. Ten derde houdt dit modelleringperspectief in dat de confrontatie van de leerlingen met dit rijke en levensnabije opgavenaanbod en met de bijhorende onderwijsleeractiviteiten reeds vroeg en geïntegreerd in het curriculum aan bod moet komen. Betekent dit alles nu dat er voor de eenvoudige, klassieke rekenvraagstukken helemaal geen plaats meer is weggelegd in het wiskundeonderwijs op de basisschool en dat leerlingen voortdurend gestimuleerd moeten worden om op zoek te gaan naar aspecten van de probleemsituatie die de toepasbaarheid van een onderliggend wiskundig model kunnen hypothekeren? Samen met de meeste auteurs die het modelleringperspectief onderschrijven (Gravemeijer, 1994, 1997; Greer, 1997; Hatano, 1997), menen we van niet. In het wiskundeonderwijs op de basisschool zullen er steeds momenten blijven bestaan waarin men leerlingen aan de hand van eenvoudige probleemsituaties bovenal inzicht wil laten verwerven in een bepaalde wiskundige bewerking of formule en/of enige vaardigheid wil laten ontwikkelen in het gebruik ervan. Wanneer contextopgaven vooral deze functie(s) vervullen, heeft het allicht weinig zin

om de aandacht van de leerlingen toe te spitsen op allerlei aspecten die de modelfunctie van de aangereikte situatie of de toepasbaarheid van de wiskundige bewerking of formule in het gedrang (kunnen) brengen. Immers, dat zou de zaak alleen maar compliceren, nodeloos instructietijd opsorpen, en de aandacht van de leerlingen afhouden van het eigenlijke lesdoel (zie ook Gravemeijer, 1997; Greer, 1997). Maar als we het erover eens zijn dat er een (beperkte) plaats voorbehouden moet blijven voor klassieke vraagstukken, is wel de belangrijke vraag aan de orde of, en zo ja hoe én wanneer, men leerlingen bewust moet maken van de verschillende functies die contextgebonden toepassingsopgaven in het wiskundeonderwijs kunnen vervullen en van de socio-mathematische normen die gelden bij die verschillende gebruikswijzen.

## Literatuur

- Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: Le milieu. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, 9(3), 308-336.
- Burkhardt, H. (1994). Mathematical applications in school curriculum. In T. Husén & T.N. Postlethwaite (Eds.), *The international encyclopedia of education* (2nd ed.) (pp. 3621-3624). Oxford, England: Pergamon Press.
- Caldwell, L. (1995). *Contextual considerations in the solution of children's multiplication and division word problems*. (Master's thesis). Belfast, Northern-Ireland: University of Belfast.
- Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, 2-33.
- Davis, R.B. (1989). The culture of mathematics and the culture of schools. *Journal of Mathematical Behavior*, 8, 143-160.
- De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. (1996). Learning and teaching mathematics. In D. Berliner & R. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 491-549). New York: Macmillan.
- De Corte, E., & Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 4, 3-21.
- De Corte, E., Verschaffel, L., Lasure, S., Borghart, I. & Yoshida, H. (in press). Real-world knowledge and mathematical problem-solving in upper primary school children. In J. Bliss, R. Säljö, & P. Light (Eds.), *Learning sites: Social and technological contexts for learning*. Oxford: Elsevier Science Ltd.
- DeFranco, T.C., & Curcio, F.R. (1997). A division problem with a remainder embedded across two contexts. Children's solutions in restrictive versus real-world settings. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 19(2), 58-72.
- Gerofsky, S. (1996). A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 16(2), 36-45.
- Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute, University of Utrecht.
- Gravemeijer, K. (1997). Solving word problems: A case of modelling? *Learning and Instruction*, 7, 389-397.
- Greer, B. (1993). The modeling perspective on word problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, 239-250.
- Greer, B. (1997). Modelling reality in the mathematics classroom: The case of word problems. *Learning and Instruction*, 7, 293-307.
- Hatano, G. (1997). Commentary: Cost and benefit of modeling activity. *Learning and Instruction*, 7, 383-387.
- Hidalgo, M.C. (1997). *L'activation des connaissances à propos du monde réel dans la résolution de problèmes verbaux en arithmétique*. (Niet-gepubliceerd proefschrift). Quebec, Canada: Université Laval.
- Lakoff, G., & Nunez, R. (1997). Cognitive foundations for a mind-based mathematics. In L. English (Ed.), *Mathematical reasoning. Analogies, metaphors, and images* (pp. 21-92). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Lasure, S. (1995). *Realistisch modelleren en interpreteren van schoolvraagstukken. Twee constaterende studies bij 10-11-jarige basisschoolleerlingen*. (Niet-gepubliceerde licentiaatsverhandeling). Leuven: Afdeling Didactiek, K.U. Leuven.
- Lave, J. (1992). Word problems: A microcosm of theories of learning. P. Light & G. Butterworth (Eds.), *Context and cognition: Ways of learning and knowing* (pp. 74-92). New York: Harvester Wheatsheaf.
- Nesher, P. (1980). The stereotypical nature of school word problems. *For the Learning of Mathematics*, 1, 41-48.



- Radatz, H. (1983) Untersuchungen zum Lösen eingekleideter Aufgaben. *Journal für Mathematikdidaktik*, 3, 205-217.
- Reusser, K. (1988). Problem solving beyond the logic of things: Contextual effects on understanding and solving word problems. *Instructional Science*, 17, 309-338.
- Reusser, K., & Stebler, R. (1997a). Every word problem has a solution – the social rationality of mathematical modeling in schools. *Learning and Instruction*, 7, 309-327
- Reusser, K., & Stebler, R. (1997b, August). *Realistic mathematical modeling through the solving of performance tasks*. Paper presented at the 7th European Conference on Learning and Instruction, Athens, Greece.
- Rogoff, B. (1984). Introduction: Thinking and learning in social context. In B. Rogoff & J. Lave (Eds.), *Everyday cognition: Its development in a social context* (pp. 1-8). Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Säljö, R., & Wyndhamn, J. (1988). Cognitive operations and educational framing of tasks. School as a context for arithmetic thought. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 32, 61-71.
- Säljö, R., & Wyndhamn, J. (1993). Solving everyday problems in the formal setting. An empirical study of the school as context for thought. In S. Chaiklin, & J. Lave (Eds.), *Understanding practice: Perspectives on activity and context*. (pp. 327-342). Cambridge: Cambridge University Press.
- Schoenfeld, A.H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J.F. Voss, D.N. Perkins & J.W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp. 311-343). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Treffers, A., & De Moor, E. (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2. Basisvaardigheden en cijferen*. Tilburg: Zwijsen.
- Van Lieshout, E.C.D.M., Verdwaald, A., & Van Herk, J. (1997, August). *Suppression of real-world knowledge and demand characteristics in word problem solving*. Paper presented at the 7th European Conference on Learning and Instruction, Athens, Greece.
- Verschaffel, L. (1996, January). *Real-world knowledge and mathematical modeling of school word problems*. Lecture presented as part of the 'Mathematikdidaktisches Kolloquium, Wintersemester 95/96' of the Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Dortmund, Deutschland.
- Verschaffel, L., & De Corte, E. (1996). Leren realistisch modelleren en interpreteren van vraagstukken. Een exploratief onderwijsexperiment bij leerlingen van de bovenbouw van de basisschool. *Pedagogische Studiën*, 73, 322-337.
- Verschaffel, L., De Corte, E., & Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. *Learning and Instruction*, 4, 339-359.
- Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, 4, 273-294.
- Wyndhamn, J. & Säljö, R. (1995, August). *Quantifying time as a discursive practice. Arithmetics, calendars, fingers and group discussions as structuring resources*. Paper presented at the Sixth European Conference for Research on Learning and Instruction, Nijmegen, The Netherlands.
- Wyndhamn, J. & Säljö, R. (1997). Word problems and mathematical reasoning – a study of children's mastery of reference and meaning in textual realities. *Learning and Instruction*, 7, 361-382.
- Yoshida, H., Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Realistic considerations in solving problematic word problems: Do Japanese and European children have the same difficulties? *Learning and Instruction*, 7, 329-338.

## Auteurs

**L. Verschaffel** is Onderzoeksdirecteur bij het Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek, Vlaanderen, en Buitengewoon Hoogleraar aan de Faculteit der Psychologie en Pedagogische Wetenschappen van de K.U.Leuven.

**E. De Corte** is Gewoon Hoogleraar aan de Faculteit der Psychologie en Pedagogische Wetenschappen van de K.U.Leuven.

**S. Lasure** is wetenschappelijk medewerker van de Afdeling Didactiek van de Faculteit der Psychologie en Pedagogische Wetenschappen van de K.U.Leuven.

**Adres:** L. Verschaffel, Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie, K.U.Leuven, Vesaliusstraat 2, B-3000 Leuven, België, tel: 32/16/32 62 58, fax: 32/16/32 62 74;  
E-mail: lieven.verschaffel@ped.kuleuven.ac.be

## Abstract

### **Realistic modeling and solving of mathematical wor(l)d problems in the elementary school: A review**

**L. Verschaffel, E. De Corte en S. Lasure.** Pedagogische Studiën, 1999, 76, 183-200.

Some years ago Greer and Verschaffel, De Corte and Lasure provided evidence that after several years of traditional mathematics instruction children have developed a tendency to reduce mathematical modeling to selecting *the* correct formal-arithmetic operation with the numbers given in the problem, without seriously taking into account their common-sense knowledge and realistic considerations about the problem context. This evidence was obtained by means of a series of especially designed word problems with problematic modeling assumptions from a realistic point of view, administered in the context of a mathematical lesson. After having summarized these two initial studies, we briefly review a series of replication studies executed in different countries showing the omnipresence of this tendency among pupils. Then two related but different lines of follow-up studies are presented. While the first line of research investigated the effects of different forms of scaffolds added to the testing setting aimed at enhancing the mindfulness of students' approach when solving these problematic items, the second one looked at the effectiveness of attempts to increase the authenticity of the testing setting. Afterwards a study is reported which reveals that the strong tendency toward non-realistic mathematical modeling is found among (student-) teachers too. The last study involves a teaching experiment showing that it is possible to break this tendency by means of appropriate forms of instruction. We end with some theoretical, methodological and instructional implications of the work reviewed in this article.