

J.M.C. Nelissen*

Samenvatting

De constructie van interne representaties in het reken-wiskundeonderwijs wordt in dit artikel opgevat als een proces van significantie. Anders dan in de 'klassieke' representatietheorie wordt niet uitgegaan van een scheiding tussen een externe, gerepresenteerde wereld en een interne, representerende wereld. Het representeren wordt gezien als een proces waarin telkens nieuwe betekenissen ('signs') ontstaan in een voortschrijdend en cyclisch significantieproces. Een interne representatie ('signifier' genoemd) transformeert en vormt de basis ('signified' genoemd) voor een nieuw te construeren interne representatie ('signifier'). Een persoon vormt dus interne, mentale representaties van interne representaties.

Deze zienswijze heeft consequenties voor het instructiemodel en wel deze dat rekenen-wiskunde onderwijzen niet slechts mag worden gezien als een proces van kennisoverdracht. Kinderen construeren basale interne representaties die om interactieve toetsing vragen. Deze externe dialoog leidt tot reflectie of interne dialoog. Op grond van reflectie komen representaties op hoger niveau tot stand en deze nieuwe constructies vragen weer om dialoog. Niveauverhoging wordt niet slechts direct bereikt op basis van interactie, maar op basis van wat die interactie oproept, namelijk reflectie. Om die reden wordt er voor gepleit in de socio-constructivistische theorie meer aandacht te schenken aan reflectie omdat op basis daarvan niveauverhoging adequater kan worden begrepen. Tot slot wordt besproken in welke relatie het (socio-)constructivisme staat met de realistische onderwijstheorie. Naast verschillpunten wijzen wij op een essentiële overeenkomst, namelijk dat in beide theorieën het mathemati-

seren wordt opgevat als een proces van voortschrijdende significantie. Wiskunde leren begint en eindigt met betekenissen of 'common sense', zoals Freudenthal (1991) zei.

1 Inleiding

Mensen vormen in hun hoofd representaties, dat idee is oud. De geschiedenis van de wetenschap laat zien hoe steeds weer nieuwe beelden worden geconstrueerd die de stand van zaken met betrekking tot de wetenschappelijke inzichten representeren (Coplestone, 1985; Dijksterhuis, 1975). Mensen willen elkaar duidelijk maken hoe ze hun wereld begrijpen. Representaties komen daarom in een proces van co-constructie tot stand en worden voortdurend door de gemeenschap kritisch getoetst (Sinha, 1988).

In de cognitieve psychologie neemt het representatiebegrip een centrale plaats in (DeLoache, 1989). Hoewel dat begrip in het verleden door sommigen als psychologisch onbruikbaar werd afgewezen (Gibson 1966), zagen anderen representeren als zinvol handelen (Bruner, 1974, 1996; Sinha, 1988). In analyses van constructivistisch georiënteerde wiskundigen of wiskundig georiënteerde constructivisten (Von Glasersfeld, 1991) wordt de relatie tussen de representatie en dat wat gerepresenteerd wordt zo opgevat dat niet 'de realiteit' maar interne ervaringen gerepresenteerd worden. Het gaat dus om interne representaties en naar dat begrip wordt met de term representatie in dit artikel in principe steeds verwezen. Representaties worden niet gezien als een directe afspiegeling van de wereld. Menselijke kennis is geconstrueerde kennis (Phillips, 1995), wiskundige inzichten en procedures zijn niet ontdekt, maar uitgevonden dat wil zeggen door mensen bedacht (Freudenthal, 1983). De stellingname dat representaties constructies zijn, heeft consequenties voor het instructiemodel. Het betekent dat kinderen gezien moeten

* Met dank aan E. Elbers, L. Verschaffel en K. Graemeijer voor hun opbouwende commentaar op conceptversies van dit artikel

worden als actieve denkers en het beeld van het lerende kind is daarmee veranderd. Het kind zou moeten worden gezien, zegt Bruner (1996), als lerende zowel als epistemoloog. Het is de taak van de leraar om in de intuïties van het kind de wortels van systematische kennis te zoeken. In dit artikel onderzoeken we wat onder het begrip representatie in het reken-wiskundeonderwijs wordt verstaan. Het 'klassieke' representatiebegrip wordt vergeleken met de opvatting die door 'situated-cognition' theoretici wordt verdedigd. Wat betekent een constructivistische visie op het representeren voor de reken-wiskundendidactiek en welke zijn de consequenties van die visie voor het instructiemodel? Het instructiemodel dat wordt bepleit in dit artikel wordt vergeleken met de socio-constructivistische visie op reken-wiskundeonderwijs. Er wordt voor gepleit het reflectiebegrip in die theorie meer centraal te stellen zodat de overgang naar hogere representatieniveaus adequaat verklaard kan worden. Op basis daarvan wordt nagegaan wat in het reken-wiskundeonderwijs als betekenisvolle representaties beschouwd worden. Tot slot wordt de relatie geanalyseerd tussen het constructivisme en de realistische vakdidactiek.

2 Wiskundige representaties als ordeningsmiddelen

In de cognitieve psychologie maken theoretici - in het voetspoor van de logicus Frege - een onderscheid in 'referent' en 'sense'. Het begrip 'referent' verwijst naar wát er wordt gerepresenteerd en dat is de externe realiteit terwijl het begrip 'sense' verwijst naar hóe er wordt gerepresenteerd. De 'sense' is de representatie als zodanig (Palmer, 1978; Kosslyn, 1978; Dretske, 1986; Bechtel & Abrahamsen, 1991). Zowel wanneer het gaat om iconische representaties ('images') (Kosslyn, 1994) als om propositionele representaties (Anderson, 1990), in beide gevallen verwijst de representatie naar een gerepresenteerde, externe wereld, maar heeft de vraag naar de aard van de relatie tussen 'referent' en 'sense' steeds discussie opgeroepen (Sinha, 1988).

De wijze waarop wiskundigen-vakdidactici het representatiebegrip zien is nauw verweven met hun visie op wiskunde en die komt hierop

neer dat de wiskunde niet de 'absolutistische' wetenschap is waarvoor die lange tijd is gehouden. Wiskunde wordt niet langer beschouwd als een kant-en-klaar bouwwerk gekenmerkt door onbetwifelbare kennis maar als mensenwerk. En dat laat de geschiedenis van de wiskunde ook zien; voortdurend waren wiskundigen in debat en bleken leerstellingen op den duur niet nuttig of zelfs verdedigbaar. De wiskunde is ontstaan uit menselijke activiteit, niet ontdekt maar bedoeld. De mensen ontwerpen wiskundige middelen om allerlei verschijnselen - 'phainomena' zegt Freudenthal (1983) - waarmee ze in de cultuur worden geconfronteerd (denk aan tellen, meten en lokaliseren) te ordenen (Bishop, 1988). Die ordeningsmiddelen, de 'noömena' (Freudenthal, 1983), kunnen we beschouwen als wiskundige representaties. Zo is $L \times B$ een formele representatie van het verschijnsel oppervlakte. De formule $Opp. = L \times B$ kan worden gezien als een organisatie van het meten van oppervlakte van rechthoekige figuren die gaat functioneren als een representatie van oppervlakte. 'Noömena' vat Freudenthal op als wiskundige structuren. Op deze uitgangspunten is de realistische vakdidactiek gebaseerd (Treffers, 1987).

3 De vorming van interne representaties

3.1 Representeren: een proces van significatie
 Alvorens het proces waarin interne representaties worden gevormd te beschrijven, wordt eerst ingegaan op het onderscheid tussen externe en interne representaties. Externe representaties zijn, vanuit de vakdidactiek beschouwd, de kant-en-klare visualiseringen, schema's, modellen en tabellen - kortom de concrete representaties (zie par. 7) - die de docent (of ontwikkelaar) heeft ontworpen met de bedoeling dat de kinderen ermee leren werken, gebruik makend van de wiskundige eigenschappen van de representatie. Voorbeelden van zulke representaties zijn de getallenrechte, de abacus (met zijn positiesysteem) en de verhoudingstabel.

Tot de externe representaties worden bovendien gerekend de door wiskundigen geconstrueerde modellen (bijvoorbeeld algebraïsche of grafische modellen), zonder welke het weten-

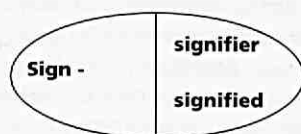
schappelijke debat ondenkbaar is en die in het maatschappelijk verkeer – als ‘cultural tools’ – een onmisbare functie vervullen.

Interne representaties worden geconstrueerd op basis van betekenisvolle ervaringen, ook wel mentale representaties (Fodor, 1981) genoemd. Externe representaties ontstaan, net als interne representaties uit betekenisvolle ervaringen en in dát opzicht is er dus geen verschil. Het verschil is vooral didactisch van aard in die zin dat externe representaties door volwassenen zijn geconstrueerd in de verwachting dat kinderen vanuit hun optiek de wiskundige noties die vanuit de volwassenen optiek zijn geconcretiseerd, zullen begrijpen. In tegenstelling tot externe representaties worden interne representaties in principe door de kinderen zelf geconstrueerd en dat vergroot de kans dat er sprake is van voor kinderen zinvol en inzichtelijk handelen.

De linguïst Halliday (1978) meent dat het kind in eerste instantie zijn wereld begrijpt op grond van **betekenissen** die het vormt. De cognitieve ontwikkeling wordt niet in eerste instantie gestuurd, volgens Halliday, door het denken en de logica (zoals Piaget, 1977 meent) en ook niet door de taal (Vygotskij, 1977). Denken en taal worden gestuurd door de constructie van betekenissen. Halliday (1978) typeert zijn benadering als ‘social semiotic’. Met die benadering beoogt hij de ontwikkeling van betekenissen te analyseren en te begrijpen tegen de achtergrond van de sociale omgeving waarin het kind opgroeit en waarin die betekenissen ontstaan (zie ook Sinha, 1988). Deze nadruk op betekenisvorming vinden we ook in publicaties van Carpay en Van Oers (ter perse): “According to our sociosemiotic point of view learning activity is the process of searching for shared meaning with discursive practise” (p. 2). Op basis van betekenissen ontstaat, wat Walkerdine (1982) noemt, context ‘in the mind’. Het kind vormt ‘modellen’ (Nelson, 1996), schema’s of scripts van situaties die het vaak meemaakt en die voor het kind betekenis krijgen. Het handelen vindt plaats in contexten, in situaties, het is gesitueerd, zodat in dat verband wordt gesproken van ‘situated cognition’ (Kirshner & Whitson, 1997). Dat betekent niet zozeer dat mensen in verschillende contexten denken, maar dat ze in verschillende ‘practices’ **anders** handelen. Daarin doen zich telkens

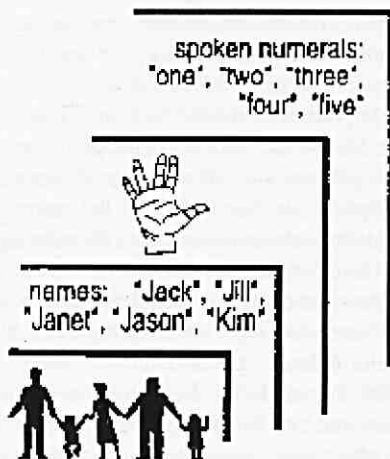
andere ‘relations of signification’ voor, zegt Walkerdine (1997). Zij bepleit een, wat zij noemt, psycho-semiotische analyse van ‘signs’, dat is een analysemethode waarmee de sociale processen waarin de ‘signs’ ontstaan, onderzocht kunnen worden. De gedachte dat er relaties of netwerken tussen significaties ontstaan, ontleent Walkerdine aan Lacan die spreekt van ‘semiotic chain’. Deze notie en het begrip ‘sign’ is voor ons betoog essentieel zodat daar nu nader op wordt ingegaan.

Een ‘sign’ bestaat uit twee constituenten, een ‘signifier’ en een ‘signified’ (Whitson, 1997) die, zoals in Figuur 1 schematisch is weergegeven, een eenheid vormen.



Figuur 1. Constituenten van een sign

Er worden nu telkens nieuwe ‘signifiers’ gegenereerd, in een proces dat Whitson (1997) karakteriseert als ‘chaining of signifiers’ en dat hij als volgt verduidelijkt (zie Figuur 2):



Figuur 2. Voorbeeld van een chain of signification

Om te beginnen zien we vijf mensen. Die mensen hebben een naam. De namen zijn de ‘signifier’ en de mensen de ‘signified’. Vervolgens kunnen die vijf namen worden gerepresenteerd door vijf vingers. De ‘signifier’ wordt nu ‘signified’ en men bedenkt een nieuwe ‘signifier’ namelijk de vijf vingers. Op weer een hoger

niveau worden de vijf vingers 'signified' en de nieuwe 'signifier' bestaat vervolgens uit gesproken getalssymbolen: een tot en met vijf (in een volgende fase in het proces worden de getalssymbolen gebruikt). Wat we hier zien gebeuren is dat er telkens een nieuwe 'sign' ontstaat, dat wil zeggen telkens een nieuwe combinatie van 'signifier' en 'signified', terwijl op telkens hoger niveau een 'signifier' wordt geconstrueerd. De nieuwe 'signifier' verwijst echter niet naar een object in de buitenwereld, maar naar een eerder geconstrueerde 'signifier'. Het kind representeert niet een objectieve realiteit, het representeert een mentaal, intern proces; het re-presenteert recursief zijn eigen interne representaties (Nunes, 1992; p. 571). Die interne representaties beïnvloeden vervolgens weer de perceptie van de werkelijkheid, of zoals Sinha (1988) het formuleert, representaties zijn constitutief voor de materiële wereld.

Het proces waarin een interne representatie wordt gevormd, is vrijwel altijd verbonden met een sociale context en ervaringen die in die context betekenis krijgen. Representatieprocessen zijn met andere woorden 'gesitueerd' en daardoor heeft of krijgt alles (woorden, werktuigen, tekens enzovoort) betekenis, meent Lemke (1997). Hij spreekt van 'ecosocial systems', waarmee hij bepleit sociale systemen, praktijken en contexten niet van elkaar te isoleren. Menselijk handelen betekent immers altijd het opereren met 'signs' (door Whitson, 1997, getypeerd als 'semiosis') en het begrip 'sign' staat dan ook centraal in deze benadering.

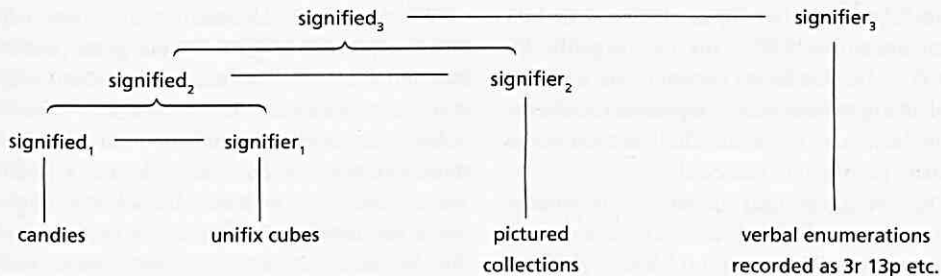
Deze 'situated cognition' opvatting van het representatiebegrip verschilt fundamenteel van de 'klassieke' representatietheorie (zie bijvoorbeeld Palmer, 1978; Dretske, 1986; Finke, 1989; Perner, 1991). In die theorie wordt uitgegaan van een scheiding tussen een 'referent', de objectieve buitenwereld die wordt gerepresenteerd, en een 'sense', de interne representatie in iemands hoofd. Dit is een in wezen **dualistische**, en volgens Whitson (1997) structuralistische, opvatting. Dit dualisme is in de 'situated cognition' theorie overwonnen, doordat de 'signifier' altijd voortkomt uit een voorafgaande 'signifier', dat wil zeggen nauw is verweven met zinvolle interne ervaringen en dus niet direct afhankelijk is van een buiten ons bestaande externe wereld. Of zoals Sinha

(1988; p. 33) zegt: "the signified is produced, rather than referred to". Men zou kunnen zeggen dat de nieuwe 'signifier' de bestaande ervaringen organiseert.

De vraag is overigens niet of er een externe, objectieve wereld bestaat en de discussie is dan ook niet ontologisch maar epistemologisch van aard. De vraag luidt hoe wij de externe wereld kennen.

Aansluitend bij de 'situated cognition' theorie wordt in dit artikel een non-dualistische representatieopvatting bepleit. Kenmerkend voor deze opvatting is dat in een steeds voortschrijdend en iteratief significatieproces een 'sign' transformeert in de 'signified' voor een nieuwe 'signifier' op een hoger niveau. In de realistische vakdidactiek (Freudenthal, 1991; Gravemeijer, 1995) en de socio-constructivistische theorie (Cobb, Gravemeijer, Yackel, McClain, & Whitenack, 1997) wordt het mathematiseren in essentie als zulk een significatieproces gezien. Volgens Freudenthal (1991; p. 9) zou wiskunde moeten beginnen met 'common sense' van de leerling. Freudenthal zegt het als volgt: "Common sense, in order to become genuine mathematics and in order to progress, had to be systematised and organised. Common sense experiences, as it were, coalesced into rules (such as the commutativity of addition), and these rules again became common sense, say of a higher order...". Met andere woorden, wiskunde begint telkens bij betekenis van kinderen en eindigt daar ook mee.

Hoe het proces van mathematiseren als een significatieproces verloopt, hebben Cobb et al. (1997) in een recent uitgevoerd experiment gedemonstreerd. De theoretische basis voor de interpretatie van het experiment werd gevormd door de significatietheorie van Walkerdine (1988, 1997), het socio-constructivisme (Cobb, 1994) en de realistische vakdidactiek (Gravemeijer, 1995). De basale uitgangspunten van deze theorieën zijn volgens deze onderzoekers in hoge mate met elkaar consistent: nadruk op de activiteit van de leerling, op creativiteit, op probleemoplossen, op de realiteit van contexten en vooral ook 'mathematical reality'; met dat laatste wordt bedoeld het creëren van mathematische objecten en daarmee van een nieuwe werkelijkheid. Een poging tot integratie achten ze daarom verantwoord en ook wen-



Figuur 3. 'Chain of signification'

selijk. De auteurs beschrijven uitvoerig hoe – uitgaande van de context van een 'candyshop' – en onder andere werkend met het rekenrek en unifix blokken (bestaande uit staven van 10 en uit losse blokken) de kinderen telkens nieuwe 'signifiers' construeerden. De 'candies' werden voorgesteld door blokjes, de blokjes-die 'candies'-voorstellen vervolgens door afbeeldingen etc. Met andere woorden, er ontstonden 'chains of signification', zoals de onderzoekers in Figuur 3 illustreren (ontleend aan Cobb, et al. 1997; p. 192).

3.2 Niveaus van representatie

'Common sense' wordt georganiseerd tot wiskunde op meer formeel niveau. We zien dit in het proces waarin kinderen de eerste telervaringen opdoen, op basis daarvan gaan structureren en vervolgens overgaan op formeel rekenen.

Freudenthal (1991) noemt het kunnen uitspreken van de telrij het eerste algoritme met een wiskundig karakter dat het kind zich eigen maakt. Het is een 'common sense' algoritme dat een kind leert door middel van de 'common language', de taal waarmee het wordt geconfronteerd in betekenisvolle situaties (Nelson, 1996). In grote lijnen kan het verloop van het proces waarin het kind greep krijgt op gehele getallen chronologisch als volgt worden geschetst. Het kind kan een hoeveelheid van twee en drie onderkennen, het leert de telrij als opzegversje, het kan van een kleine hoeveelheid het aantal vaststellen, getsymbolen herkennen en resultatief tellen. De overgang die daarop volgt, namelijk van tellen naar structureren, is cruciaal omdat daaruit het inzichtelijk hoofdrekenen ontstaat dat de basis vormt voor alle (hoofd)rekenoperaties die het kind nog moet leren. Het een-voor-een tellen wordt ver-

kort doordat het kind structuren ontdekt die betekenis hebben (zoals getalbeelden op een dobbelsteen of de vijf vingers). Hoeveelheden kunnen op basis van die structuren geordend en met elkaar vergeleken worden. Het optellen dat eerst tellend werd uitgevoerd, vindt nu plaats op basis van een nieuwe 'signifier': structuur en getalbeeld. Het kind heeft een basis geconstrueerd om volgens regels te gaan werken: de structuur wordt 'signified'. Optel- en aftrekoperaties verlopen steeds flexibeler volgens inzichtelijke strategieën, bijvoorbeeld op basis van het werken met 'dubbelbeelden' (3+3, 5+5). Voorwaarde voor dit gehele proces van ontluikende gecijferdheid is dat het kind stimulerende ervaring opdoet in betekenisvolle situaties (Nelissen, 1998). We zien in dit voorbeeld dat eerdere 'common sense' inzichten ingrijpende herstructurering ondergaan doordat er telkens nieuwe betekenisvolle, interne representaties worden geconstrueerd: van tellen naar structuur en van structuur naar inzichtelijk regelgebruik. Het optellen dat eerst werd opgevat en gerepresenteerd als een operatie die je een-voor-een tellend uitvoert, transformeert in het inzichtelijk opereren met handige regels.

Zo worden ook breuken op verschillende niveaus gerepresenteerd en begrepen (zie Bokhove et al. 1996; Streefland, 1991). Aanvankelijk werken kinderen met informele, contextgebonden representaties; de kinderen gaan bijvoorbeeld een tafel meten met een maat 'de A'damse voet' en ze ontdekken dat de tafel bijvoorbeeld $3 \frac{1}{2}$ voet breed is. Daarna volgt de semiformele, schematische, modelondersteunende representatie van breuken; de kinderen geven bijvoorbeeld in schema weer op hoeveel manieren je 3 stokbroden onder 4 kinderen kunt verdelen. Op het hoogste representatieniveau worden formele, vakmatige samenhan-

gen met verwante begrippen zichtbaar; de kinderen lossen problemen op als: vergelijk $3/4$ met $0,7$. De kinderen opereren nu op puur getalsmatig-symbolisch representatieniveau, en op dat niveau is hun inzicht in het fenomeen breuken ingrijpend veranderd.

De **overgang** naar hogere representatieniveaus is in het reken-wiskundeonderwijs echter vaak een bron van problemen (Janvier, 1987). Een van de belangrijkste oorzaken van die problemen is dat wiskundige betekenissen verward worden met hun alledaags gebruik (Zepp, 1989). Het gaat dan niet alleen om kwesties als ambiguïteit van de spreektaal (Pimm, 1991), maar om manieren waarop kinderen iets zien. In het bijzonder als het om symbolische representaties gaat, treedt er vaak verwarring op en dreigt terugval op de natuurlijke taal en het 'allegaagse' denken.

Laten we als voorbeeld van zo'n verwarring het bekende 'Studenten Professor Probleem' (Clement, 1982) eens bekijken, een probleem dat erg lastig is en uiteraard niet voor de leerlingen van de basisschool is bestemd. Dat probleem luidt als volgt. Op een universiteit is er voor 6 studenten 1 professor. De opdracht is in een algebraïsche vergelijking de verhouding tussen het aantal studenten en professoren te noteren. Meer dan de helft (65%) van de onderzochte (ook volwassen) proefpersonen aan wie dit probleem werd voorgelegd, gaf als antwoord: $6S=P$, de 'reversal error' zoals Kaput (1987) die fout typeert. De kloof met de leefwereldtaal werd vermoedelijk moeilijk overbrugd: 'Zes maal meer studenten' is gewoon 6 S. Door het gebruik van een wiskundig representatiemiddel, namelijk het opstellen van een tabel, kan greep op het probleem worden verkregen (zie Tabel 1).

Tabel 1
Evenredigheidstabel

S (aantal studenten)	P (aantal professoren)
6	1
12	2
18	3

Men is nu minder geneigd personen in plaats van aantallen te vergelijken. Uit de tabel blijkt dat het om evenredigheden gaat en $6 \times P$ gelijk is aan S, kort gezegd: $6P = S$.

Wanneer men kinderen vraagt, om een ander voorbeeld te geven, welk getal precies tussen $0,9$ en $0,11$ ligt, luidt het antwoord vaak $0,10$. Er is hier sprake van interferentie – specifiek: van negatieve transfer – tussen twee representatiesystemen, namelijk het systeem van de natuurlijke getallen (dat ook in de dagelijkse taal wordt gebruikt) en het systeem van de decimale getallen. Daarom pleiten veel auteurs ervoor aandacht te schenken aan de **vertaling** van de ene wijze van representeren naar de andere (Janvier, 1987; Kaput, 1987). Hoe moet echter aan die vertaling vakdidactisch uitwerking worden gegeven?

De overgang van het ene representatieniveau naar het andere kan worden bevorderd door het systematisch uitlokken van **reflectie** en – samenhangend daarmee – het stimuleren van eigen constructies en betekenisgeving door de leerlingen. Bedoeld wordt het in gang zetten van een proces van significatie zoals dat in het voorafgaande werd besproken. In de volgende twee paragrafen wordt een instructiemodel bepleit waarin aan het reflecteren een centrale betekenis wordt toegekend.

4 Consequenties voor het instructiemodel

Representaties worden in dit artikel opgevat als betekenisvolle constructies en deze zienswijze heeft consequenties voor het instructiemodel. Ten eerste is rekenen-wiskunde onderwijzen niet slechts een kwestie van kennisoverdracht en ten tweede moeten kinderen ruimte krijgen voor eigen constructies. Misschien is het beter te spreken van **co-constructies** (Leseman & Sijsling, 1996), want in essentie gaat het erom – zoals in deze paragraaf wordt uiteengezet – hoe kinderen gezamenlijk tot mathematische activiteiten komen. Hoe dat onderwijsleerproces kan verlopen, wordt aan de hand van een voorbeeld uiteengezet. In een rekenles werd de kinderen gevraagd uit te zoeken welke fles van een aantal verschillend gevormde flessen (zonder etiket) de grootste inhoud heeft. In het experiment (zie Nelissen & Tomic, 1994) kwamen de kinderen op allerlei vondsten zoals: onderdompelen in water, wegen, een bekertje als maat gebruiken, leeggieten en kijken waar de grootste plas ontstaat. Over die verschillen-

de constructies of ideeën werd druk gediscussieerd en de kinderen werden aangespoord hun eigen ideeën te verdedigen. Maar ze moesten ook goed luisteren naar de argumenten van anderen (op het belang van deze gesprekskenmerken is gewezen door Elbers, 1993 en Mercer, 1995). De vraag aan de groep welk voorstel het meest aansprak en waarom, lokte dus nieuwsgierigheid en interactie uit, dat wil zeggen kritische toetsing. In een volgende fase kreeg die toetsing het karakter van een experiment en werden de voorstellen die van de kinderen het meeste credit kregen, uitgeprobeerd. De ervaringen die werden opgedaan tijdens dat experimenteren werden geëvalueerd en de kinderen werd gevraagd opnieuw kritisch naar aanleiding van de **discussie** met en de **kritiek** van de andere kinderen, het eigen oorspronkelijke voorstel te analyseren. Na de fase van constructie en interactie volgde nu een fase van **reflectie**. De eigen constructies werden, zo was de bedoeling, door reflectie op hoger niveau gebracht. Dat gebeurde niet zonder meer bij alle kinderen, want sommigen hielden vast aan hun oorspronkelijke werkwijze. Bij andere kinderen echter leidde de reflectie inderdaad tot representatie op hoger niveau.

Indien reflectie daadwerkelijk leidt tot nieuwe constructies op **hoger** niveau kan de hele cyclus weer opnieuw beginnen. De nieuwe constructie is immers weer aanleiding tot kritische interactieve toetsing. Vanwege dit cyclisch karakter kan het leerproces, zoals dat hier is geschetst, gekarakteriseerd worden als **dialectisch**. Kort samengevat kan het instructiemodel in algemene termen als volgt worden weergegeven.

De eerste fase is die waarin de kinderen op basis van hun voorkennis (co-)constructies vormen. Deze lokken – vaak gestimuleerd door interventies van de leerkracht – discussie en kritische toetsing uit. Door in discussie geconfronteerd te worden met andere ideeën en argumenten ontstaat de behoefte om op basis van die argumenten op de eigen representaties kritisch te reflecteren en deze zo nodig bij te stellen. Omdat reflectie ontstaat uit dialoog kan het reflecteren getypeerd worden als **geïnterioriseerde dialoog**; de externe dialoog gaat over in de interne dialoog. Zo moet ook het anticiperen op de communicatie met een ander begrepen worden als geïnterioriseerde dialoog (Nelissen

& Tomic, 1996). Door reflectie op het eigen handelen kan een kind representaties op hoger niveau construeren en die vragen weer om kritische toetsing (Nelissen, Ruyters & Van Hest, ter perse).

5 Niveaueverhoging door reflectie

In de socio-constructivistische theorie (Cobb & Bauersfeld, 1995; Cobb, 1994; Cobb et al. 1997; Gravemeijer, 1995) wordt het mathematiseren gezien als een significantieproces waarin op steeds hoger niveau interne representaties ontstaan. Hoe wordt door deze auteurs die niveaueverhoging verklaard? Om op die vraag in te kunnen gaan, bekijken we eerst de gegevens uit onderzoek naar het reflectief denken van basisschoolkinderen (Nelissen, 1992). Uit dit onderzoek is gebleken dat de kinderen die op hoog niveau problemen oplosten, ook hun strategie durfden veranderen, een eenmaal gekozen oplossingsweg durfden verlaten, zochten naar verbanden met hun leefwereldkennis, hun zoekproces (spontaan) controleerden, twee werkwijzen vergeleken en zich vooraf mentaal op mogelijke werkwijzen oriënteerden. Dit zijn belangrijke kenmerken van reflectief denken. De zwakke probleemoplossers hielden vaak vast aan een standaardprocedure. Voorbeeld: op een foto zien ze een sterrenhemel. De kinderen werd gevraagd hoeveel sterren er ongeveer staan. De zwakke rekenaars opteerden voor en hielden vast aan een telstrategie; ze ruilden die niet in – ook niet na sterke hints in die richting van de onderzoeker – voor een handiger schatstrategie. Deze kinderen reflecteerden niet of op laag niveau, ze waren bijvoorbeeld niet in staat twee werkwijzen te vergelijken, ook niet een eigen werkwijze met die van een ander. Het vergelijken van twee werkwijzen is echter belangrijk en bij de kinderen die deelnemen aan de onderwijs-experimenten van Cobb et al. (1997) wordt zulk een operatie ook uitgelokt. Als een groepslid namelijk op een mooie, perspectiefrijke vondst komt, is het niet de bedoeling dat een ander kind die vondst blindelings overneemt. Met de discussie die de leerkracht tussen de kinderen uitlokt, bedoelen de onderzoekers, mogen we aannemen, dat een kind zich

een beeld vormt van de aard, opzet en mogelijke voordelen van dat nieuwe voorstel en dat beeld vergelijkt met de eigen aanpak. Dit reflectieproces is essentieel om op hoger niveau nieuwe werkwijzen te kunnen hanteren, zoals ook in het werk van Piaget (1977) en Freudenthal (1979) wordt benadrukt.

Piaget ziet reflectie ('réfléchissements') als een voorwaarde voor niveauverhoging. 'Reflexieve abstracties', zoals Piaget ze noemt, begrippen op telkens hoger niveau, ontstaan op basis van 'réflexions' en die beschouwt Piaget als een van de 'moteurs du développement cognitif' (p. 307). Volgens Freudenthal (1979; p. 9) leidt **reflectie** tot mathematiseren op hoger niveau: "The mathematics performed, acted out on a lower level, is made conscious and analysed and consequently transformed into subject matter at a higher level". Zoekende naar een juiste term voor dat proces, zegt Freudenthal, "I hit on reflection".

6 Van externe naar interne dialoog; het socio-cognitief conflict

In de theorie van Vygotskij (1977) ontstaat reflectie – zoals elke hogere psychische functie – uit de dialoog tussen kind en volwassenen. Wij noemden reflectie daarom 'geïnterioriseerde dialoog'. Het ontstaan van reflectie lijkt onlosmakelijk verbonden met communicatie. Het is opvallend dat in de socio-constructivistische beschouwingen wel naar Vygotskij wordt verwezen (Cobb, 1994) en dat veel aandacht wordt besteed aan de analyse van de structuur van de communicatie in de klas, maar aan het ontstaan van de interne dialoog (reflectie) uit de externe dialoog wordt weinig aandacht geschonken. Toch past een Vygotskiaanse reflectieopvatting goed in het socio-constructivisme, omdat in beide theorieën de communicatie als voorwaarde wordt gezien voor het ontstaan van hogere cognitieve processen.

Evenals Vygotskij ziet Freudenthal reflectie ontstaan uit interactie: "mirroring oneself in the other in order to look through his skin". "There is one argument why reflective behaviour should start with mirroring at the other's mind. The argument is language, or more generally,

communication" (p. 10). Echter, de overgang naar hogere representatieniveaus komt niet direct op basis van interactie en uitwisseling van ideeën tot stand, maar op basis van wat die interactie **oproept**, namelijk reflectie. Hogere representatieniveaus ontstaan **gemedieerd** door reflectie, zoniet dreigt het gevaar dat de idee van iemand anders passief wordt overgenomen. Een belangrijk reflectief moment is het vergelijken van de eigen aanpak met een (mogelijk betere) aanpak van een ander. Het is goed denkbaar dat zich bij de kinderen die participeerden in de onderwijsexperimenten waarover Cobb et al (1997) rapporteren, zulke reflectieprocessen hebben voorgedaan. De onderzoekers analyseren de discussie tussen de leerlingen echter vooral vanuit een sociologische optiek en die analyses maken helder volgens welke sociale normen de discussie verliep en door welke groepsdynamische structuur de sociale interactie werd gekenmerkt. Een psychologische analyse van de mentale processen op individueel niveau, de auteurs wijzen daar zelf op (p. 214), ontbreekt. Het is Cobb ook niet steeds om zulke processen te doen. Zo hoefden de leerlingen in een ander recent uitgevoerd experiment (Cobb, 1997) niet bewust 'slimme' aanpakken te leren hanteren ('*consciously figure out*', zegt Cobb, curs. J.N.), maar moesten ze inzicht in relaties tussen getallen verwerven. Het protocolmateriaal laat zien dat er hoogwaardige interacties plaatsvinden, maar er wordt geen conflict uitgelokt, dé reden bij uitstek om te gaan reflecteren op de eigen werkwijze en dé aanleiding om de eigen werkwijze desgewenst kritisch te herzien. Het gebeurt dat de leerlingen een handige werkwijze van een medeleerling accepteren, maar uit de protocollen is niet goed af te leiden waar die acceptatie precies op is gebaseerd. Zo zegt Jan (p. 168): "I get it...That's a good way". Waarin verschilde die nieuwe aanpak volgens Jan dan van zijn eigen aanpak? De onderzoekers zijn echter wel degelijk reflectieprocessen op het spoor, alleen worden die niet – zoals uit de volgende observatie blijkt – als zodanig geïdentificeerd. "Jordan appeared to reconceptualize his prior counting solutionmaking the transition from counting by ones to grouping..." (p. 172). Hier is bij Jordan zeer waarschijnlijk sprake van reflectie. Hij heroverweegt en herziet immers zijn eigen werkwijze en bereikt daardoor een

hoger niveau van mathematiseren.

De verklaring dat de 'chains of signification' bij individuele leerlingen tot stand komen, moet gezocht worden in de individuele processen van **reflectie** (zie ook Fogarty, Perkins & Barell, 1992).

Het mathematiseren, volgens de socio-constructivistische opvatting, kan als volgt schematisch worden weergegeven: constructie ('signifier' 1) → interactie → constructie ('signifier' 2) etc.

Onze suggestie luidt dit schema als volgt uit te breiden:

constructie ('signifier' 1) → interactie → reflectie → constructie ('signifier' 2) etc.

Hoe kan tijdens het proces van mathematiseren reflectie worden opgeroepen?

Het **socio-cognitieve conflict** kan, zoals verschillende onderzoekers hebben beklompt (Doise & Mugny, 1984; Borkowski, 1985; Kilpatrick, 1985) als een didactische strategie worden gebruikt om reflectie op te roepen. Een socio-cognitief conflict speelt zich af, zeggen Doise en Mugny, in de communicatie tijdens een sociale interactie. Een persoon wordt door een ander met een dilemma geconfronteerd, ontdekt dat er andere perspectieven en oplossingen in het geding kunnen zijn en daardoor ontstaat de behoefte de verschillende perspectieven te vergelijken. De oorspronkelijke werkwijze wordt vanuit een andere optiek, of de optiek van een ander, bezien ('shifting one's standpoint' in de woorden van Freudenthal, 1979).

Een socio-cognitief conflict kan op verschillende manieren worden uitgelokt, bijvoorbeeld:

- Antwoorden van kinderen aanvechten.
- Problemen presenteren waarbij meerdere oplossingen mogelijk zijn.
- Open problemen laten oplossen.
- Socratische vraagstelling.
- Problemen laten oplossen die niet oplosbaar zijn (vanwege ontbrekende gegevens).

De overgang naar hogere representatieniveaus wordt behalve door reflectie ook bevorderd door uit te gaan van eigen betekenisgeving van leerlingen, zoals in de volgende paragraaf wordt besproken. Er is naast reflectie dus nog een ander mechanisme om tot hogere representatieniveaus te komen.

7 'Common sense' concrete en concreet-materiële representaties

Als startpunt van het mathematiseringsproces wordt vaak gezien: concreet beginnen. Het begrip 'concreet' kan echter op twee manieren worden uitgelegd. Ten eerste als 'materieel-concreet' en ten tweede als 'ervaring'.

Volgens Freudenthal (1991) is het startpunt van het mathematiseren de ervaring en die noemt hij 'common sense'. Vandaar dat gesproken kan worden van 'common sense representaties' (Gravemeijer & Nelissen, 1996). De eerste basale representaties die kinderen vormen, steunen op ervaringen die **betekenis** hebben voor kinderen. Aan de hand van het tellen (par. 3.2) werd geïllustreerd hoe het proces van ontluikende gecijferdheid voortschrijdt, telkens een hoger niveau bereikt en op elk niveau weer opnieuw 'common sense' wordt. In de realistische vakdidactiek (Treffers, 1987; Goffree, 1986) spreekt men in dit verband van verticaal mathematiseren; de kinderen representeren op dat niveau uit contexten afgeleide situatiemodellen en op basis daarvan ontstaan de verticale begripsvorming en representaties als tabellen, schema's etc. Op het eerste betekenisniveau vormt het kind, zegt Gravemeijer (1994), 'modellen van' en die zijn vergelijkbaar met de 'mental models' van Johnson-Laird (1983). Het zijn modellen van contextproblemen en informele strategieën. Die modellen gaan over in meer algemene modellen, 'modellen voor' en dat zijn representaties van wiskundige strategieën, van algemeen wiskundig redeneren.

In de cognitieve psychologie en ook in de mechanistische en structuralistische vakdidactiek wordt vertrouwd op concretisering van wiskundige kennis in externe representaties. Ter onderscheiding van de realistische situatiemodellen noemen we deze representaties '**materieel-concreet**', terwijl we de realistische modellen aanduiden als '**common-sense concreet**'. Materieel-concrete representaties zijn gedacht als concretisering van de wiskunde in zijn zuiverste vorm. Om een voorbeeld te geven wordt het begrip oppervlakte gerepresenteerd als een rechthoek waarin het aantal kolommen vermenigvuldigd moet wor-

den met het aantal rijen. Dat is wiskundig gezien uiteraard correct maar wel gedacht vanuit het formele eindstadium van de standaardberekening voor oppervlakte ($L \times B$).

In de leertheorie van Gal'perin (1980) is de materialisering (en de materiële handeling) de basis voor het leerproces. Als de kern van Gal'perins trapsgewijze leerprocedure geldt dat de vorming van volwaardige mentale handelingen gebaseerd is op materiële (dan wel gematerialiseerde) handelingen. Wat er voor de kinderen gematerialiseerd wordt, kan beschouwd worden als concreet-materiële representaties. Niet de bedoelingen, de 'common sense' van het kind, maar de structuur van de materialisering moet het handelen van de kinderen sturen. De basale representaties zijn met andere woorden materieel-concreet en niet 'common sense' van aard.

Het idee representaties direct uit de wiskunde af te leiden, is kenmerkend voor het werk van Dienes (1963), Piaget (1977), deels ook voor de experimentele programma's van Davydov (1977) en in de vakdidactische uitwerkingen van de 'information processing approach' (Resnick & Ford, 1981). De laatste werk(t)en vooral met concretisering die afgeleid zijn van het handelen van experts.

In het algemeen gesproken zijn materieel-concrete representaties vaak kunstmatig, zoals bijvoorbeeld het zogenoemde Cuisenaire-materiaal. Dat materiaal bestaat uit staafjes van verschillende kleur en lengte die als model dienen om getallen mee te associëren. Dat lukt maar weinig kinderen, met name omdat ze de achterliggende systematiek niet kennen en dus niet weten wat hier eigenlijk is gerepresenteerd (Cobb, Yackel & Wood, 1992). Het zijn immers concretisering die door volwassenen zijn bedacht, maar die volwassenen hebben al inzicht in de systematiek die geconcretiseerd is en daarom snappen ze **wat** er precies wordt geconcretiseerd. Zulke concretisering ('embodiments') (Janvier, 1987) hebben als zodanig niet veel betekenis voor kinderen omdat deze niet weten waar die concretisering naar verwijzen. Deze benadering heeft dan ook kritiek uitgelokt (Cobb et al 1992; Greeno, 1991; Von Glasersfeld, 1991). Wiskunde leren, zo luidde de kritiek, betekent in essentie dat leerlingen zelf interne representaties vormen van hun ervaringen. Door hen te confronteren met

kant-en-klare externe representaties wordt dat proces geblokkeerd.

Cobb et al. (1992) typeren deze didactiek als 'instructional representation approach' en die veroorzaakt, wat zij in navolging van Bereiter (1985) noemen, de 'learning paradox'. Terwijl een concretisering is bedoeld om een 'idee' of 'theorie' te verduidelijken, is juist kennis van dat 'idee' of die 'theorie' vereist om de concretisering te kunnen begrijpen. De 'learning paradox' kan worden voorkomen door uit te gaan van contexten die voor kinderen zinvol zijn zodat zij zélf betekenis kunnen geven aan hun handelen en hun eigen representaties kunnen vormen. Dit betekent niet dat representaties die door de leerkracht worden aangereikt per definitie uit den boze zijn. Het betekent wél dat ook in die gevallen de kinderen ruimte gelaten moet worden om met elkaar – maar geleid door hints van de leerkracht – die representaties op te bouwen. De leerkracht is en blijft in hoge mate verantwoordelijk voor het oproepen van de interacties en reflecties die voor dat constructieproces noodzakelijk zijn (zie par. 4).

8 Constructivisme en realisme

Het representatiebegrip werd in dit artikel geanalyseerd vanuit een socio-constructivistische inspiratiebron. Wat is echter de relatie tussen het constructivisme en de, zeker in Nederland, meest toonaangevende didactische stroming, de realistische onderwijstheorie (Goffree, 1986; Treffers, 1987)? Het constructivisme, meent Phillips (1995), wordt in een breed filosofisch of theoretisch spectrum verdedigd. In dat spectrum plaatst hij onder meer Kant, Kuhn, Piaget, Dewey en Von Glasersfeld.

Het constructivisme is in oorsprong (Gravemeijer, 1995) een algemene theorie over kennisverwerving en geen onderwijstheorie. De realistische onderwijstheorie is een vakdidactische theorie en dus hebben we te maken met twee verschillende theorieën. Het constructivisme wordt echter uiteenlopend geïnterpreteerd (Gravemeijer, 1995), en de kritische commentaren lijken vooral gericht op het **radicaal** constructivisme (bijvoorbeeld Solomon, 1994).

In dit artikel werd de aandacht gevestigd op een nog jonge onderzoekstraditie waarin

gepoogd wordt het **socio-constructivisme** en de realistische onderwijstheorie te integreren (Cobb, 1994, 1997; Gravemeijer, 1995). Deze theorieën vullen elkaar goed aan, stelt de laatste auteur en onderzoeksgegevens (Cobb et al., 1997) lijken zijn opvatting te ondersteunen.

Toch is er sprake van verschillende theorieën, niet alleen omdat ze in een andere theoretische context zijn ontstaan (een epistemologische en een vakdidactische), maar ook omdat andere programmatische doelen worden nagestreefd.

Tot de belangrijkste realistische onderzoeksdoelen mogen gerekend worden: – het onderzoek naar de didactische macro-structuur van het reken-wiskundeonderwijs als basis voor de ontwikkeling van nieuwe curricula, – het onderzoek naar de leerlijnen volgens welke zich op langere termijn begripsvormingsprocessen voltrekken, – het onderzoek naar de verbanden tussen die leerlijnen, – de ontwikkeling van materialen voor leerlingen en methoden voor docenten, – de doordinking van een 'nationaal programma' voor het reken-wiskundeonderwijs enzovoort.

Het socio-constructivistisch onderzoeksprogramma wordt niet zozeer door actuele vragen uit de praktijk bepaald als wel door de behoefte nieuwe perspectieven te verkennen, deze te exploreren in betrekkelijk kleinschalige onderzoekssettings en op basis daarvan de theorievorming te stimuleren. Van deze exploraties kan in de praktijk wellicht nog niet direct worden geprofiteerd, maar ze kunnen op termijn vruchtbaar blijken. Socio-constructivisten willen aantonen dat kinderen op grond van eigen interne representaties vaak met meer inzicht leren mathematiseren dan op grond van de uitleg en de concretisering die volwassenen voor hen bedacht hebben. Dat wil niet zeggen dat ze de kinderen alles zelf willen laten uitvinden; dat ideaal vindt men eerder in het radicaal-constructivisme. Wanneer vanuit de realistische onderwijstheorie met enige reserve wordt gereageerd op het constructivisme, keert men zich vermoedelijk vooral tegen dat ideaal van de radicalen. De Lange (1997) spreekt vooralsnog over 'nuanceverschillen' en deze hebben betrekking onder meer op het feit dat het belang van de bovengenoemde doelen van het realistisch onderzoeksprogramma onderschat dreigen te worden (zie ook Solomon, 1994) en

deze zijn juist voorwaarde voor een succesvolle onderwijsvernieuwing.

Hoewel De Lange wijst op niet te negeren verschillpunten (er zijn er nog meer, zoals de mate van sturing van de leerkracht) tussen het constructivisme en het realisme, zijn er toch ook belangrijke overeenkomsten tussen beide stromingen. Bijvoorbeeld de aandacht voor discussie en taal, het belang dat wordt gehecht aan informele werkwijzen, de functie van contexten, de aandacht voor motivatie en betekenis. Doorslaggevend is echter dat in het socio-constructivisme het mathematiseren wordt opgevat als een proces van voortschrijdende significantie (par. 3.1) en juist deze visie op het leren van wiskunde vinden we terug als de grondstelling van Freudenthals didactische fenomenologie, namelijk dat de wiskunde bij kinderen altijd begint bij 'common sense' en daar ook mee eindigt. Wiskunde begint bij betekenissen van kinderen en eindigt daar ook weer mee. Daarover bestaat geen verschil van inzicht, zoals ook Dolk (1997) onlangs heeft betoogd.

Wat is tenslotte de betekenis van het socio-constructivisme voor de dagelijkse onderwijspraktijk? Solomon (1994) waarschuwt tegen al te hoog gespannen verwachtingen. Kinderen zijn geen wetenschappers en construeren geen kennis op de manier zoals wetenschappers dat doen. Wat kinderen moeten leren is vaak voor hen volstrekt nieuw en daardoor ontbreekt de relatie tussen hun leefwereld-intuïties en de nieuwe begrippen die geleerd moeten worden. Vandaar dat Solomon ervoor pleit de functie van de leraar in het proces van cultuuroverdracht (zie Van Oers, 1994) niet te onderschatten en met dit kritische commentaar keert Solomon zich, mogen we aannemen, tegen de radicaal-constructivisten.

Cobb et al. (1997) hebben laten zien wat het socio-constructivisme – vooralsnog in kleinschalig experimenten – voor de praktijk van het reken-wiskundeonderwijs kan betekenen. Van de kinderen werd echter niet gevraagd zelf hun eigen wiskunde te construeren. In de experimenten werd onderzocht hoe leerlingen in interactie met mede-leerlingen en intensief getrainde leraren, werkwijzen construeerden die mathematisch relevant zijn.

9 Ter besluit

Het socio-constructivisme kampt met twee cruciale problemen. Ten eerste is het niet op voorhand zeker dat de vondsten van de kinderen perspectief bieden voor wat op langere termijn geleerd moet worden en ten tweede is het de vraag hoe de leraar dat kan beoordelen. Als de vondst van een kind onvoldoende robuust is en geen perspectief biedt, is ingrijpen van de leraar onvermijdelijk, waarmee echter de constructivistische inspiratiebron aan kracht inboet. Om dit probleem het hoofd te kunnen bieden is het nodig dat de leraar zicht heeft op de curriculaire macro-uitlijning van de leerstof, de 'big ideas' (Cobb, 1997), zeg maar de bakens waarop de leraar zijn koers kan richten. Socio-constructivisten hebben dan ook de noodzaak onderkend van een 'pedagogical agenda' omdat die zicht kan geven op de 'potential significance of issues that might emerge as topics of conversations' (p. 277). Hetzelfde probleem geldt ook voor het in dit artikel gepresenteerde instructiemodel. Het model is zo bedoeld dat op basis van interventies van de leraar constructie, interactie en reflectie worden opgeroepen. Dit is mogelijk op basis van de macro-structuur van – in principe – elk realistisch curriculum. Veel, zo niet alles, zal echter afhangen van de kwaliteit van de interactie tussen leraar en leerlingen (zie Mercer, 1995). Die moet van hoog niveau zijn, dat wil zeggen dat de leraar op het juiste moment, op de juiste manier, met de juiste middelen en met inzicht in welke uitvindingen van de kinderen voor het mathematiseren perspectief bieden, de beoogde processen bij de kinderen moet uitlokken en stimuleren. Dit vereist intensieve nascholing van leraren.

Literatuur

- Anderson, J.R. (1990). *Cognitive psychology and its implications*. New York: Freeman and Company.
- Bechtel, W., & Abrahamsen, A. (1991). *Connectionism and the mind*. Cambridge: Basil Blackwell Inc.
- Bereiter, C. (1985). Toward a solution of the learning paradox. *Review of Educational Research*, 55, 201-226.
- Bishop, A. (1988). *Mathematical enculturation. A cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.
- Bokhove J., Buys K., Keyzer R., Lek A., Noteboom A., & Treffers A., (1996). *De breukenbode*. Enschede: SLO, F.I., CITO.
- Borkowski, J.G. (1985). Signs of intelligence: Strategy generalization and metacognition. In S.R. Yussen (Ed.), *The growth of reflection in children* (pp. 105-145). Orlando: Academic Press Inc.
- Bruner, J. (1974). *Beyond the information given*. London: George Allen Ltd.
- Bruner, J. (1996). *The culture of education*. Cambridge: Harvard University Press.
- Carpay, J., & Oers, B. van (ter perse). A new perspective on the issue of mutual understanding in the classroom. In Y. Engström, R. Miettinen & R.L. Punamäki (Eds.), *Perspectives on activity theory*. Cambridge University Press.
- Clement, J. (1982). Algebra word problems solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 16-30.
- Cobb, P. (1994). Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher*, 23(7), 13-20.
- Cobb, P. (1997). Instructional design and reform: A plea for developmental research in context. In M.Beishuizen, K.P.E.Gravemeijer & E.C.D.M van Lieshout (Eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 273-290). Utrecht: Utrecht University, Cd-B Serie.
- Cobb, P., & Bauersfeld, H. (1995) (Eds.). *Emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cobb, P., Gravemeijer, K., Yackel, E., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Mathematizing and symbolizing: The emergence of chains of signification in one first-grade classroom. In D.Kirshner & J.A. Whitson (Eds.), *Situated cognition* (pp. 151-235). London: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind. *Mathematics Education, Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1), 2-33.
- Coplestone, F. (1985). *A history of philosophy*. (Book two), New York: Image Books.
- Davydov, V.V. (1977). De introductie van het begrip grootheid in de eerste klas van de basisschool

- (een experimenteel onderzoek). In C.F. van Pareren & J.M.C. Nelissen (red.), *Rekenen* (pp. 1-61). Groningen: Wolters-Noordhoff.
- DeLoache, J.S. (1989). The development of representation in young children. *Advances in Child Development and Behavior*, 22, 1-40.
- Dienes, Z.P. (1963). *An experimental study of mathematics learning*. London: Hutchinson.
- Dijksterhuis, E.J. (1975). *De mechanisering van het wereldbeeld*. Amsterdam: Meulenhoff.
- Doise, W., & Mugny, G. (1984). *The social development of the intellect*. Oxford: Pergamon Press.
- Dolk, M. (1997). *Onmiddellijk onderwijsgedrag*. Universiteit Utrecht: IVLOS-REEKS.
- Dretske, F. (1986). Aspects of cognitive representation. In M. Brand & R.M. Harnish (Eds.), *The representation of knowledge and belief* (pp. 101-115). Tucson, AZ.: The University of Arizona Press.
- Elbers, E. (1993). *Leren door interactie*. Groningen: Wolters Noordhoff.
- Finke, R. (1989). *Principals of mental imagery*. Cambridge: Bradford MIT-Press.
- Fodor, J.A. (1981). *Representations, philosophical essays on the foundations of cognitive science*. Sussex: The Harvester Press.
- Fogarty, R., Perkins D., & Barell, J. (1992). *How to teach for transfer?* Palatine, IRI/Skylight Training and Publishing.
- Freudenthal, H. (1979). How does reflective thinking develop? *Proceedings*. Warwick: PME-III.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gal'perin, P.Ja. (1980). *Zu Grundfragen der Psychologie*. Köln: Pahl-Rugenstein Verlag.
- Gibson, J.J. (1966). *The senses considered as perceptual systems*. Boston: Houghton-Mifflin.
- Glaserfeld, E. von (Ed.) (1991). *Radical constructivism in mathematics education*. Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Goffree, F. (1986). *Rekenen, realiteit en rationaliteit*. Enschede: SLO.
- Greeno, J.G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 170-218.
- Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: Freudenthal Institute.
- Gravemeijer, K.P.E. (1995). Het ontwikkelen van 'constructivistisch' reken-wiskundeonderwijs. *Pedagogisch Tijdschrift*, 20 (4/5), 277-292.
- Gravemeijer, K.P.E., & Nelissen, J.M.C. (1996). *Het concrete als kennisbasis in het reken-wiskundeonderwijs*. Interne publicatie, Freudenthal Instituut, Utrecht.
- Halliday, M.A.K. (1978). *Language and social semiotic. The social interpretation of language and meaning*. London: Arnold.
- Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Johnson-Laird, P.N. (1983). *Mental models*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kaput, J.J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-27). Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kilpatrick, J. (1985). Reflection and recursion. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 2-27.
- Kirshner, D. & Whitson, J.A. (Eds.) (1997). *Situated cognition*. Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kosslyn, S.M. (1978). Imagery and internal representation. In E. Rosch & B.B. Lloyd (Eds.), *Cognition and categorization* (pp. 217-258). Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kosslyn, S.M. (1994). *Image and brain, the resolution of the imagery debate*. Cambridge: The MIT Press. A Bradford Book.
- Lange, J. de (1997). Werelden van verschil. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*. 15(3), 3-13.
- Lemke, J.L. (1997). Cognition, context, and learning: A social semiotic perspective. In D. Kirshner & J.A. Whitson (Eds.), *Situated cognition* (pp. 37-57). Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Leseman, P., & Sijsling, F.F. (1996). Cooperation and instruction in practical problem-solving. Differences in interaction styles of mother-child dyads as related to social-economic background and cognitive development. *Learning and Instruction*, 4, 287-307.
- Mercer, N. (1995). *The guided construction of knowledge*. Clevedon: Multilingual Matters Ltd.
- Nelissen, J.M.C. (1992). Reflectief denken en oplossen van wiskundige problemen van basisschoolleerlingen: Een onderzoek op handelingspsychologische basis. In A. Smaling & F. van Zuuren (red.), *De praktijk van kwalitatief onderzoek* (pp. 112-128). Meppel: Boom.

- Nelissen, J.M.C. (1998). Ontluikende wiskundige vaardigheden. In A. Harpman, H. Veenker & G. Pol (red.), *Praten, denken, doen. Taal en denkstimulering van 0 tot 6-jarigen* (pp. 223-247). Alphen a/d Rijn: Samsom.
- Nelissen, J.M.C., Ruyters, M.C.P., & Hest, A.J.A van (ter perse). *Constructie, interactie en reflectie*. Utrecht: SARDES.
- Nelissen, J.M.C., & Tomic, W. (1994). Learning and thought processes in realistic mathematics instruction. *Curriculum & Teaching*, 8(1), 19-36.
- Nelissen, J.M.C., & Tomic, W. (1996). Reflection in russian educational psychology. *Educational Foundations*, 10(1), 35-57.
- Nelson, K. (1996). *Language in cognitive development*. Cambridge: University.
- Nunes, T. (1992). Ethnomathematics and everyday cognition. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-575) New York: Macmillan Publishing Company.
- Oers, B. van (1994). *Cultuuroverdracht als reconstruerende activiteit*. Paper gepresenteerd op Symposium, Amsterdam V.U.
- Palmer, S.E. (1978). Fundamental aspects of cognitive representation. In E. Rosch & B.B. Lloyd (Eds.), *Cognition and categorization* (pp. 259-303). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Perner, J. (1991). *Understanding the representational mind*. Cambridge: A Bradford Book, The MIT Press.
- Phillips, D.C. (1995). The good, the bad, and the ugly: The many faces of constructivism. *Educational Researcher*, 24(7), 5-12.
- Piaget, J. (1977). *Recherches sur l'abstraction réflé-chissante I en II*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Pimm, D. (1991). Communicating mathematically. In K. Durkin & B. Shire (Eds.), *Language in mathematical education: research and practice* (pp. 17-24). Philadelphia: Open University Press, Milton Keynes.
- Resnick, L.B., & Ford, W.W. (1981). *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sinha, C. (1988). *Language and representation. A socio-naturalistic approach to human development*. New York: University Press.
- Solomon, J. (1994). The rise and fall of constructivism. *Studies in Science Education*, 23, 1-19.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions*. Dordrecht: Publishing Company Reidel.
- Vygotskij, L.S. (1977). *Denken und Sprechen*. Frankfurt a/M: Fischer Taschenbuch Verlag.
- Walkerdine, V. (1982). From context to text: A psychometric approach to abstract thought. In M. Beveridge (Ed.), *Children thinking through language* (pp. 129-156). London: Arnold.
- Walkerdine, V. (1988). *The mastery of reason*. London: Routledge.
- Walkerdine, V. (1997). Redefining the subject in situated cognition theory. In D. Kirshner & J.A. Whitson (Eds.), *Situated cognition* (pp. 57-71). London: Lawrence Erlbaum Associates.
- Whitson, J.A. (1997). Cognition as a semiotic process: from situated mediation to critical reflective transcendence. In D. Kirshner & J.A. Whitson (Eds.), *Situated cognition* (pp. 97-151). London: Lawrence Erlbaum Associates.
- Zepp, R. (1989). *Language and mathematics education*. Hong Kong: UEA Press Ltd.

Manuscript aanvaard 9-4-1998

Auteur

J.M.C. Nelissen is verbonden aan het Schooladviescentrum te Utrecht en gedetacheerd bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht.

Adres: Schooladviescentrum, Postbus 9615, 3506 GP Utrecht

Abstract

Representations in mathematics education

J.M.C. Nelissen. Pedagogische Studiën, 1998, 75, 169-183.

In this article the construction of internal representations in the domain of mathematics education is conceived as a process of signification. In contrast, the article does not make a distinction between an externally represented world and an internally representing world as usually is done by adherents

of 'established' representation theory. Representation is looked upon as a process in which new 'signs' in a progressing and cyclic process of signification constantly emerge. As a consequence, an internal representation ('signifier') transforms and is the basis ('signified') for the construction of a new internal representation ('signifier'). Hence a person constructs internal, mental representations on the basis of internal representations.

The above-mentioned conception has consequences for the model of instruction. Teaching mathematics is not just seen as a process of transmission of knowledge. Children construct basic, internal representations which demand interactive testing. This external dialogue leads to reflection or internal dialogue. On the basis of reflection, representations develop into a higher level and, successively, these new constructions ask for a new dialogue. Higher levels of representation are attained not just on the basis of interaction, but on the basis of what interaction evokes, i.e., namely reflection. This observation suggests that in the socio-constructivist theory more attention should be paid to reflection. Taking these consequences into consideration, one can understand the process of attaining higher forms of representation better.

Finally, the article discusses the relationship between (socio)constructivism and the notion of realistic mathematics education. Although there are issues in of dispute, there are essential points of similarity between theorists: in both theories mathematization is conceived as a process of progressive signification. Meaning or 'common sense' (Freudenthal, 1991) is the beginning and the end of learning mathematics.