De lineariteitsillusie bij het oplossen van meetkundeproblemen door leerlingen van het secundair onderwijs

D. De Bock, L. Verschaffel en D. Janssens*

Samenvatting

Lineair proportionele modellen zijn ongetwijfeld één van de meest voorkomende modellen bij het representeren en oplossen van zowel zuivere als toepassingsgerichte wiskundige problemen. Volgens diverse auteurs leidt de centrale plaats die deze lineaire modellen innemen in het huidig reken/wiskundeonderwijs ertoe dat vele leerlingen de neiging ontwikkelen om deze modellen ook te gebruiken in (probleem)situaties waarin dit niet gepast is. In onderhavig artikel wordt verslag uitgebracht van twee studies over deze lineariteitsillusie bij 12-13- en bij 15-16-jarigen die geconfronteerd worden met vraagstukken over lengte en oppervlakte van gelijkvormige vlakke figuren; tevens gaan deze studies de invloed na van zelfgemaakte en aangeboden tekeningen op het optreden van deze illusie. Globaal genomen bieden de resultaten overtuigende steun voor de sterkte van de lineariteitsillusie bij deze groepen van studenten.

Inleiding

Lineair proportionele (of recht evenredige) verbanden tussen grootheden krijgen in het wiskundeonderwijs op elementair en secundair niveau bijzonder veel aandacht. Men zegt dat twee grootheden recht evenredig zijn als het enige malen groter of kleiner worden van de ene tot gevolg heeft, dat de andere evenveel malen groter of kleiner wordt. Dat dergelijke verbanden zoveel aandacht krijgen in het elementair en secundair (wiskunde)onderwijs, komt doordat voor heel wat problemen uit de zuivere en de toegepaste wiskunde lineaire functies het onderliggend wiskundig model vormen. Voorbeelden van lineair proportionele verbanden uit de (zuivere) wiskunde zijn legio: de omtrek van een cirkel is proportioneel met de straal, de grootte van een hoek is proportioneel met de bijbehorende cirkelboog. Ook tal van levensechte probleemsituaties kunnen adequaat gemodelleerd worden in termen van lineaire proportie: het aantal liter verf nodig om een egaal oppervlak te schilderen is proportioneel met de oppervlakte ervan; het volume en het gewicht van een bepaalde vloeistof zijn proportioneel.

De toenemende vertrouwdheid van leerlingen en studenten met deze lineaire modellen heeft echter ook een keerzijde: dit kan er namelijk toe leiden dat leerlingen de misvatting ontwikkelen dat deze lineaire modellen een universele toepasbaarheid hebben, waardoor zij geneigd zijn deze modellen ook te gaan gebruiken in (probleem)situaties waarvoor ze in het geheel niet gelden. Dit fenomeen wordt aangeduid als *de lineariteitsillusie*. In onderhavig artikel rapporteren we twee studies over deze illusie in één bepaald toepassingsgebied, nl. vraagstukken over lengte en oppervlakte van gelijkvormige vlakke figuren.

Het principe dat aan de basis ligt van dit soort toepassingsopgaven is bekend: een vergroting of verkleining met factor r vermenigvuldigt lengtes met factor r, oppervlaktes met factor r^2 en inhouden met factor r^3. Bijvoorbeeld: wanneer men de straal van een bol verdubbelt, verdubbelt de omtrek van elke cirkel op het boloppervlak, verviervoudigt de boloppervlakte en verachtvoudigt het bolvolume. Bij halvering van de straal, halveert de omtrek van elke cirkel, wordt de boloppervlakte door vier en het bolvolume door acht gedeeld. Essentieel hierbij is dat deze factoren niet afhangen van de specifieke figuur waarover sprake is in de opgave (d.w.z. of het nu om een vierkant, een cirkel of een onregelmatige

* De auteurs danken R. Stroobants, E. Ratinckx en G. Van Vaerenbergh voor hulp bij de (statistische) verwerking van de onderzoeksgegevens.

figuur gaat) maar enkel van de grootheden in kwestie (d.w.z. lengte, oppervlakte of volume). Hoewel in de literatuur regelmatig melding gemaakt wordt van het ongeoorloofd toepassen van een lineair proportioneel model bij het vergroten en verkleinen van figuren, werd – voorzover ons bekend – hierover nauwelijks systematisch empirisch onderzoek verricht. Mede daardoor lopen de meningen over de ernst en de hardnekkigheid van deze misvatting sterk uiteen (National Council of Teachers of Mathematics, 1989; Streefland, 1984; Treffers, 1987).

Studie 1

Onderzoeksopzet en -materiaal

Het eerste onderzoek werd uitgevoerd in het begin van het schooljaar 1995-1996 in het eerste leerjaar algemeen secundair onderwijs van een Vlaams lyceum dat haar leerlingen rekruteert uit een brede waaier van nabijgelegen basisscholen.

Aan het onderzoek participeerden 120 leerlingen, verdeeld in drie groepen (Groep I, II en III met resp. 40, 42 en 38 leerlingen). Elke groep bestond uit twee intacte klassen, één uit de 'Moderne' afdeling (met zes wekelijkse lestijden wiskunde) en één uit de 'Latijnse' afdeling (met vier wekelijkse lestijden wiskunde).

Het onderzoek bestond uit twee fasen. In een eerste fase lieten we alle 120 leerlingen – zonder speciale voorafgaande aanwijzingen of instructies – dezelfde schriftelijke toets oplossen bestaande uit 12 experimentele items (Toets 1). Deze 12 experimentele items hadden alle betrekking op schaalvergroting van vlakke figuren en werden geconstrueerd rond drie verschillende soorten figuren: 4 items hadden betrekking op vierkante (V), 4 op cirkelvormige (C) en 4 op grillige figuren (G). Per categorie waren er telkens 2 proportionele items en 2 niet-proportionele items. In Tabel 1 geven we een voorbeeld van één proportioneel en één niet-proportioneel item voor elk van de drie soorten figuren uit Toets 1.

Tenslotte werd bij elk van de drie catego-

Tabel 1
Voorbeelden van experimentele items

Schaalvergroting van een vierkantige figuur
Proportioneel item:
Om een gracht te graven rond een vierkant stuk weiland met zijde 100 m, heeft boer Gust ongeveer 4 dagen nodig. Hoeveel dagen zal hij ongeveer nodig hebben om een gracht te graven rond een vierkant stuk weiland met zijde 300 m? *(Antwoord: 12 dagen)*
Niet-proportioneel item:
Om een vierkant stuk grond met zijde 200 m te bemesten, heeft boer Karel ongeveer 8 uur nodig. Hoeveel uur zal hij ongeveer nodig hebben om een vierkant stuk grond met zijde 600 m te bemesten? *(Antwoord: 72 uur)*

Schaalvergroting van een cirkelvormige figuur
Proportioneel item:
Om met een zeilschip rond een cirkelvormig eiland met een diameter van 70 km te varen, heb je ongeveer 6 uur nodig. Hoeveel uur heb je ongeveer nodig om rond een cirkelvormig eiland met een diameter van 140 km te varen? *(Antwoord: 12 uur)*
Niet-proportioneel item:
Om een cirkelvormig bloemenperkje met een diameter van 10 m aan te leggen, heb je ongeveer 400 gram bloemenzaad nodig. Hoeveel gram bloemenzaad heb je ongeveer nodig om een cirkelvormig bloemenperkje met een diameter van 20 m aan te leggen? *(Antwoord: 1600 gram)*

Schaalvergroting van een grillige figuur
Proportioneel item:
Op een landkaart van België in een atlas meet de afstand Genk-Leuven ongeveer 5 cm en de afstand Genk-Gent ongeveer 11 cm. Op een landkaart van België die vooraan in de klas hangt, meet de afstand Genk-Leuven ongeveer 20 cm. Hoeveel meet de afstand Genk-Gent op deze landkaart? *(Antwoord: 44 cm)*
Niet-proportioneel item:
Op een landkaart van België in een atlas meet de afstand Genk-Tongeren ongeveer 2 cm en is de oppervlakte van België ongeveer 250 cm². Op een landkaart van België die vooraan in de klas hangt, meet de afstand Genk-Tongeren ongeveer 6 cm. Hoe groot is de oppervlakte van België op deze landkaart? *(Antwoord: 2250 cm²)*

rieën van figuren (V, C en G) ook nog één bufferitem (rond een andere bewerking) geconstrueerd. Om spieken te voorkomen en om volgorde-effecten te kunnen neutraliseren, werden de items in twee (inverse) volgorden aangeboden. Op de antwoordbladen was er niet enkel plaats voorzien voor het antwoord, maar ook voor het maken van bewerkingen, bedenkingen, tekeningen, enz.

Twee weken na de eerste toetsafname werden de drie groepen van leerlingen geconfronteerd met een tweede toets (Toets 2), die een parallelversie van Toets 1 was. Groep I, die fungeerde als controlegroep, kreeg – net zoals tijdens de eerste toetsafname – geen verdere instructies of hulp. De leerlingen van Groep II kregen de instructie om een schets of tekening te maken alvorens de oplossing neer te schrijven. Deze aanbeveling werd bij de aanvang van de toets gedaan en verduidelijkt aan de hand van een voorbeeld-item, – uiteraard *geen* niet-proportionele opgave. De leerlingen van Groep III tenslotte kregen bij elk item een correcte tekening aangeboden. Bij wijze van voorbeeld geven wij in Figuur 1 de tekening die hoort bij het niet-proportioneel item rond 'vierkanten' uit Tabel 1.

Hypothesen

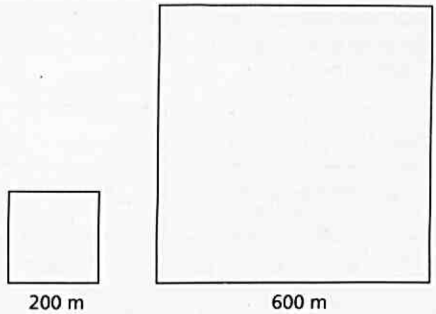
Ten eerste verwachtten we, op basis van de beschikbare literatuur (Berté, 1993; Freudenthal, 1983; NCTM, 1989; Rogalski, 1982; Rouche, 1992), dat de overgrote meerderheid van de leerlingen sterk zou 'lijden' onder de lineariteitsillusie. Dit impliceert dat we voor de 6 niet-proportionele items zeer weinig, en voor de 6 proportionele items zeer veel correcte antwoorden voorspelden.

Ten tweede veronderstelden we dat een schets of tekening van de probleemsituatie een positieve invloed zou uitoefenen op de prestaties van de leerlingen, in het bijzonder voor wat betreft de niet-proportionele items. De argumentatie daarvoor is dat de kans op het doorbreken van de lineariteitsillusie – en dus op het geven van het juiste antwoord – door zo'n schets of tekening toeneemt. Immers, door aan leerlingen te vragen *zelf een tekening te maken* worden zij a.h.w. gedwongen tot het construeren van een eigen (mentale) representatie van de essentiële elementen en relaties in de probleemsituatie (Pólya, 1945; Schoenfeld, 1992). Bij de niet-proportionele items zal dit ertoe leiden dat zij de onjuistheid van een stereotiepe, lineair proportionele redenering inzien en tevens de precieze aard van het niet-lineaire verband tussen de gegeven en de gevraagde grootheid ontdekken. Tevens gingen we ervan uit dat *het aanreiken van een juiste tekening* de kans op het ontdekken van de niet-lineariteit van het verband – en dus op het vinden van het juiste antwoord – nog sterker zal verhogen dan enkel de suggestie tot het maken van een bijpassende tekening. De reden hiervoor is dat niet alle leerlingen die als instructie krijgen om een tekening te maken, erin zullen slagen om een *correcte, bruikbare* tekening te produceren. Uitgaande van deze hypothesen werden de volgende voorspellingen gemaakt: in Groep I zullen de resultaten van beide toetsafnamen

Opgave:

Om een vierkant stuk grond met zijde 200 m te bemesten, heeft boer Karel ongeveer 8 uur nodig. Hoeveel uur zal hij ongeveer nodig hebben om een vierkant stuk grond met zijde 600 m te bemesten?

Tekening:



Figuur 1. Voorbeeld van een item zoals aangeboden in Groep III

(Toets 1 en Toets 2) nagenoeg identiek zijn; in Groep II zal er beter gepresteerd worden op Toets 2 dan op Toets 1, en in Groep III tenslotte zal de toename van het aantal correcte antwoorden nog sterker zijn dan in Groep II. Bovendien voorspelden we dat de verwachte stijgingen in Groep II en III hoofdzakelijk het gevolg zouden zijn van een daling van het aantal fouten gebaseerd op een lineair proportionele redenering bij de niet-lineaire items.

Ten derde verwachtten we een effect van de aard van de figuur waarover in het vraagstuk sprake is, op het aantal correcte antwoorden – met name op de niet-proportionele items – en wel in die zin dat de meeste correcte oplossingen gegeven zouden worden op de niet-proportionele opgaven rond vierkante figuren (V-items) en het minst bij de items met grillige figuren (G-items). Onze argumentatie voor de derde hypothese luidt als volgt. Voor de niet-proportionele items rond vierkanten (de V-items) bestaan er drie adequate oplossingsstrategieën: (1) het grote vierkant a.h.w. 'betegelen' met kleine vierkantjes, (2) van beide vierkanten de oppervlakte berekenen met behulp van een meetkundige formule ('oppervlakte vierkant = zijde maal zijde'), (3) het algemeen principe 'als de lengte (zijde) maal r, dan de oppervlakte maal r^2' toepassen. Voor cirkels (de C-variant) is de eerste strategie (nl. een exacte betegeling) onmogelijk en wordt ook de tweede strategie moeilijker (omwille van de grotere complexiteit van en de geringe vertrouwdheid van de leerlingen met de betreffende formule). Voor grillige figuren (de G-variant) tenslotte valt ook de tweede oplossingsmethode weg (er bestaat immers geen formule) en kan men dus enkel nog terugvallen op de derde methode, nl. het algemeen principe toepassen.

Analyse

De antwoorden van de leerlingen op de proportionele en op de niet-proportionele items werden geanalyseerd aan de hand van een analyseschema bestaande uit meerdere categorieën. Maar omdat vrijwel alle fouten toe te schrijven zijn aan een verkeerdelijk toegepaste lineair proportionele redenering, zal hierna enkel gebruik gemaakt worden van het onderscheid tussen 'correcte' en 'incorrecte' antwoorden (zie De Bock, Verschaffel & Janssens, 1996).

De toetsing van de hypothesen geschiedde aan de hand van een variantie-analyse met als onafhankelijke variabelen de between-variabele 'Groep' (Groep I, II en III) en de within-variabelen 'Toets' (Toets 1 versus Toets 2), 'Proportionaliteit' (proportionele versus niet-proportionele items) en 'Figuur' (vierkante, cirkelvormige en grillige figuren). Het aantal 'Correcte antwoorden' fungeerde in de analyse als afhankelijke variabele. Significante hoofd- en interactie-effecten werden achteraf verder onderzocht met behulp van a posteriori LSD-tests.

Resultaten

Tabel 2 geeft een overzicht van het percentage correcte antwoorden voor de drie groepen van leerlingen (I, II en III) voor de proportionele en de niet-proportionele items over vierkanten (V), cirkels (C) en grillige figuren (G) in Toets 1 en Toets 2.

De eerste hypothese werd door deze onderzoeksresultaten op overtuigende wijze bevestigd. De variantie-analyse bracht een zeer sterk hoofdeffect van de taakvariabele 'Proportionaliteit' aan het licht ($F(1,117) = 4994.915$; $MSE = .233446$; $p < .01$): voor de drie groepen en de twee toetsen samen, bedroegen de percentages correcte antwoorden op de proportionele en

Tabel 2

Percentage correcte antwoorden in de drie groepen 12-13-jarigen op de verschillende soorten proportionele en niet-proportionele items tijdens Toets 1 en 2

	Toets 1						Toets 2					
	Proportionele items			Niet-proportionele items			Proportionele items			Niet-proportionele items		
	V	C	G	V	C	G	V	C	G	V	C	G
I	96	98	89	5	0	1	99	96	85	3	0	0
II	93	95	89	6	1	0	93	95	95	4	2	0
III	91	91	87	4	3	0	93	89	89	8	5	1

niet-proportionele items respectievelijk 92% en 2%. Dit betekent dat de proportionele items door deze 12-13-jarigen bijna altijd juist opgelost werden, terwijl de niet-proportionele items zelden of nooit correct beantwoord werden.

De tweede hypothese in verband met de verwachte positieve invloed van tekeningen op de prestaties van de leerlingen, werd niet bevestigd. De variantie-analyse bracht noch een significant 'Groep × Toets' interactie-effect aan het licht, noch een significant 'Groep × Toets × Proportionaliteit' interactie-effect: in geen van de drie groepen nam het percentage correcte antwoorden tussen beide toetsafnamen op significante wijze toe, noch in het algemeen, noch in het bijzonder voor wat betreft de niet-proportionele items. Blijkbaar was noch de instructie om een tekening te maken (Groep II), noch het aanbieden van een tekening (Groep III) sterk genoeg om tegenwicht te bieden aan het overweldigend effect van de lineariteitsillusie bij deze 12-13-jarigen.

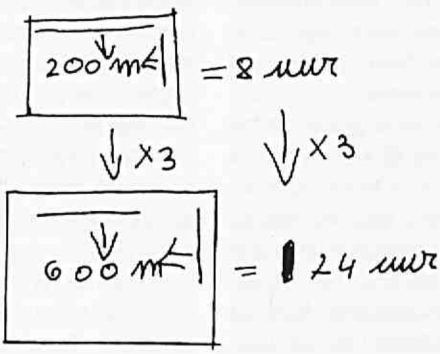
Zoals voorspeld op basis van de derde hypothese, had de aard van de figuur een significante invloed op het percentage juiste antwoorden. Uit de variantie-analyse kwam een significant hoofdeffect voor deze taakvariabele naar voren ($F(2{,}234) = 12.963$; $MSE = 0.086106$; $p < .01$). De totale percentages correcte antwoorden voor de V-, C- en G-items lagen in de verwachte richting, nl. respectievelijk 49%, 48% en 45%, maar aanvullende LSD-tests wezen uit dat enkel het verschil tussen de V- en de G-items en tussen de C- en de G-items significant was (telkens op het 1% niveau). Er werd ook geen interactie-effect gevonden tussen de taakvariabelen 'Proportionaliteit' en 'Figuur'. Dit betekent dat het hoofdeffect van de aard van de figuur zich in dezelfde mate manifesteerde bij de proportionele en bij de niet-proportionele items.

Aanvullend bij de resultaten met betrekking

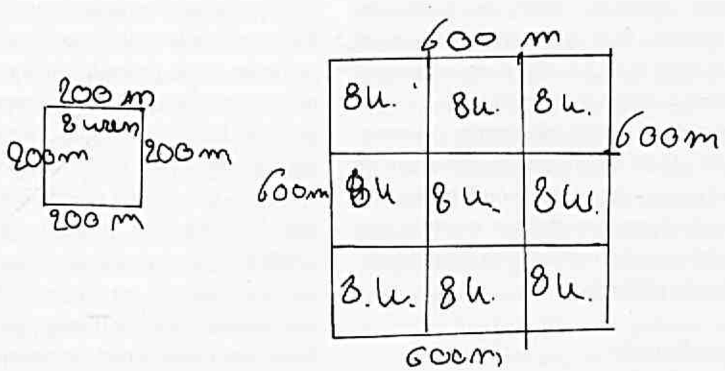
Opgave:

Om een vierkant stuk grond met zijde 200 m te bemesten, heeft boer Karel ongeveer 8 uur nodig. Hoeveel uur zal hij ongeveer nodig hebben om een vierkant stuk grond met zijde 600 m te bemesten? *(Antwoord: 72 uur)*

Tekening 1:



Tekening 2:



Figuur 2. Twee voorbeelden van zelfgemaakte tekeningen bij het niet-proportioneel item rond vierkanten uit Tabel 1

tot de drie hypothesen, vermelden we ook nog enkele markante bevindingen die gebaseerd zijn op een kwalitatieve analyse van de leerlingnotities.

Ten eerste analyseerden we alle notities van de leerlingen van Groep I, II en III bij de niet-proportionele items uit Toets 1. Deze analyse bracht aan het licht dat – voor de drie groepen samen – slechts bij 2% van de niet-proportionele items uit Toets 1 een tekening werd aangetroffen. De leerlingen maakten dus zelden of nooit *spontaan* een schets of tekening als onderdeel van hun oplossingsproces van de niet-proportionele items.

Uit de analyse van de notities van de leerlingen van Groep II bij Toets 2 bleek verder dat de expliciete instructie om een tekening te maken slechts bij 46% van de niet-proportionele items was opgevolgd. Daarenboven produceerden de leerlingen die de instructie wel opvolgden meestal een tekening van gebrekkige kwaliteit (voor een voorbeeld van een zelfgemaakte tekening zonder en met een goede voorstellingswaarde, zie resp. tekening 1 en 2 uit Figuur 2). Vermoedelijk beschouwden de leerlingen het maken van een (goede) tekening als puur tijdverlies omdat zij het 'problematisch' karakter van de niet-proportionele opgaven in het geheel niet doorhadden. Deels verklaart dit het geringe effect van de instructie.

Ten derde gingen we in de antwoordbladen van de leerlingen van Groep III bij Toets 2 na of zij de gegeven tekeningen op de een of andere manier hadden 'bewerkt'; elke aanduiding op de gegeven tekening – hoe minimaal of hoe rudimentair ook – werd als een 'bewerking' gescoord. Deze analyse bracht aan het licht dat slechts 6% van de tekeningen bij de niet-proportionele opgaven door de leerlingen 'bewerkt' werden. Ook dit gegeven suggereert dat de leerlingen over het algemeen weinig of geen aandacht besteedden aan of gebruik maakten van de gegeven tekeningen (vermoedelijk omdat zij de moeilijkheidsgraad van de niet-proportionele items sterk onderschatten). Dit zou mede kunnen verklaren waarom ook het verwachte positieve effect van de aangeboden tekeningen uitbleef.

Conclusie en discussie

De eerste studie leverde overtuigende steun voor de basishypothese dat de lineariteitsillusie een heel sterke rol speelt bij 12-13-jarige leerlingen die geconfronteerd worden met toepassingsopgaven over lengte en oppervlakte van gelijkvormige figuren. Het uitermate geringe aantal correcte antwoorden van deze 12-13-jarigen op de niet-proportionele items roept evenwel onmiddellijk de vraag op hoe sterk deze illusie nog zou zijn bij leerlingen die ouder zijn en over een veel grotere 'vakinhoudelijke bagage' beschikken om deze illusie te overwinnen. Daarom werd het eerste onderzoek hernomen bij een groep 15-16-jarigen.

Studie 2

Onderzoeksopzet en -materiaal

Het tweede onderzoek werd uitgevoerd op het einde van het schooljaar 1995-1996 in hetzelfde lyceum van de eerste studie. Alle 222 leerlingen van het vierde leerjaar van deze secundaire school namen eraan deel. Deze leerlingen volgden een brede waaier van studierichtingen van het algemeen secundair onderwijs.

Op basis van een aantal beschikbare gegevens over de leerlingen werden zij direct in drie gelijkwaardige groepen ingedeeld: Groep I (waarin de leerlingen geen speciale aanwijzingen of hulp kregen), Groep II (waarin de leerlingen de instructie kregen om telkens eerst een tekening te maken) en Groep III (waarin bij elk item een correcte tekening werd aangeboden). Voor een gedetailleerde beschrijving van de drie groepen zie De Bock, Verschaffel en Janssens, 1996.

Voor het vervolgonderzoek werden dezelfde 12 experimentele items gebruikt als in studie 1 (zie Tabel 1). Ook de wijze waarop de toets werd afgenomen, de vormgeving van de antwoordbladen, de scoringswijze van de antwoorden en de procedure voor de data-analyse bleven onveranderd. De voorspellingen die aan de basis lagen van studie 2 waren dezelfde als die van de eerste studie. Alleen veronderstelden we – in verband met de eerste hypothese – dat 15-16-jarigen globaal genomen minder zouden 'lijden' onder de lineariteitsillusie dan de 12-13-jarigen, en dus betere resultaten zouden behalen op de niet-proportionele items. Men mag immers niet vergeten dat het leerplan wiskunde voor het derde en vierde jaar van het secundair onderwijs ruimschoots aandacht besteedt aan kennis en vaardigheden behulpzaam voor het oplossen van dit soort toepassingsopgaven (verkenning van de meetkunde van het vlak, studie van niet-lineaire verbanden, ...).

Resultaten

Tabel 3 geeft een overzicht van het percentage correcte antwoorden voor de drie groepen van 15-16-jarigen (I, II en III) voor de proportionele en de niet-proportionele items over vierkanten (V), cirkels (C) en grillige figuren (G).

Tabel 3

Percentage correcte antwoorden in de drie groepen 15-16-jarigen op de verschillende soorten proportionele en niet-proportionele items

	Proportionele items			Niet-proportionele items		
	V	C	G	V	C	G
I	91	97	97	26	11	1
II	89	91	97	26	20	5
III	89	93	97	39	21	7

De eerste hypothese werd bevestigd. Een variantie-analyse bracht wederom een zeer sterk hoofdeffect van de taakvariabele 'Proportionaliteit' aan het licht ($F(1,219) = 1591.635$; $MSE = .484985$; $p < .01$): voor de drie groepen samen bedroegen de percentages van correcte antwoorden op de proportionele en de niet-proportionele items resp. 93% en 17% (te vergelijken met resp. 92% en 2% in studie 1). Een variantie-analyse waarin de resultaten van studie 1 en 2 te zamen betrokken werden, bracht – zoals verwacht – een significant interactie-effect aan het licht tussen de factoren 'Leeftijd' en 'Proportionaliteit' ($F(1,340) = 25.334$; $MSE = .362244$; $p < .01$): enkel de stijging van het aantal correcte antwoorden op de niet-proportionele items van het eerste naar het vierde jaar was significant (op het 1% niveau).

De hypothese over de verwachte positieve invloed van de tekeningen werd wederom niet bevestigd. De globale percentages correcte antwoorden voor de groepen I, II, en III lagen weliswaar in de verwachte richting – nl. respectievelijk 54%, 55% en 58% –, maar de onderlinge verschillen waren opnieuw te klein om een significant hoofdeffect op te leveren van de variabele 'Groep'.

Zoals voorspeld in de derde hypothese en overeenkomstig de resultaten van de eerste studie, was de aard van de figuur wel van belang. De variantie-analyse bracht immers een significant hoofdeffect voor deze taakvariabele aan het licht ($F(2,438) = 24.667$; $MSE = .157318$; $p < .01$). De globale percentages correcte antwoorden voor de V-, C- en G-items lagen in de verwachte richting (resp. 60%, 56% en 51%), en uit aanvullende LSD-tests bleek dat alle onderlinge verschillen significant waren (op het 1% niveau). Bovendien werd er een interactie-effect gevonden tussen de taakvariabelen 'Proportionaliteit' en 'Figuur' ($F(2,438) = 69.574$; $MSE = .179697$; $p < .01$). De percentages correcte antwoorden op de niet-proportionele items lagen in de verwachte richting (resp. 30%, 17% en 4% voor de V-, C- en G-items), terwijl we – enigszins tot onze verrassing – vaststelden dat de percentages van correcte antwoorden op de proportionele items helemaal in de omgekeerde richting gingen (resp. 90%, 94% en 97% voor de V-, C- en G-items). Aanvullende LSD-tests brachten aan het licht dat voor de niet-proportionele items alle onderlinge verschillen significant waren (op het 1% niveau), terwijl bij de proportionele items enkel het verschil tussen de V- en de G-items en tussen de V- en de C-items significant was (op het 1%, resp. 5% niveau). Het vastgestelde hoofdeffect van de aard van de figuur was dus uitsluitend te wijten aan de geconstateerde verschillen bij de niet-proportionele items.

Aanvullend beschrijven we – zoals bij studie 1 – enkele bijkomende onderzoeksgegevens in verband met het gebruik van tekeningen in het oplossingsproces van de niet-proportionele items. Door het groter aantal zelfgemaakte en/of bewerkte tekeningen bij en correcte antwoorden op de niet-proportionele items in studie 2 was het mogelijk om na te gaan in hoeverre er een rechtstreeks verband was tussen tekening en antwoord en toetsten we de (on)afhankelijkheid van beide variabelen met behulp van een χ^2-toets. Uit de χ^2-toetsen bleek dat de nulhypothese in de drie groepen kon worden verworpen (op een significantieniveau van 1%). Hieruit blijkt dus dat zowel het (al dan niet spontaan) maken van een tekening als het effectief gebruik maken van een gegeven tekening de kans verhogen op het ontdekken van de onjuistheid van een stereotiepe, lineair proportionele redenering bij een niet-proportioneel item en bijgevolg ook op het vinden van de correcte oplossing. Anderzijds blijkt uit deze analyse ook dat men het effect daarvan ook niet moet overschatten: het maken of gebruiken van een tekening zorgt er in geen geval voor dat men de juiste oplossing *gegarandeerd* vindt.

Doordat de 15-16-jarigen al wat meer correcte antwoorden gaven op de niet-proportionele items, was het ook mogelijk om via de analyse van de leerlingnotities te onderzoeken welke van de drie eerder beschreven oplossingswegen – de methode van het 'betegelen', de weg van het gebruiken en uitrekenen van de meetkundige formule of het toepassen van het algemene principe – door de leerlingen het meest gevolgd werd. Vastgesteld werd dat het toepassen van de relevante meetkundige formule veruit de meest gebruikte aanpakstrategie was. Voor het niet-proportioneel item rond een vierkante figuur uit Tabel 1 betekent dit de oppervlakte van beide vierkanten effectief berekenen ($200 \times 200 = 40\ 000\ m^2$ en $600 \times 600 = 360\ 000\ m^2$) en vervolgens de uitkomst bepalen van de deling 360 000 : 40 000, nl. 9. Negentig procent van de leerlingen die dit item correct beantwoordden, pasten deze tweede oplossingsvariant toe (soms in combinatie met één van de andere methoden); 'zuivere' toepassingen van de eerste en de derde oplossingsmethode troffen we slechts in respectievelijk 7% en 3% van de gevallen aan. Vooral het geringe aandeel van de – hier toch voor de hand liggende – betegelingsstrategie was verrassend. Eigenlijk is 'betegelen' een zeer eenvoudige, context-gebonden strategie, waarvoor in feite weinig of geen 'schoolse' wiskundekennis vereist is. Dat zo weinig leerlingen van deze voor de hand liggende informele strategie gebruik maakten, houdt wellicht verband met het in tal van onderzoeken vastgestelde denkbeeld ('belief') bij vele leerlingen en studenten dat het oplossen van een wiskundig probleem vooral een kwestie is van het vinden en toepassen van de juiste formule (Schoenfeld, 1992; Verschaffel & De Corte, in press).

Discussie

De enorm sterke negatieve invloed van de lineariteitsillusie op het oplossen van toepassingsopgaven over lengte en oppervlakte van gelijkvormige vlakke figuren, komt als belangrijkste conclusie uit dit onderzoek naar voren. Bij de 12-13-jarigen was het effect van deze illusie ronduit overweldigend, maar ook 15-16-jarigen bleken er nog in zeer sterke mate door te worden beïnvloed. Bij geen van beide groepen studenten was er een effect van zelfgemaakte of aangeboden tekeningen, al gaven de resultaten bij de 15-16-jarigen wel aan dat het *effectief* (gebruik) maken van een tekening de kans op het vinden van de juiste oplossing bij dit soort vraagstukken verhoogt. De vraag of de gevonden sterkte van de lineariteitsillusie typisch is voor vraagstukken rond gelijkvormige meetkundige figuren dan wel bij andersoortige toepassingsopgaven even sterk is, kan op basis van de twee gerapporteerde studies uiteraard niet beantwoord worden. Daarvoor is verder onderzoek vereist waarin de relatieve sterkte van de lineariteitsillusie nagegaan wordt bij verschillende categorieën van probleemsituaties.

Het foutief denkproces dat bij de leerlingen tot de foutieve antwoorden op de niet-proportionele items heeft geleid, is eenvoudig te omschrijven: deze leerlingen volgden een lineair proportionele redenering in probleemsituaties waarvoor dit ongepast was. Dit brengt ons echter bij de vraag welke aspecten van of elementen uit de kennisbasis van deze leerlingen leidden tot deze verkeerde denkweg. Waarschijnlijk gaat het om meerdere, sterk aan elkaar gerelateerde elementen zoals: (1) tekorten in de vakinhoudelijke conceptuele kennisbasis van de leerlingen (zoals hun gebrekkige kennis van het begrip 'recht evenredigheid'), (2) gebrekkige beheersing van waardevolle heuristieken (zoals het maken van een aanschouwelijke voorstelling van de probleemsituatie in de vorm van een schets of tekening), (3) ontoereikende metacognitieve vaardigheden (zoals de vaardigheid in het vooraf plannen en het achteraf controleren van de 'uitvoerende handelingen') en (4) allerlei inadequate denkbeelden ('beliefs') in verband met het oplossen van wiskundige problemen (zoals het denkbeeld dat het oplossen van een vraagstuk nooit meer dan een paar minuten in beslag neemt, of de opvatting dat het oplossen van een vraagstuk altijd neerkomt op het toepassen van een gekende formule) (zie Verschaffel & De Corte, in press). In de toekomst zullen we trachten om – o.a. via individuele interviews – een duidelijker beeld te krijgen van de bijdrage van en wisselwerking tussen al deze kennisaspecten in het tot stand komen van het beschreven foutieve denkproces van de leerlingen bij niet-proportionele opgaven.

Een volgende vraag voor verder onderzoek is welke aspecten van het huidige wiskundeonderwijs mede verantwoordelijk zijn voor het ontstaan en de ontwikkeling van de lineariteitsillusie bij leerlingen. Een plausibele verklaring hiervoor is dat het wiskundeonderwijs te eenzijdig de aandacht richt op rekentechnische aspecten en stereotiepe voorstellingswijzen van proportionele relaties, terwijl de geschiktheid van een lineair model voor een gegeven probleemsituatie (bijv. in concurrentie met andere wiskundige modellen) maar zelden het voorwerp van reflectie en discussie uitmaakt (Greer, 1993; Verschaffel & De Corte, 1996). Doch ook dit dient nader onderzocht te worden in constaterend onderzoek waarin de prestaties en moeilijkheden van leerlingen uitdrukkelijker gerelateerd worden aan kenmerken van het wiskundeonderwijs dat ze tot dan toe gevolgd hebben.

Tenslotte rijst de zeer belangrijke vraag hoe men leerlingen beter dan thans het geval is kan behoeden voor en/of wapenen tegen de valstrik van de lineariteitsillusie, zowel in het algemeen als in het bijzonder bij problemen over lengte en oppervlakte van gelijkvormige vlakke figuren. Met het oog op het beantwoorden van deze vraag zal er gewerkt moeten worden aan de ontwikkeling en evaluatie van nieuw instructiemateriaal. In dit materiaal zal in elk geval ruimschoots aandacht moeten worden besteed aan het leren wiskundig modelleren, d.w.z. aan het opstellen en het in vraag stellen van een wiskundig model voor een gegeven situatie; ook de interpretatie van de uitkomsten in het licht van een toegepast model zal daarbij een belangrijk aandachtspunt moeten vormen (Greer, 1993; Verschaffel & De Corte, 1996). Waardevolle bouwstenen daarvoor zijn te vinden in een aantal oudere en meer recente vakdidactische publicaties (zie bijv. Feys, 1995; Groupe d'Enseignement Mathématique, 1994; NCTM, 1994; Streefland, 1984; Treffers, 1987).

Literatuur

Berté, A. (1993). *Mathématique dynamique*. Paris: Nathan.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1996). *De lineariteitsillusie: een exploratief onderzoek*. (Intern rapport). Leuven: Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie/Departement Didactiek, K.U.Leuven.

Feys, R. (1995). Meten en metend rekenen. In L. Verschaffel & E. De Corte (Eds.), *Naar een nieuwe reken/wiskundedidactiek voor de basisschool en de basiseducatie. Deel 3: Verder bouwen aan gecijferdheid* (pp. 99-135). Brussel/Leuven: Studiecentrum Open Hoger Onderwijs (StOHO)/ Acco.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Greer, B. (1993). The modeling perspective on wor(l)d problems. *Journal of Mathematical Behavior, 12*, 239-250.

Groupe d'Enseignement Mathématique (1994). *De question en question. Mathématiques 2*. Brussel: Didier Hatier.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics addenda series Grades 5-8. Understanding rational numbers and proportions*. Reston, VA: NCTM.

Pólya, G. (1945; 2nd edition, 1957). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Rogalski, J. (1982). Acquisition de notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales (longueur, surface). *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3*(3), 343-396.

Rouche, N. (1992). *Le sens de la mesure*. Brussel: Didier Hatier.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Streefland, L. (1984). The design of a mathematics course. A theoretical reflection. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 109-135.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction. The Wiskobas project*. Dordrecht: Reidel.

Verschaffel, L., & Corte, E. De (1996). Leren realistisch modelleren en interpreteren van vraagstukken. Een exploratief onderwijsexperiment bij leerlingen van de bovenbouw van de basisschool. *Pedagogische Studiën, 73*, 322-337.

Verschaffel, L., & Corte, E. De (in press). Word problems. A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *How do children learn mathematics?* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Manuscript aanvaard 22-5-1997

Auteurs

D. De Bock doceert wiskunde aan de Economische Hogeschool Sint-Aloysius (EHSAL) te Brussel en is Wetenschappelijk Medewerker aan de Faculteit Psychologie en Pedagogische Wetenschappen van de Katholieke Universiteit Leuven.

L. Verschaffel is Onderzoeksleider bij het Nationaal Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek en Hoogleraar (deeltijds) aan de Faculteit Psychologie en Pedagogische Wetenschappen van de Katholieke Universiteit Leuven.

D. Janssens is Docent aan de Faculteit Wetenschappen en verantwoordelijke voor de Lerarenopleiding Wiskunde van de Katholieke Universiteit Leuven.

Adres: K.U.Leuven, Faculteit Psychologie en Pedagogische Wetenschappen, Afdeling Didactiek, Vesaliusstraat 2, B-3000 Leuven

Abstract

The linearity illusion in secondary school students' solutions of geometry problems

D. De Bock, L. Verschaffel & D. Janssens. Pedagogische Studiën, 1997, 74, 261-270.

Linear (proportional) functions are undoubtedly one of the most common models for representing and solving both pure and applied problems in elementary mathematics education. But according to several authors, several aspects of the current culture and practice of school mathematics develop in students a tendency to use these linear models also in situations wherein they are not applicable. This article reports two ascertaining studies about the occurrence of this 'illusion of linearity' in 12-13- and 15-16-years-old students' working on word problems involving lengths and areas of similar plane figures of different kinds of shapes, as well as about the influence of drawings in breaking the linearity illusion for that kind of geometrical problems. Generally speaking, the results provide a convincing demonstration of the omnipresence and the strength of the illusion of linearity among these students.