

Leren realistisch modelleren en interpreteren van vraagstukken. Een exploratief onderwijsexperiment bij leerlingen van de bovenbouw van de basisschool

L. Verschaffel en E. De Corte*

Samenvatting

Recent onderzoek heeft aangetoond dat leerlingen uit de bovenbouw van de basisschool een sterke neiging hebben om hun ervaringskennis omtrent de concrete, reële situatie of context waarop een rekenvraagstuk betrekking heeft te negeren tijdens het oplossingsproces. In onderhavig onderwijsexperiment werd nagegaan of het mogelijk is om betekenisvolle positieve leer-effecten te bereiken op het vlak van het realistisch modelleren en interpreteren van wiskundige toepassingsproblemen. Daartoe werden leerlingen ondergedompeld in een onderwijsleeromgeving waarin vraagstukken juist opgevat werden als oefeningen in realistisch modelleren en interpreteren, eerder dan als oefenstof voor het indrillen van stereotiepe, formele rekenoperaties. De leergang werd uitgevoerd in een vijfde leerjaar van een Vlaamse basisschool en bestond uit vijf leereenheden van ongeveer 2,5 uur verspreid over 2,5 weken. Intussen volgden de leerlingen van twee controlegroepen gewoon reken/wiskundeonderwijs. Naast specifieke leerresultaten, peilden de toetsen naar transfer en retentie van het geleerde. De onder-

zoeksresultaten leveren steun voor de hypothese dat het inderdaad mogelijk is om de dispositie tot realistisch modelleren en interpreteren van leerlingen uit de bovenbouw van de basisschool op betekenisvolle en positieve wijze te beïnvloeden.

1 Inleiding

Vraagstukken vormen een belangrijk onderdeel van het reken/wiskundeprogramma van de basisschool. Eén van de voornaamste redenen om dit soort van problemen in de reken/wiskundelessen in te schakelen, is ervoor te zorgen dat de leerlingen de wiskundige begrippen en rekentechnieken die ze tijdens deze lessen verworven hebben, kunnen toepassen in levens-echte of levensnabije (probleem)situaties (De Corte & Verschaffel, 1989; Treffers & De Moor, 1990; Verschaffel & Gravemeijer, 1990). Recent onderzoek heeft evenwel aangetoond dat het vraagstukkenonderwijs bij leerlingen de neiging doet ontstaan om hun alledaagse ervaringskennis en hun realistische overwegingen omtrent de concrete situatie of context waarop het vraagstuk betrekking heeft, te negeren tijdens de verschillende fasen van het oplossingsproces, nl. de opbouw van de initiële probleemrepresentatie, de constructie van een passend wiskundig model, de uitvoering van de rekenkundige operatie(s) die in dit model vervat zit(ten), en de interpretatie en evaluatie van de uitkomst van het rekenwerk (Davis, 1989; De Corte & Verschaffel, 1985; Goffree, 1983; Greer, 1993; Kilpatrick, 1987; Nelissen, 1977; Nesher, 1980; Reusser, 1988; Schoenfeld, 1991; Silver, Shapiro & Deutsch, 1993; Treffers & De Moor, 1990; Verschaffel & De Corte, ter perse). Dit zou één van de voornaamste verklaringen zijn waarom de traditionele schoolvraagstukkendidactiek er onvol-

* De auteurs bedanken de directeur en de leerkrachten van de basisschool waarin het onderzoek plaatsvond voor de bereidwillige en vlotte medewerking. Een bijzonder woord van dank gaat uit naar G. Bonne, leerkracht van de experimentele klas, voor zijn vele opmerkingen en suggesties bij voorlopige versies van het trainings- en toetsmateriaal en voor zijn hulp bij de realisatie en registratie van de experimentele leergang. Tevens bedanken we A. Treffers, K. Gravemeijer en D. van Eerde voor hun commentaren op een eerste concept van het onderzoek. Tot slot ook een woord van dank aan R. Stroobants voor zijn hulp bij de statistische verwerking van de gegevens.

doende in slaagt om bij leerlingen deze bewaamheid in het oplossen van reële toepassingsproblemen te ontwikkelen.

In twee recente studies verzamelden Verschaffel, De Corte en Lasure (1994; ter perse) overtuigende empirische steun voor deze bewering. In een eerste onderzoek kregen 75 vijfdeklassers afkomstig uit drie verschillende Vlaamse scholen tijdens een gewone rekenles een schriftelijke toets voorgelegd bestaande uit 10 itemparen. Het ene vraagstuk uit elk opgavenpaar was een standaardopgave (S-item) die 'probleemloos' gemodelleerd en opgelost kan worden door middel van één of twee rekenkundige basisbewerkingen met de getallen uit de opgave (bijv. "Wim heeft 4 planken van 2 meter gekocht. Hoeveel planken van 1 meter kan hij daaruit zagen?"). Bij de andere opgave uit elk paar vormt de omzetting in een passend wiskundig model wél een probleem (P-item), tenminste als men de context waarrond deze opgave is opgebouwd 'au sérieux' neemt (bijv. "Wim heeft 4 planken van 2,5 meter gekocht. Hoeveel planken van 1 meter kan Wim daarvan zagen?"). Het aantal antwoorden en/of commentaren op de P-items waaruit bleek dat de oplosser rekening hield met de reële situatie uit de betreffende vraagstukken, was alarmerend laag: slechts 17% van alle leerlingreacties op deze P-items was als 'realistisch' te bestempelen. Bij het zoëven vermelde planken-vraagstuk bijvoorbeeld gaf slechts 10% van de leerlingen te kennen dat men in werkelijkheid slechts 2 planken van 1 meter kan zagen uit één plank van 2,5 meter, en dat derhalve 4 van dergelijke planken slechts 8 planken van 1 meter kunnen opleveren in plaats van 10. De overige leerlingen reageerden vrijwel allemaal met het verwachte, stereotiepe antwoord " $4 \times 2,5 = 10$ " zonder enige commentaar. In een tweede studie constateerden Verschaffel e.a. (ter perse) dat deze neiging van leerlingen tot niet-realistisch reageren erg weerbarstig is, in die zin dat leerlingen die een P-item aanvankelijk op niet-realistische wijze hadden beantwoord, over het algemeen niet geneigd waren dit niet-realistisch antwoord in te ruilen voor een (meer) realistisch, zelfs na twee sterke 'hints' vanwege de interviewer in deze richting.

De studies van Verschaffel e.a. (1994; ter perse) tonen dus aan dat leerlingen na verschillende jaren klassiek vraagstukkenonderwijs

geleerd hebben om bij het omzetten van een wiskundig toepassingsprobleem in een wiskundige berekening of bij de interpretatie van de uitkomst van dit rekenwerk, weinig of geen ruimte te laten voor realistische ervaringskennis en praktische overwegingen. Deze studies verschaffen ons evenwel geen inzicht in de wijze waarop dit gebrek aan 'realiteitszin' tijdens het oplossen van wiskundige toepassingsproblemen bij leerlingen tot ontwikkeling komt. Verschaffel e.a. (1994; ter perse) spreken het vermoeden uit dat dit het resultaat is van de wisselwerking tussen

- 1 het stereotiep en levensvreemd karakter van de overgrote meerderheid van de rekenvraagstukken waarmee leerlingen (onder meer via de rekenboeken) in de vraagstukkenlessen worden geconfronteerd, en
- 2 de manier waarop er tijdens deze lessen door de leerkracht met deze vraagstukken wordt omgesprongen.

Door toedoen van deze aspecten van de klas-sieke vraagstukkendidactiek zou bij leerlingen langzaam maar zeker de dispositie groeien om de concrete situatie waarin een wiskundig toepassingsprobleem ingebed zit, niet al te ernstig te nemen en om de eigen concrete ervaringskennis daaromtrent te negeren. Er is echter weinig empirische evidentie voor deze hypothetische verklaring.

In dit artikel wordt verslag uitgebracht van een exploratief onderzoek waarin het effect is nagegaan van een experimenteel (remediërings)programma¹ op de dispositie tot realistisch modelleren en interpreteren van leerlingen uit de bovenbouw van de basisschool. Centraal in dit programma staat het ontwikkelen van de geneigdheid en de vaardigheid tot het inschakelen van ervaringskennis en van realistische overwegingen in de diverse fasen van het oplossingsproces, in het bijzonder

- 1 tijdens de constructie van een gepast wiskundig model voor een gegeven probleem-situatie (= realistisch modelleren), en
- 2 bij het interpreteren van de uitkomst van het rekenwerk in functie van de oorspronkelijke vraagstelling (= realistisch interpreteren).

2 Opzet

2.1 Overzicht van de onderzoeksopzet

Het onderzoek vond plaats gedurende het eerste trimester van het schooljaar 1994-95. Eén experimentele klas (E-klas) en twee controleklassen (C1 en C2) waren erin betrokken.

De lessen in de E-klas werden grotendeels verzorgd door de eerste auteur. Dit gebeurde echter in nauw overleg met de 'gewone' leerkracht, die zelf ook enkele kleinere onderdelen voor z'n rekening nam. In de twee controleklassen werd het gewone reken/wiskunde-programma afgewerkt. De experimentele leergang bestond uit vijf thematische leereenheden (LE) van 2 à 2,5 uur verspreid over 2,5 weken. Bij het begin en aan het einde van de leergang werden in de E-klas en in de twee controleklassen schriftelijke voor- en natoetsen afgenomen waarmee de vaardigheid van de leerlingen in het realistisch modelleren en interpreteren van context-gebonden wiskundige toepassingsproblemen werd nagegaan. De leerlingen uit de eerste controlegroep kregen net voor de natoets een korte introductie over realistisch modelleren en interpreteren (zie verder). Een maand na het beëindigen van de leergang werd er in de E-klas nog een retentietoets afgenomen. Informatie over het concrete verloop van het experimenteel programma werd verkregen via de analyse van video-opnamen van alle lessen én van al het schriftelijk leerlingmateriaal.

2.2 Subjecten

De leerlingen uit de E-klas waren vijfdeklassers, terwijl die uit de twee controleklassen zesdeklassers waren. Deze drie klassen maakten deel uit van eenzelfde lagere jongensschool en telden respectievelijk 19, 18 en 17 leerlingen. Deze school kan getypeerd worden als een dorpsschool die haar leerlingen recruteert uit alle lagen van de plaatselijke bevolking.

In deze school wordt sedert meerdere jaren gebruik gemaakt van een bekende traditionele Vlaamse rekenmethode, nl. "Reken Raak". Uit voorafgaande gesprekken met de directie en de leerkrachten was gebleken dat er in deze school tot dan toe geen extra aandacht besteed was aan het leren realistisch modelleren en interpreteren van wiskundige toepassingsituaties. Deze gesprekken brachten ook nog aan het licht dat men tot dan toe bij het reken/wiskunde-onder-

wijs weinig of geen gebruik gemaakt had van groepswerk.

2.3 Beschrijving van het experimenteel programma

2.3.1 Opgavenaanbod

Een eerste belangrijke pijler van het programma betreft de aard van het opgavenaanbod. De traditionele standaardopgaven werden vervangen door een reeks problemen die stuk voor stuk speciaal ontworpen waren om leerlingen te confronteren met het probleem van realistisch modelleren en interpreteren van contextgebonden toepassingsituaties. Elk van de vijf leereenheden (LE) was opgebouwd rond één welbepaald aspect van realistisch modelleren en interpreteren.

De eerste LE ging over het leren interpreteren van het resultaat van een niet-opgaande deling. Deze LE begon met een verhaal over een regiment van 300 soldaten die diverse militaire activiteiten uitvoerden. Bij elke militaire activiteit hoorde een vraag, die altijd via dezelfde rekenkundige bewerking kon worden opgelost, maar telkens een ander antwoord vereiste (zie Bijlage).

LE 2 handelde over additieve probleemsituaties rond sets die gemeenschappelijke elementen hebben en derhalve niet op te lossen zijn door de aantallen van de diverse sets gewoon bij elkaar op te tellen of van elkaar af te trekken. Het uitgangsprobleem betrof een jongen die strips van "Suske en Wiske" verzamelde en ter gelegenheid van zijn verjaardag een groot pak oude albums van "Suske en Wiske" kreeg waaronder verscheidene albums die hij reeds bezat. De leerlingen dienden te berekenen hoeveel strips er na dit geschenk nog ontbraken in de verzameling van deze jongen.

In de derde LE stonden probleemsituaties centraal waarbij het niet duidelijk was of de uitkomst van een rekenkundige operatie met de twee gegeven getallen het exacte antwoord opleverde dan wel een getal dat 1 groter of 1 kleiner is dan het juiste antwoord. In het uitgangsprobleem dat bij deze LE hoorde kregen de leerlingen de nummers van het eerst en het laatst verkochte toegangsbiljet op een bepaalde dag in het plaatselijk zwembad, en werd er gevraagd hoeveel kaartjes er op deze dag verkocht waren.

Het uitgangsverhaal van de vierde LE ging over een jongen die een schommel wilde maken aan een 5 meter hoge tak van een boom; gevraagd werd hoeveel meter touw deze jongen daarvoor nodig had. In deze LE leerden de leerlingen dat er bij het opstellen van een wiskundig model en/of bij de interpretatie van de uitkomst van het rekenwerk geregeld gebruik moet worden gemaakt van informatie-elementen die weliswaar niet expliciet of onmiddellijk 'gegeven' zijn maar wel (eenvoudig) te achterhalen zijn door beroep te doen op eigen ervaringskennis.

In LE 5 tenslotte leerden de leerlingen onderscheid maken tussen toepassingsituaties die wel en niet adequaat gemodelleerd kunnen worden in termen van lineaire proportie (a:b zoals c:d). Als uitgangsprobleem fungeerde een verhaal over een jonge atleet waarvan de recordtijd op de 100 meter hardlopen gegeven was en de recordtijd op de 400 meter moest worden voorspeld.

Naast het uitgangsprobleem kwamen in elke LE ook nog verscheidene andere contextgebonden toepassingsopgaven voor waaraan dezelfde of een analoge modellerings- of interpretatiemoeilijkheid ten grondslag lag (zie paragraaf 2.3.2).

2.3.2 Instructiemethoden

Niet alleen het opgavenaanbod maar ook de instructietechnieken die in het programma werden gebruikt verschilden aanzienlijk van die uit een klassieke vraagstukkenles (voor een typering van het klassieke vraagstukkenonderwijs, zie o.m. De Corte & Verschaffel, 1989).

Zoals gezegd in paragraaf 2.3.1, werd telkens uitgegaan van een aantrekkelijk, uitdagend uitgangsprobleem waarbij er zich een bepaalde modellerings- of interpretatiemoeilijkheid voordeed. Daaraan werd gedurende 15 à 20 minuten gewerkt in zes vaste heterogene groepen van drie à vier leerlingen. De leerlingen van elk groepje werden aangespoord om het probleem eerst individueel op een klein (klad)blad (A4-formaat) op te lossen en pas daarna uit de individuele oplossingen één gezamenlijk antwoord te distilleren en dit op een groot blad (A3-formaat) te noteren. Op deze bladen moest overigens niet enkel het antwoord genoteerd worden, maar tevens de gevolgde oplossingsweg, evenals een reflectie op

het oplossingsproces en op eventuele moeilijkheden die zich gedurende dit proces hadden voorgedaan (zie Bijlage 1). Tijdens het groeps-
werk liep de lesgever rond om zo goed mogelijk zicht te krijgen op de wijze waarop het probleem in de diverse groepjes werd aangepakt en opgelost. Tevens beantwoordde hij eventuele vragen en gaf hij soms strategische aanwijzingen en hulp (bijv. "Lees de opgave nog eens heel aandachtig", "Maak eens een schets van de probleemsituatie", "Hebben jullie dit antwoord gecontroleerd?").

Na dit groeps-
werk werden de verschillende antwoorden op en oplossingswijzen van het uitgangsprobleem evenals de moeilijkheden die men daarbij had ondervonden, gedurende 15 à 20 minuten klassikaal besproken. Aan het einde van deze klassikale bespreking nodigde de lesgever de leerlingen uit om wat ze op grond van de oplossing en de bespreking van het uitgangsprobleem hadden geleerd samen te vatten, en trachtte hij het geleerde kernachtig in meer algemene termen te (her)formuleren.

Vervolgens kregen de leerlingen een werkblad waarop vier nieuwe toepassingsproblemen stonden, die wederom gedurende 15 à 20 minuten in groepjes werden opgelost. Aan sommige van deze opgaven lag hetzelfde modellerings- of interpretatieprobleem ten grondslag als aan het uitgangsprobleem; daarnaast bevatte dit werkblad echter ook één of twee 'probleemloze' standaardopgaven (S-items).

Daarop volgde opnieuw een klassikale bespreking (15 à 20 minuten), die op dezelfde manier verliep als de klassikale discussie over het uitgangsprobleem.

Bij elke LE hoorde er tenslotte ook nog een individuele opdracht, waarin de leerlingen nogmaals geconfronteerd werden met een toepassings-
situatie met dezelfde modellerings- of interpretatiemoeilijkheid als het uitgangsprobleem. Ook deze individuele opdracht werd achteraf klassikaal besproken.

Tijdens het groeps-
werk werd zoals gezegd gewerkt in zes vaste, heterogene groepen van drie of vier leerlingen. Bij de verdeling van de 19 leerlingen over deze zes groepen werd ervoor gezorgd dat elke groep één 'sterke', één of twee 'middelmatige' en één 'zwakke' leerling telde. Voor de indeling van de leerlingen volgens rekenniveau werd een beroep gedaan op het oordeel van de leerkracht.

Bij wijze van illustratie zijn in bijlage de werkbladen opgenomen waarvan gebruik gemaakt is in LE 1. Werkblad 1 en 2 bevatten het uitgangsprobleem met de bijhorende vragen, werkblad 3 de reeks met oefenopgaven en werkblad 4 de individuele opdracht waarmee LE 1 afgesloten werd. De werkbladen van de overige leereenheden zijn te vinden in Verschaffel (1995).

2.3.3 Klassecultuur

Een derde belangrijke pijler van het programma was de expliciete gerichtheid op de ontwikkeling van een waardevolle wiskundige dispositie bij de leerlingen, via het creëren van een nieuwe klassecultuur waarin vraagstukkenlessen niet opgevat worden als trainingen in het routine-matig gebruik van voorgeschre-

ven quasi-algoritmische oplossingsmethoden, maar als een proefterrein voor het leren zelfstandig en kritisch gebruiken van de verworven wiskundige kennis en vaardigheden in levens-echte toepassingsituaties. Dit werd o.m. bewerkstelligd via het expliciet bespreken van en negotiëren over spelregels en normen omtrent:

- wat er verstaan wordt onder een goed wiskundig toepassingsprobleem (bijv. "sommige problemen kunnen op meerdere manieren (correct) beantwoord worden"), een goede oplossing (bijv. "soms is het zinvoller om geen exact antwoord te geven maar een schatting te maken") of een goede oplossingsmethode (bijv. "ook ervaren rekenaars tellen soms nog wel eens op hun vingers");
- de rol van de leerkracht en van de leerlingen in een reken/wiskundeles (bijv. "jullie moe-

Tabel 1

Tien P-items uit de voortoets

1A*	1180 supporters moeten per bus naar een voetbalwedstrijd vervoerd worden. Hoeveel bussen zijn er nodig, als je weet dat er maximum 48 supporters in één bus kunnen?
1B	Een groep van 228 toeristen wil vanop het dak van het hoogste flatgebouw van de stad genieten van een panoramisch uitzicht. In het flatgebouw is er slechts één lift die tot het dak gaat. Het maximum aantal personen is 24. Hoeveel keer zal de lift omhoog moeten alvorens al deze toeristen boven zijn?
2A	Op het einde van het schooljaar trachten de 66 leerlingen van het derde leerjaar hun zwemdiploma te behalen. Om dit diploma te behalen, moet je 100 meter ver kunnen zwemmen en 1 minuut lang kunnen watertrappelen. 13 leerlingen slagen er niet in om 100 meter ver te zwemmen en 11 leerlingen slagen er niet in om één minuut lang te watertrappelen. Hoeveel leerlingen van het derde leerjaar krijgen er een zwemdiploma?
2B	Karel en Joris zitten in dezelfde klas en verjaren op precies dezelfde dag. Karel heeft 9 vrienden die hij wil uitnodigen op z'n verjaardagsfeest en Joris heeft er 12. Karel en Joris besluiten om samen één verjaardagsfeest te geven en ze nodigen al hun vrienden uit. Alle vrienden komen. Hoeveel vrienden zijn er op het feest?
3A	Enige tijd geleden werd op school het afscheid van de directeur gevierd. Hij was zonder onderbreking directeur van 1 januari 1959 tot 31 december 1993. Hoeveel jaar is hij directeur geweest?
3B	Dit jaar werd het rock-concert "Torhout-Werchter" voor de vijftiende keer gehouden. In welk jaar werd dit concert voor het eerst georganiseerd?
4A	De afstand tussen twee palen bedraagt 12 meter. Hoeveel stukken touw van 1,5 meter lang moet men aan elkaar knopen om de beide palen met elkaar te verbinden?
4B	Steven heeft 8 planken van 2,5 meter gekocht. Hoeveel planken van 1 meter kan Steven hiervan zagen?
5A	De recordtijd van Sven op 50 meter schoolslag is 54 seconden. In hoeveel tijd zwemt hij de 200 meter schoolslag?
5B	Deze vaas wordt gevuld met water. Na 10 seconden staat het water 3,5 cm hoog. Hoe hoog zal het water staan na 30 seconden? (Deze opgave was vergezeld van een tekening van een kegelvormige vaas)

* De getallen verwijzen naar de LE uit de experimentele leergang waarin dat soort van modellerings- en interpretatiemoelijkheid centraal stond. Het A-item van elk paar is het leeritem; het B-item het nabije-transferitem.

ten niet verwachten dat ik alleen zal bepalen welke oplossing de beste is; dat is iets waarover we samen zullen overleggen”) (zie ook Cobb, 1989; Gravemeijer, 1994).

2.4 Toetsen

2.4.1 Voortoets

In de drie klassen (E, C1 en C2) werd enkele dagen voor het begin van de experimentele leergang een collectieve schriftelijke voortoets afgenomen. Deze toets bestond uit 15 vraagstukken: vijf paren van twee ‘problematische’ opgaven (P-items) (één paar per LE) en vijf gewone standaardopgaven (S-items) die als bufferitems fungeerden. Tabel 1 geeft een overzicht van de 10 P-items uit de voortoets.

Het verschil tussen de beide P-items van elk paar lag hierin dat het eerste opgebouwd was rond een situatie of context die sterk verwant was aan één van de probleemsituaties waarmee de leerlingen tijdens de overeenkomstige LE hadden gewerkt (= het leeritem), terwijl het andere opgebouwd was rond een situatie of context die minder gelijkenis vertoonde met één van de P-items uit deze LE (= nabij-transferitem).

Van deze toets werden twee verschillende versies gemaakt, die onderling verschilden wat betreft de volgorde waarin de opgaven gepresenteerd werden.

De instructies bleven beperkt tot een minimum. De opdracht luidde eenvoudigweg om voor elk vraagstuk het antwoord neer te schrijven in het daartoe voorziene ‘antwoord-vak’, en om in het ‘uitleg-vak’ daaronder te noteren hoe men aan dit antwoord was gekomen of om uit te leggen waarom men het betreffende vraagstuk niet (goed) kon oplossen.

2.4.2 Natoets

Enkele dagen na het beëindigen van de experimentele leergang werd in de experimentele klas een collectieve natoets afgenomen, die als een parallelversie van de voortoets te beschouwen is. Dit betekent dat ook deze toets bestond uit vijf paren van P-items (één paar per LE) en vijf S-opgaven die als bufferitems fungeerden.

Zoals bij de voortoets, werden er van de natoets twee versies opgesteld die onderling verschilden wat betreft de volgorde van de opgaven.

De leerlingen uit de twee controleklassen kregen dezelfde natoets als de leerlingen van de E-klas. In controleklas 2 werd de natoets – net zoals in de E-klas – zonder speciale introductie gegeven. In controleklas 1 daarentegen werd vooraf gedurende 10 à 15 minuten een introductie gegeven waarin de leerlingen uitgelegd werd dat routine-matige antwoorden op vraagstukken soms inadequaat zijn vanuit realistisch oogpunt. Tevens werden enkele voorbeelden van dergelijke inadequate antwoorden gegeven (bijv. het vraagstuk “Er zitten 10 vogels in een boom. Een jager komt en schiet er 2 neer. Hoeveel vogels zitten nog in deze boom?” beantwoorden met “8 vogels” in plaats van met “geen enkele meer”). Aan het einde van deze introductie werden de leerlingen er uitdrukkelijk voor gewaarschuwd dat de natoets verscheidene opgaven bevatte waarvoor dergelijke routine-matige antwoorden inadequaat zijn. Door de eventuele leerwinst van de C1-leerlingen tussen voor- en natoets te vergelijken met die van de E- en de C2-groep, zou kunnen worden nagegaan of een dergelijke beperkte ingreep volstaat om het aantal niet-realistische oplossingen bij context-gebonden wiskundige toepassingen te doen afnemen.

2.4.3 Retentietoets

Tenslotte werd de leerlingen uit de E-groep een maand na het beëindigen van het programma ook nog een retentietoets afgenomen.² Deze afname vond plaats in het kader van een gewone reken/wiskundeles én in afwezigheid van de onderzoekers. Verder werd er bij het klaarmaken van de retentietoets voor gezorgd dat deze toets qua uiterlijke kenmerken (soort van papier, bladshikking, lettertype...) zoveel mogelijk verschilde van de voor- en natoets.

De retentietoets bestond eveneens uit 15 opgaven: 10 P-items en vijf S-opgaven die als bufferitems fungeerden. Vijf van de 10 P-items waren parallel-items van de vijf nabij-transferopgaven uit de voor- en de natoets (zie Tabel 1). De vijf resterende P-items waren eveneens ‘problematische’ vraagstukken waarvan de relatie met de modellerings- en interpretatiemoeilijkheden uit het experimenteel programma evenwel minder duidelijk was (= verre-transferitems), maar waarvan we uit ander onderzoek wisten dat leerlingen die traditioneel reken/wiskunde-onderwijs achter de

rug hebben er zelden of nooit in realistische zin op reageren (Greer, 1993; Verschaffel e.a., 1994). Twee voorbeelden van deze laatste groep van vijf verre-transferopgaven uit de retentietoets zijn "Bruno en Saskia gaan naar dezelfde school. Bruno woont 17 kilometer van school vandaan en Saskia 8 kilometer. Hoever wonen Bruno en Saskia van elkaar?" en "Rob is geboren in 1982. Het is nu 1994. Hoe oud is Rob?".

Zoals in de voor- en natoets, werden de opgaven uit de retentietoets in twee verschillende volgorden aangeboden.

2.5 Analyse van de gegevens

2.5.1 Scoring van de reacties op voor-, na- en retentietoets

Alle reacties van de leerlingen op de P-items van de voortoets, de natoets en de retentietoets werden op de volgende twee punten geanalyseerd: (1) het antwoord dat de leerling in het daartoe voorziene 'antwoord-vak' genoteerd had, en (2) eventuele rekenkundige bewerkingen en/of opmerkingen in het 'uitleg-vak'.

De analyse van wat de leerling in het 'antwoord-vak' genoteerd had was erop gericht onderscheid te maken tussen 'realistische' en 'niet-realistische' antwoorden. Een realistisch antwoord (RA) is een antwoord dat voortvloeit uit het effectief gebruik van ervaringskennis en realistische overwegingen in verband met de context waarrond het vraagstuk is opgebouwd. Bijvoorbeeld: het meest aangegeven realistisch antwoord op het planken-vraagstuk uit paragraaf 1 is '8 planken'. Immers, zoals eerder vermeld, kan men 'in werkelijkheid' uit elke plank van 2,5 meter slechts 2 planken van 1 meter zagen, hetgeen impliceert dat er uit 4 van deze planken slechts 8 planken van 1 meter kunnen worden gezaagd. Het niet-realistisch antwoord op dit P-item is '10 planken', - het resultaat van de voor-de-hand liggende bewerking met de twee gegeven getallen, nl. $4 \times 2,5 =$.

Naast het antwoord van de leerling dat in het 'antwoord-vak' genoteerd stond, werden zoals gezegd ook de eventuele berekeningen en commentaren in het 'uitleg-vak' bekeken. Meer bepaald werd nagegaan of in deze notities enig spoor te vinden was van eventuele moeilijkheden die de leerling ondervonden had bij het

wiskundig modelleren van het vraagstuk en/of bij het interpreteren van de uitkomst van het rekenwerk, als gevolg van de activering van realistische overwegingen. Een voorbeeld van zo'n opmerking is de commentaar "Maar dan moet Wim de overblijvende stukken van 0,5 meter wel stevig aan elkaar lijmen" in het 'uitleg-vak' van een leerling die het planken-vraagstuk met '10' beantwoord heeft. Wanneer er in het 'uitleg-vak' enig spoor te vinden was van activering van een dergelijke realistische overweging, werd de reactie van de leerling op het betreffend P-item eveneens beschouwd als 'realistisch'.

De uitdrukking 'realistische reactie' (RR) slaat derhalve zowel op een realistisch antwoord (RA) als op een antwoord dat niet als 'realistisch' gescoord werd maar dat wél gepaard ging met één of andere realistische commentaar in het uitleg-vak.³ De uitdrukking 'niet-realistische reactie' (NR) daarentegen verwijst naar een reactie waarbij noch in het antwoord noch in de uitleg van een leerling sprake was van activering van relevante, context-gebonden ervaringskennis.

2.5.2 Analyse van het verloop van de leergang

Zoals gezegd, wilden we met deze studie niet alleen het effect nagaan van de ontwikkelde leergang op de dispositie en de vaardigheid van de leerlingen in het realistisch modelleren van wiskundige toepassingsproblemen. Een bijkomend doel was dieper inzicht te verkrijgen in de wijze waarop de leerlingen reageerden op en omsprongen met de diverse componenten van het experimenteel programma. Daartoe werden alle lessen in de E-klas op video opgenomen. Aan de hand van deze video-opnamen en van al het schriftelijk leerlingmateriaal werd er achteraf een gedetailleerde reconstructie gemaakt van het concrete verloop van de lessen.

3 Hypothesen en bijkomende onderzoeksvragen

3.1 Hypothesen

Ten eerste, in de lijn van de resultaten van het onderzoek van Verschaffel e.a. (1994) werd er in de drie groepen een erg gering aantal 'realistische reacties' (RRs) op de P-items uit de voortoets verwacht. Ook voorspelden we dat

het aantal RRs van de vijfdeklassers uit de E-groep niet significant zou verschillen van dat van de zesdeklassers uit de twee controlegroepen, omdat deze laatsten tot dan toe niet méér instructie gekregen hadden in realistisch modelleren en interpreteren van contextgebonden toepassingen van de vier basisbewerkingen dan de leerlingen uit de E-groep.

Ten tweede verwachtten we in de E-klas een betekenisvolle toename van het aantal RRs op de P-items tussen de voor- en de natoets. In de C2-klas werd er geen stijging van het aantal RRs tussen de voor- en de natoets voorspeld. In de C1-klas daarentegen viel er wel een zekere toename van het aantal RRs te verwachten (als gevolg van de korte introductie op de natoets), doch de voorspelling luidde dat deze toename niet significant zou zijn. De argumentatie hiervoor was dat louter waarschuwen voor niet-realistische antwoorden niet zou volstaan om de sterke dispositie van leerlingen tot realistisch modelleren en interpreteren op betekenisvolle wijze positief te beïnvloeden.

Een derde hypothese was dat de leerwinst in de E-klas niet beperkt zou blijven tot de opgaven die goed lijken op de oefeningen waarmee in de experimentele leergang was gewerkt, maar dat er ook transfer zou optreden van de verworven disposities en vaardigheden naar probleemsituaties die duidelijk afwijken van de situaties waarmee tijdens het experimentele programma gewerkt was. Daarom voorspelden we dat de toename van het aantal RRs in de E-klas tussen de voor- en de natoets niet alleen bij de vijf leeritems maar ook bij de vijf nabije-transferitems significant zou zijn.

Ten vierde werd uitgegaan van de hypothese dat de leerwinst van de E-groep méér zou zijn dan een tijdelijke gedragsverandering. Derhalve luidde de voorspelling dat er in de E-klas geen terugval zou zijn wat betreft het aantal RRs op de nabije-transferitems uit de retentietoets in vergelijking met de natoets en dat ook op de vijf verre-transferitems beduidend meer RRs zouden aangetroffen worden dan in de vroegere constaterende studies waarin diezelfde P-opgaven aan groepen niet-getrainde leerlingen werden voorgelegd.

De eerste drie voorspellingen werden getoetst met behulp van een $3 \times 2 \times 2$ variantie-analyse met 'klasgroep' (E versus C1 versus C2), 'afna-

memoment' (voortoets versus natoets) en 'opgaventype' (leeritems versus nabije-transferitems) als onafhankelijke variabelen, en het aantal RRs als afhankelijke variabele. Significante effecten werden nader onderzocht met behulp van de Tukey a posteriori toets (met een significantieniveau van 5%). Omdat de retentietoets alleen in de E-groep werd afgenomen en bovendien slechts voor de helft bestond uit parallel-opgaven van de P-items uit de voor- en de natoets, werden de resultaten op de retentietoets niet betrokken in de variantie-analyse.

3.2 Bijkomende onderzoeksvragen

Naast het toetsen van de bovenvermelde onderzoekshypothesen, werd door middel van een gedetailleerde analyse (1) van de leerlingenantwoorden op de diverse toetsen en (2) van het concrete verloop van de experimentele leergang in de E-klas ook nog gepoogd om een antwoord verkrijgen op de volgende vragen:

- Had het experimenteel programma een vergelijkbaar (positief) effect op de 'sterke', de 'middelmatige' en de 'zwakke' leerlingen uit de E-klas?
- Was het effect identiek voor de vijf soorten van modellerings- en interpretatiemoeilikheden die in het programma aan bod kwamen?
- Traden er bij de leerlingen uit de E-klas verschillen op in de manier waarop de P-items (en de S-items) voor en na de training concreet werden aangepakt en/of beantwoord?
- Gaven de opgaven uit het experimenteel programma effectief aanleiding tot de bedoelde discussies over en reflecties op realistisch modelleren en interpreteren?
- Hoe sterk diende de lesgever deze groeps- en klasdiscussies te sturen en hoe reageerden de leerlingen daarop?

4 Resultaten in verband met de vier hypothesen

Alvorens de resultaten in verband met de vier bovenvermelde hypothesen te vermelden, signaleren we dat een betrouwbaarheidsonderzoek van de gehanteerde toetsen voor de P-items uit de voortoets, de natoets en de retentietoets respectievelijk een consistentiecoëfficiënt (KR20) van .54, .79 en .73 ople-

verde. De lage consistentie-coëfficiënt voor de voortoets is o.m. te wijten aan het feit dat er op verscheidene P-items uit deze voortoets door geen enkele of slechts één enkele leerling 'op realistische wijze' werd gereageerd (zie verder).

Een eerste onderzoeksresultaat houdt verband met de prestaties van de leerlingen op de voortoets. Zoals voorspeld in de *eerste hypothese* en overeenkomstig de resultaten van het onderzoek van Verschaffel e.a. (1994), demonstreerden de leerlingen uit de E-klas en de twee controleklassen een zeer sterke neiging tot het uitsluiten van context-gebonden kennis en realistische overwegingen bij het oplossen van de vraagstukken uit de voortoets. Voor de drie klassen (E, C1 en C2) samen bedroeg het percentage RRs op de tien P-items uit deze voortoets slechts 15%.⁴ Het percentage RRs van de vijfdeklassers uit de E-klas lag weliswaar lager dan dat van de zesdeklassers uit C1 en C2 - de percentages bedroegen respectievelijk 7, 20 en 18% - doch Tukey a posteriori toetsen wezen uit dat deze drie percentages niet significant van elkaar verschilden.

Het toetsen van de *tweede hypothese* over het effect van het experimenteel programma geschiedde door middel van een variantie-analyse met '(klas)groep' en '(afname)-moment' als onafhankelijke variabelen en 'aantal RRs' als afhankelijke variabele. Tevens werd via een aantal Tukey a posteriori toetsen voor elk van de drie (klas)groepen afzonderlijk nagegaan of er een significant verschil was tussen het totaal aantal RRs op de P-items uit de voor- en de natoets. De variantie-analyse bracht een significant 'groep × moment' interactie-effect aan het licht, $F(2, 50) = 16.71$, $MSe = 18.4128$, $p < .0001$. Uit de Tukey a posteriori toetsen bleek dat dit 'groep × moment' interactie-effect te wijten was aan de veel grotere toename van het aantal RRs in de E-groep dan in de beide controlegroepen. In de E-groep was er een significante stijging van het percentage RRs van 7% naar 51%. In de twee controleklassen daarentegen werd slechts een stijging van 20% naar 34% (voor C1) en van 18% naar 23% (voor C2) geconstateerd (zie Tabel 2). Deze stijging was in beide gevallen niet significant. De eerder geringe en niet-significante vooruitgang van de eerste controlegroep - in vergelijking met de E-groep - vormt een duidelijke

indicatie dat alleen een waarschuwing om bij het oplossen van (school)vraagstukken rekening te houden met reële, context-gebonden aspecten van het probleem, niet volstaat om van stereotiepe en niet-realistische probleemoplossers kritische en realistische denkers te maken. Verder signaleren we dat er in de E-klas geen significante correlatie was tussen het aantal RRs tijdens de voor- en de natoets. Gezien het zeer geringe aantal RRs in de E-klas tijdens de voortoets is dit niet verwonderlijk. In de twee controleklassen daarentegen was er wel een significante samenhang (op het 1% niveau) tussen de resultaten op de voor- en de natoets: de Pearson correlatiecoëfficiënt voor C1 en C2 bedroeg respectievelijk .70 en .68.

Tabel 2

Aantal en percentage realistische reacties (RRs) op de 10 P-items uit de voor- en de natoets in de E-, C1- en C2-groep

Groep	Realistische reacties			
	Voortoets		Natoets	
	N	%	N	%
E (n=18*)	13	7%	91	51%
C1 (n=18)	36	20%	61	34%
C2 (n=17)	32	18%	39	23%

* Eén van de leerlingen uit de E-klas kon wegens ziekte niet deelnemen aan de natoets; dit brengt het aantal leerlingen uit de E-klas op 18 in plaats van 19.

Met het oog op het toetsen van de *derde hypothese*, die betrekking had op de wendbaarheid van de bereikte leerresultaten, werd het effect van het experimenteel programma op de vijf leeritems en de vijf nabije-transferitems afzonderlijk geanalyseerd. De verwachting was dat de leerwinst van de leerlingen uit de E-groep niet beperkt zou blijven tot de leeritems, maar zich ook zou uitstrekken tot de nabije-transferitems. De variantie-analyse bracht geen '(klas)groep × (afname)moment × (opgaven)type' interactie-effect aan het licht. Zoals Tabel 3 laat zien, was de vooruitgang van de leerlingen uit de E-klas op de vijf leeritems weliswaar groter dan op de vijf nabije-transferopgaven (resp. van 9% naar 60% en van 6% naar 41%), doch uit de Tukey a posteriori toetsen bleek dat de toename ook in het tweede geval significant was (op het 5% niveau). Met andere woorden, de vooruitgang van de E-groep bleef niet beperkt tot P-items die opgebouwd

Tabel 3

Aantal en percentage realistische reacties (RRs) op de vijf leeritems en op de vijf nabije-transferitems uit de voor- en de natoets in de E-, C1- en C2-groep

Groep	Realistische reacties							
	Voortoets				Natoets			
	Leeritems		Nabije transferitems		Leeritems		Nabije transferitems	
	N	%	N	%	N	%	N	%
E (n=18*)	8	9%	5	6%	54	60%	37	41%
C1 (n=18)	18	20%	18	20%	36	40%	25	27%
C2 (n=17)	16	20%	16	20%	19	22%	20	23%

* Eén van de leerlingen uit de E-klas nam wegens ziekte niet deel aan de natoets en werd derhalve niet opgenomen in deze tabel.

waren rond een probleemsituatie die een duidelijke verwantschap vertoonde met bepaalde opgaven uit het experimenteel programma, maar strekte zich ook uit tot die items uit de natoets die te maken hadden met contexten die daar sterker van afweken. Hieruit blijkt alvast dat de leerwinst van de E-groep zeker niet kan worden afgedaan als een simpel en specifiek trainings-effect.

Aanvullende empirische steun voor deze interpretatie van de leerwinst van de leerlingen van de E-klas, wordt geleverd door de uitslagen op de retentietoets die een maand na het beëindigen van het programma van deze leerlingen afgenomen werd (*hypothese 4*). Zoals in paragraaf 2.4.3 beschreven, bestond deze retentietoets uit vijf P-items die isomorf waren met de vijf nabije-transferopgaven uit de natoets en daarnaast ook nog uit vijf niet-isomorfe verre-transferitems waarvan uit recent onderzoek eveneens gebleken was dat zij door traditioneel geschoolde 10 à 14-jarigen slechts zelden op realistische wijze beantwoord worden. De verwachting was dat er in de E-groep geen terugval zou zijn wat betreft het aantal RRs op de P-items uit de retentietoets in vergelijking met de natoets. Het percentage RRs voor de vijf nabije-transferitems uit de retentietoets bedroeg 40%; dit is evenveel als voor de vijf overeenkomstige nabije-transferitems uit de natoets (nl. 41%, zie Tabel 2). Maar bovendien werd ook voor de vijf verre-transferitems uit de retentietoets een vergelijkbaar percentage RRs vastgesteld, nl. 39%. Dit percentage is beduidend hoger dan werd vastgesteld in andere recente studies (zie o.m. Greer, 1993; Verschaffel e.a., 1994) op identieke of sterk verwante opgaven bij vergelijkbare groepen leerlingen die geen speciale instructie in realistisch modelleren en interpreteren ontvingen.⁵ De Pear-

son correlatiecoëfficiënt tussen de uitslag van de leerlingen uit de E-klas op de natoets als geheel en de retentietoets bedroeg .74 ($p < .01$).

5 Resultaten in verband met de bijkomende onderzoeksvragen

Zoals aangekondigd in paragraaf 3.2, vergeleken we ook het effect van het experimenteel programma bij leerlingen met een verschillend niveau van rekentaalvaardigheid én bij de verschillende soorten modellerings- en interpretatie-moeilijkheden. Verder werd ook nog nagegaan of de (realistische) antwoorden en aanpakwijzen van de leerlingen uit de E-klas tijdens de natoets en de retentietoets kwalitatief verschilden van die uit de voortoets en voerden we een gedetailleerde analyse door van het concrete verloop van de lessen in de experimentele klas.

Om enig idee te verkrijgen van het verband tussen het niveau van rekentaalvaardigheid en de behaalde leerwinst, berekenden we de percentages RRs voor de P-items uit de voortoets, de natoets en de retentietoets voor de 'sterke', de 'middelmatige' en de 'zwakke' leerlingen uit de E-klas afzonderlijk.⁶ Zoals uit Tabel 4 blijkt, boekten de leerlingen uit de 'sterke' groep veruit de grootste leerwinst.

Daarnaast berekenden we het percentage RRs van de leerlingen uit de E-klas voor de vijf verschillende soorten van P-items uit de voortoets, de natoets en de retentietoets afzonderlijk (zie Tabel 5). De resultaten suggereren dat het programma niet even effectief was voor alle soorten P-items. Zoals uit Tabel 5 blijkt, was de toename van het percentage RRs veruit het grootst bij de items die te maken hadden met

Tabel 4

Aantal (N) en percentage (%) realistische reacties (RRs) op de P-items van de voortoets, de natoets en de retentietoets voor de wiskundig 'sterke', 'middelmattige' en 'zwakke' leerlingen uit de experimentele klas

Niveau	Voortoets		Realistische reacties Natoets		Retentietoets	
	N*	%	N	%	N	%
Zwak (n=6)	4	7%	20	33%	14	23%
Middelmattig (n=6)**	4	7%	24	40%	20	33%
Sterk (n=6)	5	8%	47	78%	37	62%

* De voortoets, de natoets en de retentietoets bestonden allemaal uit 10 P-items.

** Wegens ziekte kon één van de zeven leerlingen uit de middelmattige groep niet deelnemen aan de natoets.

het adequaat interpreteren van de uitkomst van een niet-opgaande deling (zie item 1a en 1b uit Tabel 1).

De vergelijking van de preciese aard van de RRs die door de leerlingen uit de E-klas voor en na de training werden gegeven, bracht volgende verschillen aan het licht (voor details zie Verschaffel, 1995). Ten eerste kwam het tijdens de natoets en de retentietoets relatief gezien veel vaker voor dat een 'realistisch antwoord' (RA) op een P-item vergezeld was van een schriftelijke commentaar waarin expliciet gewezen werd op de modellerings- of interpretatiemoeilijkheid; deze realistische commentaren waren over het algemeen ook veel duidelijker geformuleerd dan de (schaarse) realistische opmerkingen die tijdens de voortoets werden gemaakt. Een tweede verschilpunt betrof de berekeningswijzen van de leerlingen. Tijdens de voortoets troffen we op de antwoordbladen van de leerlingen uit de E-klas uitsluitend sporen aan van het gebruik van procedures voor cijferrekenen of voor gestandaardiseerd hoofd-

rekenen. Tijdens de natoets en de retentietoets werden bij 1/3 van de leerlingen uit de E-klas duidelijke sporen gevonden van het gebruik van meer informele werkwijzen (zoals 'uitvoering tellen' bij de toetsitems die betrekking hadden op het thema van de tweede LE; zie item 2a en 2b uit Tabel 1) en/of van tekeningen of schetsen van de probleemsituatie (met name bij de toetsitems die betrekking hadden op het thema van de vierde LE; zie item 4a en 4b uit Tabel 1). Ten derde kwam het tijdens de natoets ook enkele keren voor dat een leerling uit de E-klas een (ongepaste of ronduit foutieve) 'realistische reactie' gaf op één van de S-items. Zo beantwoordden twee 'zwakke' leerlingen uit de E-klas het volgende S-item uit de natoets "Chris verzamelt strips. Hij heeft 19 boeken van Buck Danny, 27 boeken van Suske en Wiske en 15 strips van Blueberry. Hoeveel strips telt Chris' verzameling?" met "Dat kan je niet weten, want er kunnen dubbele strips tussen zitten". Wellicht baseerden deze leerlingen zich voor het geven van deze 'realistische reac-

Tabel 5

Aantal (N) en percentage (%) realistische reacties (RRs) van de leerlingen uit de experimentele klas (n = 18) op de vijf verschillende soorten van P-items uit de voortoets, de natoets en de retentietoets

Opgavetype	Voortoets		Realistische reacties Natoets		Retentietoets*	
	N	%	N	%	N	%
LE 1**	8	22%	30	83%	16	89%
LE 2	0	0%	20	56%	6	33%
LE 3	5	14%	13	36%	4	22%
LE 4	0	0%	16	44%	5	28%
LE 5	0	0%	12	33%	5	28%

* Alleen de vijf nabije-transferitemen uit de retentietoets zijn in deze tabel opgenomen. De vijf verre-transferitemen zijn niet opgenomen, omdat de onderliggende modellerings- of interpretatiemoeilijkheid niet (duidelijk) onder te brengen is in één van de vijf topics die in het experimenteel programma aan bod kwamen.

** De topics van de vijf leereenheden zijn: interpreteren van de uitkomst van een niet-opgaande deling (LE 1), modelleren van probleemsituaties rond sets met gemeenschappelijke elementen (LE 2), modelleren van probleemsituaties waarin het twijfelachtig is of een rekenkundige bewerking met de gegeven getallen de exacte uitkomst oplevert (LE 3), rekening houden met relevante contextuele aspecten die niet expliciet in de opgave vermeld staan (LE 4), en discrimineren tussen probleemsituaties die wel en niet gemodelleerd kunnen worden via lineaire proportionaliteit (LE 5).

tie' op de oppervlakkige gelijkheid tussen dit 'probleemloze' S-item en het 'problematisch' uitgangsprobleem van LE 2 van het experimenteel programma, dat eveneens over een stripverzameling ging (zie paragraaf 2.3.1).

De analyse van de videobeelden van de lessen in de E-klas en van al de leerlingnotities hielp ons niet enkel om sommige kwantitatieve onderzoeksresultaten te verklaren, maar leverde tevens belangrijke aanknopingspunten op voor het verbeteren van de diverse aspecten van het experimenteel programma. We beperken ons tot twee belangrijke vaststellingen (voor meer details zie Verschaffel, 1995). Ten eerste stelden we vast dat sommige P-items uit het experimentele programma aanleiding gaven tot overloze discussies tussen leerlingen of groepen van leerlingen die dit item wél en niet realistisch geïnterpreteerd en opgelost hadden. Vooral (groepen van) leerlingen die aanvankelijk een niet-realistisch antwoord hadden gegeven, gingen tijdens het klasgesprek geregeld ijverig op zoek naar (extreme, vergezochte) condities waaronder hun oorspronkelijk antwoord - dat op routine-matige wijze tot stand gekomen was - toch nog zou kunnen opgaan. Zo trachtten de leerlingen uit de groep die de tweede vraag van het uitgangsprobleem van LE1 met '38' in plaats van '37 kisten' geantwoord had, zich nog te verdedigen door op te werpen dat "vier zeer sterke soldaten samen misschien nog wel één kist konden dragen" en opperde een andere dat er "misschien wel één lichtere kist bij was", en kostte het de andere leerlingen (en de lesgever) heel wat moeite om deze leerlingen ervan te overtuigen dat dergelijke assumpties strijdig waren met de informatie die in de opgavetekst vermeld staat. Het regelmatig voorkomen van dergelijke overloze discussies is ons inziens een rechtstreeks gevolg van de aard van de problemen waarmee in het experimenteel programma is gewerkt: in vele gevallen waren deze problemen bewust gekozen en geformuleerd om de traditioneel geschoolde leerling 'op het verkeerde been te zetten'. Blijkbaar probeerden sommige leerlingen, nadat zij beseften dat ze 'in de val gelopen waren', zich achteraf nog te redden door op zoek te gaan naar contextuele condities waaronder hun oorspronkelijk (niet-realistisch antwoord) kon worden gehandhaafd. Ten tweede, bleek uit de analyse van de

videobeelden van de lessen in de E-klas en van het schriftelijk leerlingenmateriaal dat niet alle leerlingen even actief betrokken waren bij de lessen. Zowel tijdens het groepswork als bij de klasdiscussies namen enkele (knappere) leerlingen sterk het voortouw.

6 Discussie en perspectieven

Het doel van onderhavige studie bestond erin een antwoord te geven op de vraag of het mogelijk is om betekenisvolle positieve leereffecten te bereiken op het vlak van realistisch modelleren en interpreteren van wiskundige toepassingsproblemen door basisschoolleerlingen onder te dompelen in een nieuwe, krachtige leeromgeving waarin vraagstukken opgevat worden als oefeningen in realistisch modelleren en interpreteren, eerder dan als oefenstof voor het indrillen van stereotiepe, formele oplossingsmethoden. Deze studie geeft daar een positief antwoord op. Immers, de experimentele leergang leidde tot een betekenisvolle ontwikkeling van de dispositie en de vaardigheid van leerlingen uit de E-groep om bij het oplossen van vraagstukken rekening te houden met de reële context waarin het rekenprobleem is ingebed. De eerder geringe en niet-significante vooruitgang van de leerlingen uit de eerste controlegroep kan als een duidelijke indicatie worden beschouwd dat de gekende neiging van leerlingen om vraagstukken op niet-realistische wijze aan te pakken zeer weerbarstig is en derhalve niet via een beperkte en eenvoudige instructiemaatregel om te buigen is in een dispositie tot realistisch modelleren en interpreteren (zie ook Verschaffel e.a., ter perse).

Bij deze positieve onderzoeksresultaten moet echter een aantal kritische kanttekeningen worden gemaakt.

Ten eerste worden de gerapporteerde positieve resultaten van onderhavige studie enigszins gehypothekeerd door een aantal methodologische tekorten van deze studie. Zo is er de beperkte omvang van de experimentele groep en van de beide controlegroepen. Ook het onderzoeksinstrumentarium dat gehanteerd werd om de evolutie in de dispositie en de vaardigheid tot realistisch modelleren te evalueren, is voor verbreding vatbaar. We denken daarbij onder andere aan een verdere uitbreiding en di-

versificatie van de P-items uit de schriftelijke toets, maar ook aan het inschakelen van aanvullende instrumenten (zoals een individuele toets, een vragenlijst...) waarmee gepeild kan worden naar eventuele ontwikkelingen in de metacognitieve opvattingen en strategieën van de leerlingen met betrekking tot (het leren oplossen van) rekenvraagstukken.

Ten tweede beklemtonen we dat de P-items uit de natoets en de retentietoets door de leerlingen uit de E-klas alles bij elkaar genomen nog steeds vaak op een niet-realistische wijze beantwoord werden (zie Tabel 2 en 3), en dat het positief effect van de training niet bij alle leerlingen en niet bij alle soorten modellerings- en interpretatieproblemen even duidelijk was (zie Tabel 4 en 5). Uit de analyse van de video-beelden van de lessen en van het schriftelijk leerlingmateriaal is bovendien gebleken dat dit wellicht niet louter op rekening te schrijven is van de beperkte omvang van de training (nl. slechts vijf leereenheden van 2 à 2,5 uur), maar dat er zich daarnaast ook aanpassingen opdringen zowel in de aard van de opgaven waarmee gewerkt wordt (zoals: minder zgn. 'fop'-opgaven en meer échte, realistische problemen) als in de organisatie van het onderwijs (zoals: betere garanties inbouwen dat *alle* leerlingen ervan profiteren).

Tenslotte, hoewel het experimenteel programma in nauwe samenwerking met de leerkracht tot stand kwam en laatstgenoemde zelfs enkele kleinere onderdelen ervan voor z'n rekening nam (zie Verschaffel, 1995), blijft het zo dat deze leergang relatief los stond van het 'gewone' reken/wiskundeprogramma. We beklemtonen dat wij zeker geen voorstander zijn van de invoering in het reken/wiskunde-onderwijs van zo'n speciale lessenreeks waarin leerlingen op een intense en systematische manier getraind worden in het realistisch modelleren en interpreteren van contextgebonden wiskundige problemen, terwijl er in de overige rekenlessen enkel met stereotiepe en eenduidige opgaven wordt (verder)gewerkt. Integendeel, de ontwikkeling van de dispositie tot en vaardigheid in het realistisch modelleren en interpreteren van contextgebonden wiskundige toepassingsproblemen moet door het hele reken/wiskundeonderwijs gestimuleerd en ondersteund worden (zie ook Goffree, 1983; Gravemeijer, 1994; Greer, 1993; Treffers & De

Moor, 1990). In toekomstig onderzoeks- en ontwikkelingswerk kan niet voorbijgegaan worden aan de vraag hoe dit best concreet kan worden gerealiseerd.

Noten

- 1 Het woord tussen haakjes in '(remediërings)-programma' wijst op het feit dat dit programma zich speciaal richt op leerlingen die reeds meerdere jaren ervaring hebben opgedaan met traditioneel vraagstukkenonderwijs waarin weinig speciale aandacht uitgaat naar het leren realistisch modelleren en interpreteren.
- 2 Om praktische redenen was het niet mogelijk om de retentietoets ook in de beide controleklassen af te nemen.
- 3 Bij het categoriseren van reacties als RR of NR werden puur rekentechnische fouten buiten beschouwing gelaten. Wanneer een leerling bij het beantwoorden van een P-item realistisch tewerkgegaan was of bij een verwacht, niet-realistisch antwoord een realistische opmerking had geplaatst maar in zijn rekenwerk één of andere technische fout had gemaakt, werd zijn reactie op dit item dus gescoord als RR.
- 4 Dit is ongeveer evenveel als in het onderzoek van Verschaffel e.a. (1994), waarin een gelijkaardige toets bestaande uit tien P-items en tien S-items aan 75 vijfdeklassers uit drie verschillende scholen aangeboden werd, die in het totaal 17% RRs op de P-items uitlokte (zie paragraaf 1).
- 5 In de constaterende studie bij 75 vijfdeklassers van Verschaffel e.a. (1994) kwamen P-item 6, 7 en 10 uit de retentietoets eveneens voor. In deze studie werden deze opgaven respectievelijk door slechts 3%, 17% en 3% van de leerlingen op realistische wijze beantwoord.
- 6 Voor de plaatsing van de leerlingen in één van de drie vaardigheidsniveaus baseerden we ons op het oordeel van de leerkracht dat eveneens gebruikt was bij de vorming van de heterogene groepen voor de groepstaken.

Literatuur

- Cobb, P. (1989). Experiential, cognitive and anthropological perspectives in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 32-42.

- Corte, E. De, & Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 4, 3-21.
- Corte, E. De, & Verschaffel, L. (1989). Teaching word problems in the primary school. What research has to say to the teacher. In B. Greer & G. Mulhern (Eds.), *New developments in teaching mathematics* (pp. 85-106). London: Routledge.
- Davis, R. B. (1989). The culture of mathematics and the culture of schools. *Journal of Mathematical Behavior*, 8, 143-160.
- Goffree, F. (1983). *Wiskunde en didactiek. Deel 2*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CD-béta Press.
- Greer, B. (1993). The modeling perspective on word problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, 239-250.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Nelissen, J. (1987). *Kinderen leren wiskunde. Een studie over metacognitie en reflectie in het basisonderwijs*. Gorinchem: De Ruiter.
- Nesher, P. (1980). The stereotyped nature of school word problems. *For the Learning of Mathematics*, 1, 41-48.
- Reusser, K. (1988). Problem solving beyond the logic of things: Contextual effects on understanding and solving word problems. *Instructional Science*, 17, 309-338.
- Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J. F. Voss, D. N. Perkins & J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp. 311-343). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Silver, E. A., Shapiro, L. J., & Deutsch, A. (1993). Sense making and the solution of division problems involving remainders: An examination of middle school students' solution processes and their interpretations of solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 117-135.
- Treffers, A., & Moor, E. de (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het rekenwiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2. Basisvaardigheden en cijferen*. Tilburg: Zwijssen.
- Verschaffel, L. (1995). *Leren realistisch modelleren en interpreteren van vraagstukken. Verslag van een onderwijsonderzoek bij leerlingen van de bovenbouw van de basisschool*. (Intern rapport). Leuven: Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie, K.U.Leuven.
- Verschaffel, L., Corte, E. De, & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, 4, 273-295.
- Verschaffel, L., Corte, E. De, & Lasure, S. (in press). Children's conceptions about the role of real-world knowledge in mathematical modeling of school word problems. In W. Schnotz, S. Vosniadou & M. Carretero (Eds.), *Conceptual change*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Verschaffel, L., & Corte, E. De (in press). Word problems. A vehicle for authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school? In P. Bryant & T. Nunes (Eds.), *How do children learn mathematics?* Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Verschaffel, L., & Gravemeijer, K. (1990). Contextrijk reken/wiskunde-onderwijs. In *Gids Basisonderwijs* (Curr. 7420, 1-32). Brussel: Samsom.

Manuscript aanvaard 23-11-1995

Auteurs

L. Verschaffel is Onderzoeksleider bij het Nationaal Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek, België en Deeltijds Hoogleraar aan de Faculteit der Psychologie en Pedagogische Wetenschappen van de K.U. Leuven.

E. De Corte is Gewoon Hoogleraar aan de Faculteit der Psychologie en Pedagogische Wetenschappen van de K.U. Leuven.

Correspondentie-adres: Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie, K.U.Leuven, Vesaliusstraat 2, B-3000 Leuven, België, tel: 32/16/326258, fax: 32/16/326274; e-mail: lieven.verschaffel@ped.kuleuven.ac.be

Teaching realistic mathematical modeling. An exploratory teaching experiment with children of the upper grades of the elementary school.

L. Verschaffel & E. De Corte. Pedagogische Studiën, 1996, 73, 322-337.

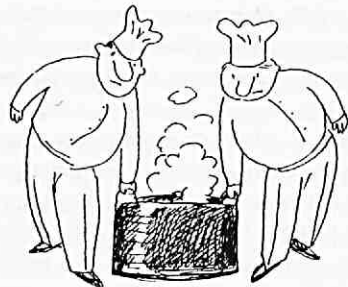
Recent research has convincingly documented elementary school children's tendency to neglect commonsense knowledge and realistic considerations during mathematical modeling of word problems in school arithmetic. The present paper describes the design and the results of a teaching experiment in which a group of 10-11-year olds followed a program wherein word problems are conceived as exercises in mathematical modeling, focussing on the assumptions and appropriateness of the model underlying any proposed solution. The program consists of five learning units of about 2.5 hours each, spread over a period of about 2.5 weeks. During the experiment, pupils from two control classes followed the regular mathematics curriculum. The three groups were given the same pretest and posttest, which contained word problems that could not be modeled in a straightforward and unproblematic way if one seriously takes into account the realities of the context called up by the problem statement. Besides specific training effects, transfer and retention effects were also investigated. The results of the experimental and control groups on the learning, transfer and retention tests provided convincing evidence for the effectiveness of the experimental program for developing in pupils a disposition towards realistic mathematical modeling.

LE 1 Uitgangsprobleem: Uit het soldatenleven
300 soldaten moeten per jeep naar het oefenterrein. Hoeveel jeeps zijn er nodig, als je weet dat er maximum 8 soldaten in één jeep kunnen plaatsnemen?



Als deze soldaten op het oefenterrein aankomen, worden ze naar een loods gebracht. In deze loods staan er een heleboel zware metalen kisten die naar een andere loods moeten worden gedragen. Om één zo'n kist te kunnen dragen, zijn er 8 man nodig. Hoeveel kisten kunnen er door deze 300 soldaten in één keer van de ene naar de andere loods gedragen worden?

Wanneer de soldaten terug in de kazerne zijn, hebben ze allemaal honger als een paard. De kok heeft voor hen 300 liter hutspot klaargemaakt. Hij heeft daarvoor 8 grote ketels gebruikt, die precies evenveel hutspot bevatten. Hoeveel liter hutspot zit er in één ketel?



Na het avondeten moeten de 300 soldaten nog marcheren. Ze moeten zich daarvoor opstellen in rijen van 8. Hoeveel soldaten blijven er over nadat er zoveel mogelijk rijen van 8 gevormd zijn?



LE 1 Uitgangsprobleem: Uit het soldatenleven
(antwoordenblad)

1 *Hoeveel jeeps zijn er nodig?*

Bewerking:

Antwoord:

2 *Hoeveel kisten kunnen er in één keer naar de andere loods gedragen worden?*

Bewerking:

Antwoord:

3 *Hoeveel liter hutspot zit er in één ketel?*

Bewerking:

Antwoord:

4 *Hoeveel soldaten blijven er over nadat er zoveel mogelijk rijen van 8 soldaten gevormd zijn?*

Bewerking:

Antwoord:

Bezinning

Is er jullie iets speciaals opgevallen bij het beantwoorden van deze vier vragen?

LE 1: Toepassingen

1 Op een familiefeest krijgen Paul, Sven, Kurt, Bram, Sarah en Charlotte van hun opa een doos waarin 75 ballonnen zitten. Zij verdelen die ballonnen eerlijk onder elkaar. Hoeveel ballonnen krijgt ieder?

Bewerking:

Antwoord:

2 Op de ouderavond van de school komen 81 ouders. Aan één tafel kunnen maximum 6 ouders zitten. Hoeveel tafels moeten er geplaatst worden?

Bewerking:

Antwoord:

3 Er worden 250 eieren in dozen van 12 ingepakt. Hoeveel volle dozen kunnen er worden gemaakt en hoeveel eieren blijven er over?

Bewerking:

Antwoord:

4 Vader heeft op de markt een kist appels gekocht voor 300 frank. Wanneer hij thuiskomt, weegt hij de appels. De weegschaal wijst 24 kg. aan. "Dat is dan ... frank per kg", zegt vader.

Bewerking:

Antwoord:

LE 1: Individuele opdracht

Maak zelf drie vraagstukken rond eenzelfde bewerking, nl. $100 : 8 =$.

Zorg ervoor dat het antwoord op het eerste vraagstuk '12' is, het antwoord op het tweede vraagstuk '13' is, en het antwoord op het derde vraagstuk '12,5'.

Veel succes!

Vraagstuk 1 (antwoord: 12)

Vraagstuk 2 (antwoord: 13)

Vraagstuk 3 (antwoord: 12,5)
