

De invloed van het gebruikte leerboek op het maken van specifieke fouten bij wiskunde problemen*

J. Chr. Perrenet

Samenvatting

Wiskundemethoden verschillen in didactische opzet. In onderzoek van De Leeuw, Meijer, Perrenet en Groen (1988) met een zogeheten transfertest werd tussen drie methoden geen verschil gevonden op prestaties van vwo-leerlingen aan het einde van het derde leerjaar. Dit artikel beschrijft een nadere analyse van dat onderzoeksmateriaal op het voorkomen van enkele specifieke fouten in de schriftelijke uitwerkingen voor de leerlingen van de transfertestopgaven. In de methodekenmerken worden hypothesen afgeleid betreffende twee typen fouten: rekenfouten en wiskundetaal-fouten (fouten in notatie en terminologie). Bij beide fouttypen wordt controle voor de invloed van de factor wiskundige vaardigheid en de factor leraar geen verschil gevonden. De leerlingen van de methode met vanaf het begin de meeste nadruk op wiskundetaal maken tegen de verwachting in meer wiskundetaal-fouten, maar dit verschil is niet significant. De rol van formele wiskundetaal in het wiskunde-onderwijs wordt besproken in relatie tot het nieuwe wiskundeplan voor de onderbouw.

Inleiding

Onderzoekers verschillen van mening over het effect van de gebruikte methode op de prestaties van de leerlingen. Binnen het domein van rekenen en wiskunde zien we bijvoorbeeld in Pedagogische Studiën de kritiek van Van den Heuvel-Panhuizen (1990) op methodenonderzoek van Harskamp en Suhre. Zij rapporteren (bijvoorbeeld Harskamp, 1988), dat er glo-

baal slechts marginale verschillen zijn in toetsprestaties tussen leerlingen van de basisschool, die tien verschillende reken/wiskundemethoden hebben gebruikt. Wel is er een samenhang tussen de mate van aandacht voor een bepaald leerstofonderdeel en de prestaties op dat onderdeel, de zogenaamde analogie van Walker en Schaffarzick (1974): methoden doen het beter met betrekking tot die leerstofonderdelen in de toetsen die in de betreffende methode de meeste aandacht krijgen. Van den Heuvel-Panhuizen uit kritiek op uitgevoerde leerstofanalyse en de implementatiecriteria van Harskamp en Suhre, maar wijst vooral ook op het belang van de op het eerste gezicht zo vanzelfsprekende analogie van Walker en Schaffarzick. Kennelijk kunnen leerboeken gezien worden als een krachtig middel om de leerprestaties van leerlingen te beïnvloeden. In Gravemeijer, Van den Heuvel-Panhuizen en Van der Ploeg (1990) wordt gesteld dat verschillende leermethoden leiden tot verschillende prestatieprofielen. Voor het vaststellen van die verschillen zijn echter wel verfijnde toetsen nodig, waarop de verschillen tot uiting kunnen komen. Globale totaalscores zijn daartoe als meting te grof.

Een alternatieve aanpak werd gehanteerd door De Leeuw, Meijer, Perrenet en Groen (1988) bij de vergelijking van de prestaties van leerlingen van drie verschillende wiskundemethoden. Naast een toets met standaardopgaven construeerden zij een zogenaamde transfertest. De toetsopgaven stegen qua moeilijkheid uit boven het niveau van de opgaven in de gebruikte leerboeken en vereisten toepassing van wiskundige kennis en vaardigheden in nieuwe situaties. Bij de opgaven werd optionele hulp geboden in de vorm van hints. De hoeveelheid gebruikte hulp werd in de score verdisconteerd. In Pedagogische Studiën werd eerder over dit onderzoek geschreven (Meijer, Perrenet & Riemersma, 1988). De resultaten

* Met dank aan W. Groen voor zijn commentaar op een eerdere versie van dit artikel en aan J. Meijer ook voor zijn methodologische adviezen.

(zie ook De Leeuw e.a., 1988) gaven aan dat er geen verschil is op de transfertestscore, wanneer werd gecorrigeerd voor het niveau van wiskundige vaardigheid (de vaardigheid in het oplossen van standaardproblemen¹). Ook op dat niveau van wiskundige vaardigheid is er geen methode-effect: het effect van de factor school is veel belangrijker. Een andere onderzoeker, Van Streun (1990), benadrukte juist de invloed van het (wiskunde-)leerboek. Behalve eigen onderzoek (Van Streun, 1989) voerde hij hiervoor ook de resultaten van het zojuist genoemde transfertestproject aan, die hij op een andere wijze interpreteerde. Meijer, Perrenet en Groen (1992) bestreden deze interpretatie en besloten met de opmerking, dat het gebruikte leerboek zeker enige invloed zal hebben, maar dat die invloed in de regel overschaduwd wordt door leerling- en groepeeringskenmerken.

Dit artikel beschrijft een nadere analyse op het materiaal van de transfertest, de schriftelijke uitwerkingen van de opgaven door de leerlingen. Daarbij is nagegaan in hoeverre het voorkomen van bepaalde specifieke fouten is toe te schrijven aan het al dan niet gebruiken van een bepaald leerboek. Op grond van de leergangprofielen die door analyse binnen het transfertestproject werden opgeleverd, worden hypothesen opgesteld betreffende de mate van voorkomen van bepaalde fouten bij bepaalde groepen leerlingen. Net als bij het transfertest-onderzoek dient wiskundige vaardigheid bij deze hypothesen als controle variabele. In een latere analyse wordt ook de leraar als factor opgenomen. De resultaten worden gerelateerd aan de aanstaande leerplanhervorming bij wiskunde in de onderbouw van het voortgezet onderwijs.

2 Methode

2.1 Leerganganalyse

De drie onderzochte methoden - Sigma, Getal & Ruimte en Moderne Wiskunde² - hadden de naam te verschillen in de mate, waarin nadruk gelegd wordt op het oefenen van bepaalde strakke oplossingswijzen of juist het stimuleren van en vergelijken van variatie in aanpak. Hoe dwingerder het cognitieve proces behorend bij een oplossingsmethode is voorgeschreven, des te meer algoritmisch de methode

genoemd kan worden (De Leeuw, 1979)³. Het algoritmisch karakter van een methode werd in het transfertestproject bepaald aan de hand van a) de mate waarin oplossingsmethoden door herhaling geoefend worden, b) de mate van volledigheid en herkenbaarheid van uitgewerkte voorbeelden en c) de mate waarin bij uitgewerkte voorbeelden de betreffende oplossingsmethode dwingend wordt voorgeschreven. Uit de analyse kwam Moderne Wiskunde duidelijk als de minst algoritmische methode naar voren en Sigma als de meest algoritmische methode. Een tweede kenmerk is de mate van koppeling aan de realiteit, de mate waarin leerstof en opgaven in een realistische context worden aangeboden. Dit aspect bleek in Moderne Wiskunde veel meer vertegenwoordigd dan in Getal & Ruimte en Sigma. Een derde kenmerk is de mate van gebruik van wiskundige taal: formele terminologie en notaties. Getal & Ruimte kwam naar voren als de methode, waarin - meer dan in Sigma en vooral meer dan in Moderne Wiskunde - daaraan aandacht werd besteed. Deze wiskundige taal was in de methoden Sigma en Moderne Wiskunde niet geheel afwezig, maar kwam pas later en minder nadrukkelijk naar voren. Een meer uitgebreide beschrijving van de leerganganalyse en de resultaten is te vinden in De Leeuw e.a. (1988).

In grote lijnen bleek het ook mogelijk de drie methoden te plaatsen binnen de categorisering die Treffers (1987) geeft voor reken- en wiskundemethoden. In Meijer (1990) wordt op die wijze Sigma mechanistisch genoemd, Getal & Ruimte structuralistisch en Moderne Wiskunde realistisch. Mechanistisch wil dan zeggen: "nadruk op oefenen van vaardigheden, weinig aandacht voor inzicht, noch voor toepassingen in de realiteit. Structuralistisch wil zeggen: gericht op inzicht in de structuur van het vak, achteraf beperkte toepassingen in de realiteit. En realistisch wil zeggen: de realiteit zowel als bron en toepassingsgebied voor het wiskunde leren, gericht op inzicht in de structuur van het vak gekoppeld aan de realiteit.

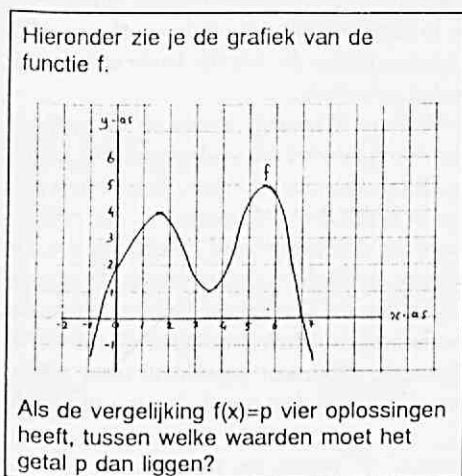
2.2 Meetinstrumenten

De transfertest bestond uit 15 opgaven, waarvan elke leerling er vijf kreeg aangeboden. De opgaven vereisten gebruik van kennis uit het leerstofdomein functies in nieuwe situaties. Twee voorbeelden zijn gegeven in Figuur 1 en

Figuur 2. Bij de bepaling of een antwoord goed of fout was, werd binnen het transfertestonderzoek vooral gelet op begripsfouten in tegenstelling tot meer technische fouten, die in het algemeen binnen het wiskunde-onderwijs als relatief minder ernstig beschouwd worden. De technische fouten hadden dus geen invloed op de transfertestscore. Op de transfertest werd geen methode-effect gevonden (De Leeuw e.a., 1988). Binnen de categorie van de technische fouten kon een eventueel effect echter niet tot uitdrukking komen. Mede daarom werd deze soort fouten gekozen voor het nadere onderzoek in deze studie naar methode-effecten. De tweede reden is, dat juist op door docenten als minder zwaar beoordeelde fouten de kans groter is eventueel een methode-effect te vinden. Immers: methoden, die zwaardere fouten bij hun leerlingen veroorzaken, zullen zich niet lang handhaven. Het gaat bij de onderzochte methoden om gevestigde methoden, die zich in de praktijk juist als bruikbaar hebben bewezen.

Met technische fouten bedoelen we fouten bij het gebruik van wiskundige taal (wiskundetaal-fouten) en rekenfouten.

Onder *wiskundetaal-fouten* verstaan we alle afwijkingen van het wiskundig taalgebruik, met name notaties en terminologie zoals gehanteerd in de drie leerboeken. We geven een voorbeeld aan de hand van de opgave in Figuur 1.



Figuur 1. Voorbeeldopgave bij wiskundetaal-fouten

Een correcte formele notatie van het eindantwoord is $1 < p < 4$ of $p \in \langle 1, 4 \rangle$. Voorbeelden van onjuiste notaties zijn $4 < p < 1$ en $p = \langle 1, 4 \rangle$. Een antwoord als $-0.7 < p < +7$ duidt op een begripsfout – er is afgelezen op de horizontale in plaats van op de verticale as – maar de notatie is correct. Een voorbeeld van onjuiste terminologie is het verwarren van termen zoals vierhoek en vierkant bij een andere opgave van de transfertest. Er zijn vijf opgaven, waarin wiskundetaal-fouten worden gemaakt. In de analyse zijn die leerlingen betrokken die minstens twee van die vijf opgaven hebben gemaakt. Als maat voor het voorkomen van fouten in notatie en terminologie is genomen het aantal door de leerling gemaakte opgaven met dergelijke fouten ten opzichte van het aantal door de leerling gemaakte opgaven, waarin binnen de gehele groep dergelijke fouten voorkomen, uitgedrukt in een percentage. Een leerling bijvoorbeeld, die drie opgaven heeft gemaakt, waarin binnen de gehele groep wiskundetaal-fouten voorkomen, en bij twee van die opgaven dergelijke fouten maakt, krijgt een score van 67.

Onder *rekenfouten* verstaan we fouten bij de elementaire rekenoperaties als optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen en ook slordigheden bij het overnemen van gegevens. Als voorbeelden geven we de antwoorden $v=56+12t$ en $v=81+12t$ bij de opgave van Figuur 2. Beide antwoorden zijn ontstaan uit een fout bij het vermenigvuldigen van 9 met 8. Er zijn vier opgaven, waarin rekenfouten voorkomen, waarvan de leerlingen er maximaal twee gemaakt kunnen hebben. Als maat voor het voorkomen van rekenfouten wordt weer genomen het aantal opgaven met een rekenfout ten opzichte van het aantal gemaakte relevante opgaven, net als bij de wiskundetaal-fouten.

Naast de beide effectmaten nemen we twee controlevariabelen op, *wiskundige vaardigheid* en de factor *leraar*. De leraar is opgenomen om een controle uit te oefenen voor de effecten van groeperingsfactoren. De wiskundige vaardigheid dient als alternatief voor een bepaling van het beginniveau (vóór het gebruik van de methoden), dat niet werd gemeten. De test voor wiskundige vaardigheid bestond uit 19 – met 0 of 1 gescoorde – items over het leerstofdomein functies, voorwaardelijke kennis om de transfertest te kunnen maken. De items waren geselecteerd en aangepast

Een meisje werkt 's zaterdags als kassière in een supermarkt. Zij verdient daar f 9,- per uur; voor overwerk krijgt ze f 12,- per uur. De overwerktijd gaat in, nadat er 8 uren zijn gewerkt. Ze moet elke zaterdag overwerken, maar niet altijd even lang. We noemen v het *totale* aantal guldens dat ze verdient op een bepaalde zaterdag en t het aantal uur *overwerk* van die dag. Bedenk nu een formule, waarmee je v kunt berekenen als je t weet.

Figuur 2. Voorbeeldopgave bij rekenfouten

op basis van de leerdoelgerichte toetsen van het CITO (1982, 1986). Binnen het tranfertestproject (De Leeuw e.a., 1988) werd voor deze test een redelijke betrouwbaarheid vastgesteld (Cronbachs $\alpha = .70$).

2.3 Steekproef

De transfertest werd afgenomen bij 325 leerlingen uit de derde klas van het vwo, verdeeld over 8 scholen, 10 leraren en 12 klassen. De verdeling is weergegeven in Figuur 3. Bij de methode Moderne Wiskunde bijvoorbeeld waren twee scholen in het onderzoek betrokken; bij de ene school nam één leraar deel met twee klassen, bij de andere school twee leraren met ieder één klas. Per klas waren er 22 tot 30 leerlingen.

Elke leerling kreeg een subset van vijf opgaven. Bij de genoemde typen fouten waartoe alleen bepaalde opgaven aanleiding geven, is dus telkens slechts een deel van de leerlingen relevant. Van de leerlingen, waarbij ook de wiskundige vaardigheidstest werd afgenomen, kon bij 177 het percentage wiskundetaalfouten vastgesteld worden en bij 261 het percentage rekenfouten.

Niet elke leerling kreeg dezelfde opgaven aangeboden, maar per klas (respectievelijk leraar, school, methode) was dat wel het geval (toetsen met chi-kwadraat gaf aan, dat afwijkingen van een overeenkomstige verdeling van opgaven aan toeval konden worden toegeschreven, vrijwel altijd met een kans groter dan 95%). Dat betekent dat uitspraken over gemid-

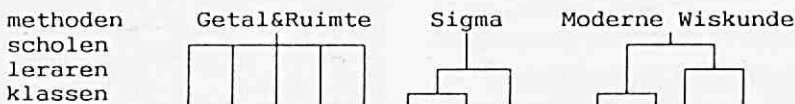
delden op het niveau van klas, leraar, school en methode goed mogelijk zijn. Uitspraken over de mate van fouten van een individuele leerling zijn minder goed mogelijk, aangezien bij beide typen fouten de diverse opgaven bleken te verschillen in de mate waarin ze fouten genereren, zoals bleek uit een chi-kwadraat toets.

2.4 Hypothesen

De hypothesen worden afgeleid uit de leerboekkenmerken zoals vermeld in paragraaf 2.1 en in overeenstemming met de analogie van Walker en Schaffarzick, beschreven in paragraaf 1.

Getal & Ruimte viel op, in vergelijking met Sigma en Moderne Wiskunde, door het vroegtijdige en intensieve formele taalgebruik. Nadrukkelijk zijn wiskundige notaties en termen vanaf de brugklas aanwezig. We poneren de hypothese dat bij de leerlingen die Getal & Ruimte gebruiken gemiddeld minder fouten in terminologie en notatie voorkomen dan bij de leerlingen die één der beide andere methoden gebruiken.

Moderne Wiskunde kwam als de methode naar voren met het minst algoritmische karakter. De opgave-uitwerkingen zijn het minst precies; er is minder vaak sprake van een eenduidig bepaald eindantwoord op een opgave. De mindere aandacht voor precisie in de uitwerkingen zou tot slordigheid kunnen leiden. Te verwachten is dat de leerlingen die Moderne Wiskunde gebruiken gemiddeld meer rekenfouten zullen maken dan de leerlingen van de



Figuur 3. Verdeling van scholen, leraren en klassen per methode

andere methoden.

In beide hypothesen worden dus de resultaten van de leerlingen van een bepaalde methode vergeleken met de resultaten van de leerlingen van beide andere methoden. Voorspeld wordt dat bij Getal & Ruimte de minste wiskundetaal-fouten voorkomen en bij Moderne Wiskunde de meeste rekenfouten. De hypothese met betrekking tot de rekenfouten moet gezien worden als een exploratieve hypothese. Bij het toetsen van de hypothesen en verdere analyse wordt gebruik gemaakt van het programma SPSS/PC+ (SPSS Inc., 1988).

3 Resultaten

Rekenfouten worden in veel mindere mate gemaakt dan wiskundetaal-fouten. De gemiddelde percentages zijn 15.37 voor de wiskundetaal-fouten en 6.32 voor de rekenfouten (zie Tabel 1 en 2). Onder de wiskundetaal-fouten treffen we veel onjuiste notaties aan voor de uitdrukking 'p tussen 1 en 4'. Naast de voorbeelden, gegeven in 2.1, noemen we 'p tussen <1,4>', een onjuiste combinatie van formele en informele taal. Verder zien we problemen met de notatie van een functie (fx i.p.v. f(x)). Naast het voorbeeld van de terminologie-

fout in 2.1 zien we ook ongelukkige aanduidingen van de term richtingscoëfficiënt. Duidend op de twee rechten, voorgesteld door de vergelijkingen $y=x+3$ en $y=x+1000$, wordt bijvoorbeeld gezegd dat 'de x-en hetzelfde zijn'; bedoeld is: 'de richtingscoëfficiënten zijn hetzelfde'. Bij de weinige rekenfouten gaat het voornamelijk om vermenigvuldigingsfouten (zie de voorbeelden in 2.1) en verder om verissingen bij grote getallen (100 of 10.000 in plaats van 1000).

In Tabel 1 geven we een overzicht van de mate waarin de wiskundetaal-fouten worden gemaakt door de leerlingen van Getal & Ruimte in vergelijking met die van de beide andere methoden. Tevens zijn de resultaten voor wiskundige vaardigheid vermeld.

In Tabel 2 staan de gegevens voor de rekenfouten, waarbij in overeenstemming met de hypothese de methoden op een andere wijze gegroepeerd zijn: nu is Moderne Wiskunde tegenover beide andere methoden geplaatst. Ook voor deze groep leerlingen zijn de gegevens voor wiskundige vaardigheid aangegeven.

We zien dat bij de rekenfouten de gemiddelden verschillen in de voorspelde richting. Tabel 2 toont, dat bij de leerlingen van Moderne Wiskunde meer rekenfouten worden gemaakt

Tabel 1

Overzicht percentage wiskundetaal-fouten en niveau wiskundige vaardigheid bij gebruikers van Getal & Ruimte versus Moderne Wiskunde/Sigma

methode	aantal lln.	percentage wiskundetaal-fouten		niveau wiskundige vaardigheid	
		gemid.	st.dev.	gemid.	st.dev.
Getal & Ruimte	75	20.11	28.30	10.24	3.44
Mod. Wisk. of Sigma	102	11.89	21.96	10.74	3.24
Totaal	177	15.37	25.10	10.53	3.32

Tabel 2

Overzicht percentage rekenfouten en niveau wiskundige vaardigheid bij gebruikers van Moderne Wiskunde versus Getal & Ruimte/Sigma

methode	aantal lln.	percentage rekenfouten		niveau wiskundige vaardigheid	
		gemid.	st.dev.	gemid.	st.dev.
Moderne Wiskunde	88	9.09	26.85	11.19	2.96
Getal & Ruimte of Sigma	173	4.91	19.93	9.80	3.46
Totaal	261	6.32	22.54	10.27	3.36

dan bij de leerlingen van de andere methoden (Getal & Ruimte of Sigma). Tabel 1 laat echter zien, dat bij de leerlingen van Getal & Ruimte meer wiskundetaal-fouten worden gemaakt dan bij de leerlingen van Moderne Wiskunde of Sigma en dat is tegengesteld aan de voorspelling. Ten slotte valt in beide tabellen op, dat de standaarddeviaties bij de gemiddelde foutenpercentages relatief groot zijn.

Om de hypothesen te toetsen moeten we corrigeren voor het niveau van wiskundige vaardigheid. Covariantie-analyse met wiskundige vaardigheid als covariaat resulteert bij de rekenfouten in een niet significant verschil ($p=.108$; $F=2.59$ bij vrijheidsgraden 1 en 258). We vinden dus geen methode-effect op de mate waarin rekenfouten worden gemaakt. Voor de wiskundetaal-fouten blijkt dat er, ook na controle voor niveau van wiskundige vaardigheid, geenszins sprake is van een kleinere mate van voorkomen van wiskundetaal-fouten bij de leerlingen van Getal & Ruimte in vergelijking met die van Moderne Wiskunde en Sigma. Eerder het tegendeel lijkt het geval. Er is een trend tegen de voorspelde richting in ($p=.043$; $F=4.23$ bij vrijheidsgraden 1 en 174)⁴.

Vervolgens nemen we de leraar als extra controlefactor op. Tabel 3 presenteert de gegevens voor de wiskundetaal-fouten en wiskundige vaardigheid gegroepeerd per leraar.

Bij de analyse moet er rekening mee worden gehouden dat het gaat om een genest design met de factor leraar binnen de factor methode: eenzelfde methode wordt wel door meerdere leraren gebruikt, maar eenzelfde leraar ge-

bruikt slechts één methode (zie ook Figuur 3). Simultane toetsing van de effecten van leraar en methode met daarbij wiskundige vaardigheid als covariaat resulteert opnieuw in een trend in de richting tegengesteld aan de voorspelling ($p=.075$; $F=4.35$ bij vrijheidsgraden 1 en 7). De hypothese, dat de leerlingen van Getal & Ruimte minder wiskundetaal-fouten maken, moet verworpen worden. Interessant is het daarbij nog te vermelden dat de leerlingen van Moderne Wiskunde en Sigma wel in gelijke mate kiezen voor formeel taalgebruik (bijvoorbeeld: $1 < p < 4$ of $p \in \langle 1, 4 \rangle$) of informeel taalgebruik (bijvoorbeeld: p tussen 1 en 4) als de leerlingen van Getal & Ruimte.

Een zelfde analyse bij de rekenfouten laat zien dat er ook in dat geval geen sprake is van een methode-effect. Bij controle voor de effecten van wiskundige vaardigheid en de leraar is het verschil in de voorspelde richting niet significant ($p=.129$; $F=2.97$ bij vrijheidsgraden 1 en 7).

4 Conclusies en discussie

We vatten de gevonden resultaten samen.

Na controle voor het niveau van wiskundige vaardigheid en de factor leraar is er geen verschil tussen methoden ten aanzien van het voorkomen van rekenfouten. Wel is er een trend in de voorspelde richting. Ook ten aanzien van wiskundetaal-fouten is er geen verschil na controle voor wiskundige vaardigheid en de factor leraar. Nu is er echter een trend te-

Tabel 3

Overzicht percentage wiskundetaal-fouten en niveau wiskundige vaardigheid over de verschillende leraren

methode	leraar	aantal lln.	percentage wiskundetaal-fouten		wiskundige vaardigheid	
			gemid.	st.dev.	gemid.	st.dev.
Getal & Ruimte	1	15	22.20	29.82	10.07	2.76
Getal & Ruimte	2	16	7.81	18.67	14.13	2.42
Getal & Ruimte	3	16	20.31	30.58	8.44	2.13
Getal & Ruimte	4	13	24.39	35.16	11.08	3.15
Getal & Ruimte	5	15	27.20	25.74	7.47	2.33
Sigma	6	29	10.90	24.50	11.17	2.78
Sigma	7	14	20.21	32.16	7.29	2.13
Moderne Wiskunde	8	34	11.47	17.71	12.35	2.73
Moderne Wiskunde	9	12	5.50	12.85	9.92	3.50
Moderne Wiskunde	10	13	12.15	19.99	10.00	3.24
Totaal		177	15.37	25.10	10.53	3.32

gen de voorspelde richting in.

De gevonden resultaten komen in grote lijn overeen met die van het in de inleiding genoemde onderzoek van De Leeuw e.a. en dat van Harskamp en Suhre. Ook bij deze onderzoeken werden geen methode-effecten gevonden. Toch volgen we Harskamp en Suhre niet in hun opvatting dat methoden er eigenlijk weinig toe doen. Ten aanzien van de rekenfouten kan het uitblijven van het voorspelde effect veroorzaakt zijn door de geringe frequentie van voorkomen over de totale groep. De betreffende opgaven lijken als meetinstrument voor dit type fouten minder geschikt. Bij de wiskundetaal-fouten is de frequentie hoger. Bij de onderzoeksopzet is echter een aantal kanttekeningen te plaatsen - we zullen dat doen aan het einde van deze paragraaf - op grond waarvan ook aan het uitblijven van een methode-effect bij de wiskundetaal-fouten geen harde conclusies verbonden kunnen worden. We vermoeden dat methoden een verschillende invloed op de leerresultaten kunnen hebben, maar op een meer complexe wijze dan volgens de in de inleiding genoemde analogie van Walker en Schaffarzick. We lichten dit toe met het oog op de wiskundetaal.

Wiskundetaal en didactiek

De leerlingen die meer op wiskundetaal getraind zijn maken niet minder wiskundetaal-fouten. Er is zelfs een verschil in de tegengestelde richting, zij het niet significant. We zien in dit kleine verschil een indicatie van een prestatieprofiel, zoals dat volgens Van den Heuvel-Panhuizen (1990) zich zou moeten openbaren bij verfijnde toetsing. Dat profiel komt echter niet overeen met de voorspelling van Walker en Schaffarzick (1974). Zij stelden dat leerresultaten vooral een afspiegeling zijn van opname en nadruk van leerstof in een leerboek. Onze resultaten geven juist een indicatie ervoor dat het leerboek met de meeste nadruk op wiskundetaal er op dit punt het slechtst uitkomt. Volgens ons is niet alleen de aandacht die een bepaald onderwerp krijgt van belang, maar ook de didactiek, dat wil zeggen de manier van aandacht, het moment van aandacht⁵. We zien in onze resultaten een indicatie ervoor dat vroeg intensief gebruik van formele notaties en terminologie didactisch minder verantwoord is. Steun hiervoor is te vinden bij de binnen Ne-

derland belangrijke stroming van het *realistisch wiskunde-onderwijs*. We behandelen opvattingen van Van Hiele, Freudenthal en Treffers. Van Hiele is een voorloper van deze stroming; Freudenthal en Treffers hebben het realistisch wiskunde-onderwijs theoretisch gefundeerd.

Van Hiele (1973) geeft aan, dat de taal van het onderwijs moet aansluiten bij die van de leerling. De leerling moet veel concrete ervaring met begrippen opdoen (bijvoorbeeld knippen en vouwen bij meetkundige figuren) alvorens de vaktaal kan worden geïntroduceerd.

Freudenthal (1978, 1983) pleit voor opbouw van de wiskunde vanuit de werkelijkheid naar analogie van de historische ontwikkeling. Het taalgebruik moet verlopen van actief-demonstratief naar feitvaststellend functioneel. Een dergelijke verloop zit in de volgende reeks uitspraken⁶:

- $3^2=9$ dus 3 is de wortel van 9; $5^2=25$ dus 5 is de wortel van 25; enzovoort;
- de wortel van een getal vind je door te zoeken naar een getal dat als je het kwadrateert weer het eerste getal oplevert;
- de wortel van een getal is een getal waarvan het kwadraat het gegeven getal is;
- $x = \sqrt{a} \leftarrow \rightarrow x^2=a$;
- worteltrekken is de inverse van kwadrateeren.

Treffers (1987) beveelt (voor het aanvaankelijk reken- en wiskunde-onderwijs) uitstel van verkorting aan van de notaties bij algoritmen. Algoritmen moeten zoveel mogelijk door de leerlingen zelf geconstrueerd worden. Bij zowel Van Hiele als bij Freudenthal en Treffers vinden we dat een zeer actieve rol van de leerling vereist is bij het opbouwen van de eigen kennis.

Veel kenmerken van het realistisch wiskunde-onderwijs, met name wat betreft de rol van de wiskunde-taal, zien we terug in het nieuwe leerplan voor de onderbouw dat in 1993 wordt ingevoerd. We zullen de plaats van de wiskundetaal in dat leerplan kort bespreken.

De rol van wiskundetaal binnen het nieuwe leerplan voor de onderbouw

In 1993 gaat parallel aan de invoering van de basisvorming een nieuw leerplan van start voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs: Wiskunde voor 12- tot 16-jarigen (W 12-16). Het is het sluitstuk na eerdere vernieuwingen in

het basisonderwijs en de bovenbouw van het voortgezet onderwijs. Het nieuwe leerplan staat niet alleen voor inhoudelijke vernieuwing, maar stuurt ook aan op didactische verandering, gebaseerd op het realistisch wiskunde-onderwijs. Didactische kenmerken zijn onder andere: actieve inbreng van leerlingen in het eigen leerproces met behulp van eigen constructies; progressieve mathematisering, waarbij dezelfde problemen op een telkens hoger abstractieniveau worden opgelost; ontwikkelen van modellen, schema's en symbolen; verhoging van het niveau van de leerling vanaf het niveau van de leerling zelf. De leerplanontwikkelaars zijn op het punt van het uitstellen van formele wiskundetaal erg ver gegaan. In het ontwikkelde voorbeeldmateriaal, dat als inspiratie diende voor de leerboekauteurs, is de formele wiskundetaal vrijwel geheel afwezig (zie Meijer, Kok, Riemersma & De Vries, 1991). Uiteindelijk bepalen de leerboekauteurs zelf wat er van deze didactische ideeën in hun methoden tot uitdrukking komt. Ons inziens moet enige formele wiskundetaal als kenmerkend onderdeel van de wiskunde wel behandeld worden, zij het pas aan het eind van de onderbouw. We lichten dit toe.

Bij het oplossen van problemen binnen de wiskunde speelt de wiskundetaal een belangrijke rol in de verschillende fasen van het oplossingsproces. We kunnen de volgende fasen in het oplossingsproces onderscheiden (naar Riemersma, 1991):

- encodering ('opnemen' van de opgave of taak);
- representatie-ontwikkeling (het probleem ontwikkelen, begrijpen, er vat op pogen te krijgen);
- afwikkeling (uitrekenen, algoritmisch oplossen);
- evaluatie.

Bij het encoderen moet de taal waarin het probleem gesteld is begrepen worden. Bij de representatie-ontwikkeling kunnen we onder meer denken aan het overgaan op een andere notatie. Het advies een andere notatie te gebruiken vormt één van de hints uit het door Polya ontwikkelde systeem van heuristieken (Polya, 1957). Een andere notatie kan andere aspecten van een begrip benadrukken die in een bepaalde situatie meer relevant zijn (zie ook Skemp, 1971). In de afwikkeling spelen nota-

ties een technische rol. Bij de evaluatie moet men over een adequate terminologie beschikken om over het probleem, de oplossingsweg en de oplossing na te denken. Niet genoemd nog hierbij is het aspect van de communicatie over het probleem met anderen (de leraar of medeleerlingen). In eerder onderzoek (Perrenet, 1992) vonden we aanwijzingen, dat groepswork een positieve invloed heeft op het correct hanteren van formele notaties.

Voor het oplossen van wiskundige problemen is het beheersen van de wiskundetaal dus onontbeerlijk. In hoeverre de weg tot de wiskundetaal in de praktijk van het wiskunde-onderwijs kan lopen via een zelf ontwikkelde wiskundige taal van de leerlingen is nog een open vraag. Meijer e.a. (1991) wijzen op het probleem van de op intuïtieve noties gebaseerde vakinhoudelijke misconcepties die een belangrijke barrière in het leerproces kunnen vormen. Ons inziens is dat geen argument tegen een dergelijke onderwijsmethode; hoe eerder dergelijke concepties aan het licht komen, des te eerder het onderwijs erop kan inspelen. Een groter probleem lijkt ons dat een dergelijk leerproces slechts voor een klein deel door leerboeken gestuurd kan worden en veel (mogelijk te veel) inbreng van de leraar vereist.

Kanttekeningen bij het beschreven onderzoek naar specifieke fouten

We bespreken achtereenvolgens foutenanalyse als techniek om methode-effecten te onderzoeken, het probleem van de implementatiefactor en het effect van de leraar en andere groeiperingsfactoren.

Een mogelijk kritiekpunt op de in dit artikel beschreven studie is de betrouwbaarheid van de meting bij de fouttypen. Het categoriseren van fouten in schriftelijk leerlingmateriaal heeft altijd een zeker subjectief karakter; soms lijkt het bestuderen van de uitwerkingen op protocolanalyse. Een interbeoordelaarsbetrouwbaarheid is in deze éénmansstudie niet bepaald, maar de gegeven operationalisaties vormen een objectiviteitscriterium. Daarnaast is het aantal meetpunten bij de schalen voor rekenfouten en wiskundetaal-fouten beperkt (het gaat om percentages ten opzichte van enkele opgaven). Bij de wiskundetaal-fouten berust de analyse op relatief de meeste opgaven. De grootte van de standaarddeviaties (paragraaf 3)

verplicht toch tot voorzichtigheid bij het hantieren van de resultaten. In de inleiding werd de opvatting van Gravemeijer e.a. (1990) weergegeven, dat methoden wel degelijk verschillend effect hebben, maar dat voor het meten van de verschillen verfijnde toetsen nodig zijn. Foutenanalyse gekoppeld aan het toetsen van specifieke hypothesen, zoals in deze studie, lijkt daartoe een geschikte techniek. Wel moeten dan toetsen ontwikkeld worden gericht op het meten van de desbetreffende fouten. Analyse van bestaande toetsgegevens is als basis niet sterk genoeg.

Effecten kunnen alleen bij getrouwe implementatie aan de methoden worden toegeschreven. Deze studie maakt gebruik van de data van het transfertestonderzoek (De Leeuw e.a., 1988). Als enige meting op de factor implementatie werd in dat onderzoek gevraagd aan de betrokken leraren in hoeverre men tevreden was over het gebruikte leerboek. De antwoorden differentieerden te weinig om de factor in de analyses op te nemen (vrijwel ieder was redelijk tevreden). Nederlandse wiskundeleraren volgen over het algemeen het gebruikte leerboek goed qua leerstofaanbod en de aard van de methode (zie Meijer e.a., 1988; Van Streun, 1990 en Gravemeijer e.a., 1990). Wanneer het nieuwe experimentele methoden betreft, kunnen implementatieverschillen echter wel degelijk optreden (zie bijvoorbeeld Herfs, Mertens, Perrenet & Terwel, 1991). Bij het transfertestonderzoek betrof het al langer in gebruik zijnde methoden.

Ook bij getrouwe implementatie kunnen kenmerken van de leraar los van het leerboek van invloed zijn op het leerresultaat. Daarnaast is invloed mogelijk van andere groepeeringsfactoren zoals de klas en de school. We denken hierbij aan klascompositie en schoolklimaat (zie Van den Berg, Terwel & Wierstra, 1993). Opname van meerdere groepeeringsfactoren in dezelfde analyse was binnen het gegeven design van deze studie (zie Figuur 3) niet mogelijk. Er ontstaat dan een tekort aan vrijheidsgraden. Binnen de Getal & Ruimte-groep kan geen onderscheid gemaakt worden tussen klas, leraar en school. Gedegener controle voor groepeeringsfactoren vereist een meer gebalanceerd design.

Door de veelheid van aspecten, waarmee moet rekening worden gehouden, is het moei-

lijk om bij het onderzoek naar methode-effecten met overtuigende resultaten te komen. Dat blijkt ook uit de in de inleiding genoemde discussie van Harskamp en Suhre (1990) met Van den Heuvel-Panhuizen (1990). We sluiten ons aan bij hun conclusie, dat om tot deugdelijke methode-evaluatie te komen - en daarmee tot gefundeerde adviezen voor verdere ontwikkeling van methoden - samenwerking tussen didactici en onderwijskundigen zeer is aan te bevelen.

Noten

- 1 In De Leeuw e.a. (1988) wordt de betreffende test 'test voor actuele beheersing' genoemd.
- 2 Inmiddels zijn de onderzochte edities door nieuwe vervangen met deels andere kenmerken.
- 3 Als tegenpool van algoritmisch wordt door De Leeuw de term heuristisch gebruikt.
- 4 We moeten spreken van een trend vanwege de oorspronkelijke rechts-eenzijdige toetsing.
- 5 Walker en Schaffarzick waarschuwen zelf al tegen een al te simpele interpretatie van de door hen geformuleerde principes.
- 6 De uitspraken zijn als definities onvolledig: het aspect van het teken van de wortel van een getal is buiten beschouwing gelaten.

Literatuur

- Berg, G. van den, Terwel, J., & Wierstra, R. F. A. (1993). Evaluatie van leergangen. In: W. J. Nijhof, H. A. M. Franssen, W. Th. J. G. Hoebein & R. G. M. Wolbert (Eds.). *Handboek curriculum: modellen, theorieën, technologieën* (pp. 371-392). Amsterdam/Lisse: Swets & Zeitlinger B.V.
- CITO (1982). *Leerdoelgerichte toetsen Wiskunde deel 1*. Arnhem: CITO.
- CITO (1986). *Leerdoelgerichte toetsen Wiskunde deel 2*. Arnhem: CITO.
- Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing. Preface to a Science of Mathematics Education*. Dordrecht/Boston: Reidel.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenologie of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

- Gravemeijer, K. P. E., Heuvel-Panhuizen, M. van den, & Ploeg, D. A. van der (1990). *Ander Rekenboek Andere Rekenprestaties. Een vergelijking tussen twee reken-wiskundemethoden in groep 3. MORE-project*. Utrecht: OW & OC en VOU, Rijksuniversiteit Utrecht.
- Harskamp, E. (1988). *Rekenmethoden op de proef gesteld* (Academisch proefschrift). Groningen: RION.
- Harskamp, E., & Suhre, C. (1990). Kritiek op methodenonderzoek tussen wal en schip. *Pedagogische Studiën*, 67, 284-290.
- Herfs, P. G. P., Mertens, E. H. M., Perrenet, J. Chr., & Terwel, J. (1991). *Leren Door Samenwerken*. Amsterdam/Lisse: Swets & Zeitlinger.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den (1990). Rekenmethoden-onderzoek op de proef gesteld. *Pedagogische Studiën*, 67, 271-283.
- Hiele, P. M. van (1973). *Begrip en inzicht*. Purmerend: Muusses.
- Leeuw, L. de (1979). *Leren Probleemoplossen* (Academisch proefschrift). Lisse: Swets & Zeitlinger.
- Leeuw, L. de, Meijer, J., Perrenet, J. Chr., & Groen, W. E. (1988). *De constructie en validering van een transfertest voor wiskunde-onderwijs met gebruikmaking van items met gefaseerde hulp*. Amsterdam: Vrije Universiteit.
- Meijer, J., Perrenet, J. Chr. & Riemersma, F. (1988). *Leren probleemoplossen in het wiskunde-onderwijs*. *Pedagogische Studiën*, 65, 16-31.
- Meijer, J. (1990). Effects of teaching methods on mathematical abilities of students in secondary education compared by means of a transfertest. In *Proceedings of the Fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 159-166). Oaxtépéc, Mexico: Program Committee of the PME.
- Meijer, J., Kok, F., Riemersma, F. S. J., & Vries, J. de (1991). *Vernieuwing van het wiskunde-onderwijs in de onderbouw van het voortgezet onderwijs*. Amsterdam: Stichting Centrum voor Onderwijs-onderzoek van de Universiteit van Amsterdam.
- Meijer, J., Perrenet, J., & Groen, W. (1992). Leerboek-effecten: verkeerd weergegeven feiten en onjuiste interpretaties van Van Streun. *Euclides*, 67, 153-155.
- Perrenet, J. (1992). Fouten bij het oplossen van wiskunde-problemen en de invloed van groeps-werk. *Tijdschrift voor Didactiek der β -wetenschappen*, 10, 112-125.
- Polya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Riemersma, F. (1991). *Leren oplossen van wiskundige problemen in het voortgezet onderwijs* (Academisch proefschrift). Amsterdam: Stichting Centrum voor Onderwijs-onderzoek, Universiteit van Amsterdam.
- Skemp, R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Aylesbury: Hazel Watson & Viney Ltd.
- SPSS Inc. (1988). *SPSS/PC+ V3.0*. Chicago/Gorinchem: SPSS Inc.
- Streun, A. van (1989). *Heuristisch Wiskunde-Onderwijs. Verslag van een onderwijs-experiment* (Academisch proefschrift). Groningen: Rijksuniversiteit Groningen.
- Streun, A. van (1990). Leerboeken: feiten en interpretaties. *Euclides*, 66, 55-60.
- Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction - The Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel.
- Walker, D. F., & Schaffarzick, J. (1974). Comparing curricula. *Review of Educational Research*, 44, 83-111.

Manuscript aanvaard 5-3-1993

Auteur

J. Chr. Perrenet is werkzaam bij het Instituut voor de Lerarenopleiding van de Universiteit van Amsterdam.

Correspondentie-adres: Universiteit van Amsterdam, Instituut voor de Lerarenopleiding, Herengracht 256, 1016 BV Amsterdam.

Abstract

The influence of the textbook on the occurrence of specific errors in mathematical problem solving

J. Chr. Perrenet. *Pedagogische Studiën*, 1993, 70, 195-205.

De Leeuw et al. (1988) found no effect of any of three Dutch mathematics textbooks, with different didactical conceptions, on a mathematical transfer test. The transfer test had been presented to 325 students (age 15) with ten teachers after three years of secondary education.

This article presents the analysis of the occurrence of specific errors in the written solutions of the transfer test problems. In the analysis factors teacher and mathematical ability, as measured by an instructions problem test, have been controlled for. Again no effect was found. Students using the textbook which emphasizes notation and terminology the most and the earliest even committed notation and terminology errors more frequently, although the difference was not significant. The role of formal terminology and formal notation in mathematics education is discussed in reference to curriculum reform in The Netherlands.