

Hoe leerlingen vergelijkingsvraagstukken begrijpen en oplossen: toetsing van een procesmodel via de techniek van het navertellen

L. Verschaffel*

Samenvatting

Volgens de consistentiehypothese van Lewis en Mayer (1987) hebben subjecten een duidelijke voorkeur voor vergelijkingsvraagstukken met een consistente structuur ("Piet heeft 37 knikkers. Tom heeft 23 knikkers meer dan Piet. Hoeveel knikkers heeft Tom?"). Worden ze geconfronteerd met een inconsistente vergelijkingsvraagstuk ("Piet heeft 37 knikkers. Hij heeft 23 knikkers minder dan Tom. Hoeveel knikkers heeft Tom?"), dan wordt dit mentaal getransformeerd tot een consistente opgave alvorens tot de keuze van de geschikte rekenoperatie over te gaan. In onderhavig artikel wordt verslag uitgebracht van een onderzoek bij 10-11-jarige basisschoolleerlingen dat tot doel had de consistentiehypothese van Lewis en Mayer (1987) te toetsen, gebruikmakend van de techniek van het navertellen. De resultaten van deze studie leveren overtuigende bijkomende steun voor deze hypothese.

Inleiding

Onderzoek heeft aangetoond dat jonge kinderen, maar ook nog vele oudere leerlingen en zelfs volwassenen, moeite hebben met het begrijpen en oplossen van vergelijkingsopgaven zoals "Piet heeft 37 knikkers. Hij heeft 23 knikkers minder dan Tom. Hoeveel knikkers heeft Tom?". Lewis en Mayer (1987) ontwikkelden een model van de processen die zich afspelen tijdens het begrijpen en oplossen van dergelijke opgaven (=het LM-model). Eenvoudig gezegd

komt dit model hierop neer dat subjecten de relationele informatie uit dergelijke opgaven omzetten in een andere, eenvoudigere vorm alvorens over te gaan tot de keuze van de geschikte rekenkundige bewerking. Lewis en Mayer (1987) verrichtten tevens een empirisch onderzoek waarin ze een aantal uit hun model voortvloeiende voorspellingen betreffende de moeilijkheidsgraad van verschillende soorten vergelijkingsvraagstukken vergeleken met de prestaties van studenten. Deze prestatiegegevens vormen evenwel geen overtuigend bewijs voor de hypothetische processen zoals beschreven in het model. Verschaffel, De Corte en Pauwels (1990, 1992) verrichtten een meer procesgerichte toetsing van dit model via de analyse van oplossings tijden en oogbewegingsgegevens. Hoewel hun resultaten over het algemeen een bijkomende bevestiging vormen van het LM-model, zijn ook zij nog steeds niet geheel overtuigend, omdat ze eveneens (te) weinig informatie bevatten over de kern van het LM-model. In onderhavig artikel wordt verslag uitgebracht van een experiment waarin gepoogd is om de kernhypothese uit het LM-model op een meer directe wijze te toetsen, gebruikmakend van de techniek van het navertellen.

1 Het model van Lewis en Mayer

Van de drie semantische basiscategorieën van aanvankelijke redactie-opgaven over optellen en aftrekken - verandering, combinatie en gelijkjking - zijn vergelijkingsvraagstukken ongetwijfeld het moeilijkst (Briars & Larkin, 1984; De Corte, Verschaffel & Verschueren, 1982; Mayer, 1982; Morales, Shute & Pellegrino, 1985; Riley & Greeno, 1988; Riley, Greeno & Heller, 1983; Verschaffel, 1984). In vergelijkingsvraagstukken wordt een statische

* De auteur dankt R. Stroobants voor zijn hulp bij de statistische verwerking van de resultaten. Tevens dank aan de directies, de leerkrachten en de leerlingen van de twee scholen die aan het onderzoek meewerkten.

situatie beschreven waarin sprake is van drie sets: twee hoeveelheden die vergeleken worden en het verschil tussen beide. Binnen de categorie van de vergelijkingsopgaven kan men verder onderscheid maken volgens de aard van de onbekende hoeveelheid, m.n. één van de twee sets die vergeleken worden of de set die verwijst naar het verschil tussen beide. Het model van Lewis en Mayer (1987) heeft enkel betrekking op vergelijkingsvraagstukken waarbij één van de vergeleken sets én het verschil tussen beide gegeven is, terwijl de grootte van de tweede set bepaald dient te worden. De auteurs maken daarbij onderscheid tussen consistente (C) en inconsistente (I) opgaven. Bij C-opgaven is het grammaticale subject uit de eerste zin het object uit de tweede zin¹ en komt de vergelijkende term overeen met de uit te voeren bewerking (er staat 'meer' en er moet opgeteld worden of er staat 'minder' terwijl er afgetrokken moet worden). Bijvoorbeeld: "Piet heeft 37 knikkers. Tom heeft 23 knikkers meer dan Piet. Hoeveel knikkers heeft Tom?" Bij I-opgaven is het grammaticale subject van de eerste zin tevens het subject van de tweede; bovendien is er een conflict tussen de vergelijkende term en de uit te voeren bewerking (er staat 'meer' maar er moet afgetrokken worden of er staat 'minder' terwijl er opgeteld moet worden). Bijvoorbeeld: "Piet heeft 37 knikkers. Hij heeft 23 knikkers minder dan Tom. Hoeveel knikkers heeft Tom?"

Uit onderzoek is herhaaldelijk gebleken dat I-opgaven moeilijker zijn dan C-opgaven (Briars & Larkin, 1984; Morales e.a., 1985; Riley e.a., 1983; Riley & Greeno, 1988). Ter verklaring van deze bevinding hebben Lewis en Mayer (1987) een model van het begrijpen en oplossen van vergelijkingsopgaven naar voren geschoven, waarvan de kern bestaat uit de consistentiehypothese. Volgens dit model hebben subjecten een sterke voorkeur voor één bepaalde vorm waarin de verschillende componenten van de relationele zin uit de vergelijkingsopgave geïntroduceerd worden. Meer bepaald zouden zij die vorm verkieszen waarbij het subject van de eerste zin het object van de tweede, relationele zin is; dit is het geval bij C-opgaven. Worden ze geconfronteerd met een I-opgave, waarbij het subject van de eerste zin tevens het subject is van de tweede zin, dan zullen zij die mentaal transformeren of herstructu-

ren tot een C-opgave. Dit impliceert dat 1. het subject en het object uit de tweede zin worden omgewisseld, en 2. de vergelijkende term uit deze zin wordt omgekeerd. Bijvoorbeeld: de tweede zin uit "Piet heeft 37 knikkers. Piet heeft 23 knikkers *minder* dan Tom. Hoeveel knikkers heeft Tom?" wordt omgevormd tot "Tom heeft 23 knikkers *meer* dan Piet"². Omwille van de bijkomende geheugenbelasting die deze transformatie met zich mee brengt, bestaat volgens het LM-model echter het risico dat nagelaten wordt om stap 2 - de omkering van de relationele term - uit te voeren. In dit geval ontstaat er een foutieve probleemrepresentatie (nl. "Piet heeft 37 knikkers. Tom heeft 23 knikkers *minder* dan Piet. Hoeveel knikkers heeft Tom"), die in de volgende fase van het oplossingsproces tot de keuze van een verkeerde operatie aanleiding geeft (nl. $37-23=14$ in plaats van $37+23=60$)³.

Voor deze consistentiehypothese hebben Lewis en Mayer (1987) zich gebaseerd op het werk van Huttenlocher en Strauss (1968), waarin jonge kinderen een blokkentaak voorgelegd kregen. Het taakmateriaal bestond uit twee blokken van een verschillende kleur, waarvan er één aan een soort ladder was vastgemaakt. De opdracht bestond erin om de andere, mobiele blok op de ladder te bevestigen zodat de situatie overeenkwam met een opgegeven vergelijkende zin. Huttenlocher en Strauss (1968) stelden vast dat zinnen waarvan de mobiele blok onderwerp was (zoals "De rode - mobiele - blok bevindt zich boven de blauwe - vaste - blok") meer correcte reacties uitlokten dan zinnen waarin de mobiele blok de rol van object vervulde (zoals "De blauwe - vaste - blok bevindt zich boven de rode - mobiele - blok").

Lewis en Mayer (1987) ondersteunden hun hypothetisch model met de resultaten van een empirisch onderzoek bij universiteitsstudenten die een reeks van samengestelde vergelijkingsopgaven aangeboden kregen. De keuze voor samengestelde in plaats van enkelvoudige opgaven verantwoordden de auteurs vanuit de noodzaak te werken met taken die het werkgeheugen van de subjecten voldoende belasten. De prestaties van deze studenten lagen in de lijn van de verwachtingen: er werden significant meer verkeerde-operatiefouten gemaakt bij I- dan bij C-opgaven. Toch kunnen deze

prestatiegegevens bezwaarlijk beschouwd worden als overtuigend bewijsmateriaal voor de hypothetische processen en structuren die in het LM-model vervat zitten.

Met het oog op een krachtiger, meer procesgerichte toetsing van dit model, verzamelden Verschaffel e.a. (1990, 1992) in drie deelstudies niet enkele antwoorden, maar ook oplossingsstijden en oogbewegingsgegevens van subjecten die met vergelijkingsvraagstukken werden geconfronteerd. In het eerste en het derde experiment fungeerden eveneens universiteitsstudenten als proefpersonen; in de tweede studie werd met derdeklassers gewerkt. De universiteitsstudenten uit experiment 1 en de derdeklassers uit experiment 2 kregen enkelvoudige vraagstukken aangeboden; in experiment 3 werd met samengestelde opgaven gewerkt. De resultaten van het eerste experiment boden geen enkele steun voor het LM-model, doch die van het tweede en derde experiment kwamen er wel goed mee overeen. In beide studies werd niet enkel slechter gepresteerd op I- dan op C-opgaven; er werden tevens langere oplossingstijden bekomen voor I- dan voor C-opgaven, en deze langere oplossingstijden waren grotendeels toe te schrijven aan de langere verwerkingstijd voor de tweede, relationele zin uit de I-opgaven. De afwijkende resultaten van experiment 1 schreven Verschaffel e.a. (1990, 1992) toe aan de te geringe moeilijkheidsgraad van enkelvoudige vergelijkingsvraagstukken voor universiteitsstudenten.

Hoewel de onderzoeksresultaten van Verschaffel e.a. (1990, 1992) bijkomende steun bieden voor het LM-model, is deze steun nog steeds onvoldoende. Immers, over de kern van het model - de veronderstelde mentale omvorming van een I- tot een C-opgave -, leverden de verzamelde oplossingstijden en oogbewegingsgegevens weinig of geen rechtstreekse informatie. Daarom hebben we - met het oog op een verdere toetsing van de kernhypothese uit het LM-model - een nieuw onderzoek opgezet dat speciaal tot doel had beter zicht te krijgen op de aard van de interne probleemrepresentatie die van C- en I-opgaven wordt opgebouwd, gebruikmakend van de techniek van het navertellen.

De techniek van navertellen is reeds vaak gebruikt om informatie te bekomen over de probleemrepresentaties die aan goede en fou-

tieve oplossingen van rekenvraagstukken ten grondslag liggen (Cummins, Kintsch, Reusser & Weimer, 1988; De Corte & Verschaffel, 1985a, 1987; Jaspers & Van Lieshout, 1989; Riley e.a., 1983). De basisassumptie daarbij is dat het navertellen van een vraagstuk niet (louter) tot stand komt via *reproductie* van de oppervlaktestructuur van deze tekst, doch (in belangrijke mate) *gereconstrueerd* wordt op basis van de representatie die de oplosser van het vraagstuk heeft opgebouwd na het lezen van de tekst en vooraleer tot de keuze van de vereiste rekenoperatie over te gaan. Steun voor deze basisassumptie is o.a. te vinden in eigen onderzoek, waarin een grote overeenkomst is vastgesteld tussen de manier waarop enkelvoudige rekenvraagstukken worden naverteld en de wijze waarop deze opgaven met concreet materiaal worden nagespeeld (De Corte & Verschaffel, 1985a, 1987; Verschaffel, 1984). Het leek ons dan ook aangewezen om via deze techniek te pogen dieper door te dringen tot de interne probleemrepresentatie die van vergelijkingsopgaven wordt geconstrueerd. Met name verwachtten we dat er in de navertelprotocollen van de I-opgaven sporen te vinden zouden zijn van de (al dan niet succesvolle) transformatie van het oorspronkelijke I-vraagstuk tot een opgave met een consistente structuur.

2 Hypothesen

Uit het model van Lewis en Mayer (1987) kunnen een aantal hypothesen afgeleid worden die betrekking hebben op de moeilijkheidsgraad van de opgaven, de oplossingstijden en de navertellingen.

Vooreerst voorspelt het LM-model een effect van de factor 'consistentie' op de moeilijkheidsgraad van vergelijkingsopgaven (Lewis & Mayer, 1987; Verschaffel e.a., 1990, 1992). Omwille van de vereiste transformatie van een inconsistente tot een consistente probleemrepresentatie en de daarmee gepaard gaande bijkomende belasting van het werkgeheugen, zullen er meer verkeerde-operatiefouten voorkomen bij I- dan bij C-opgaven.

Verder zal de mentale omvorming van I- tot C-vraagstukken noodzakelijkerwijs leiden tot langere oplossingstijden voor I-opgaven.

Zoals gezegd, is het verschil in moeilijk-

heidsgraad en in oplossingsstijd tussen C- en I-vraagstukken volgens het LM-model op rekening te schrijven van additionele verwerkingsprocessen bij I-opgaven. Bij deze opgaven kan pas tot de keuze van de vereiste rekenoperatie worden overgegaan nadat de oorspronkelijke probleemrepresentatie getransformeerd is tot een representatie met een consistente structuur. Op grond van deze basis-hypothese van het LM-model enerzijds én van het methodologisch uitgangspunt dat navertelprotocollen een weerspiegeling vormen van de opgebouwde probleemrepresentatie anderzijds, kunnen de volgende twee hypothesen worden geformuleerd. Ten eerste, aangezien I-opgaven vaker aanleiding zullen geven tot een foutieve probleemrepresentatie, zullen zij meer foutieve navertellingen uitlokken dan C-opgaven. (Wat er precies onder een foutieve navertelling wordt verstaan komt verderop nog aan bod). Ten tweede, omdat de keuze van de juiste rekenoperatie bij C-opgaven geen transformatie van de oorspronkelijke probleemrepresentatie vereist, zullen er bij C-opgaven weinig of geen navertelprotocollen aangetroffen worden met een inconsistente structuur; I-opgaven daarentegen zullen - omwille van de veronderstelde mentale omvorming tot een C-opgave - heel wat (zowel correcte als foutieve) navertellingen in de vorm van een C-opgave uitlokken.

3 Opzet

3.1 Subjecten

Als subjecten fungeerden de leerlingen uit twee vijfde leerjaren (leeftijd 10-11 jaar) van twee verschillende basisscholen uit het Meetjesland. De ene klas bestond uit 18, de andere uit 22 leerlingen. De keuze voor deze leeftijdsgroep boven kinderen uit de aanvangsklassen van de lagere school is als volgt te verantwoorden. Uit onderzoek is duidelijk gebleken dat jonge leerlingen (6-9-jarigen) erg zwak presteren op I-opgaven (Briars & Larkin, 1984; Riley e.a., 1983; Riley & Greeno, 1988). Indien we met jonge kinderen zouden werken, liepen we het risico dat de navertelprotocollen maar weinig gegevens zouden opleveren omtrent de probleemrepresentatie die ten grondslag ligt aan juiste antwoorden op I-opgaven. Een bijko-

mend argument om met 10-11-jarigen te werken is dat jongere kinderen vaak ook nog grote moeite hebben met C-vraagstukken; een veel voorkomend foutentype is het antwoorden met één van de getallen die in de opgave vermeld staan (Briars & Larkin, 1984; Cummins e.a., 1988; De Corte & Verschaffel, 1985a; Jaspers & Van Lieshout, 1989). Omdat het LM-model zich uitsluitend richt op verkeerde-operatiefouten, wilden we het aantal gegeven-getalfouten zo veel mogelijk beperken.

Een analyse van de rekenmethoden die gebruikt werden in de scholen die aan het onderzoek deelnamen, bracht een sterke ondervertegenwoordiging aan het licht van vraagstukken met een vergelijkingsstructuur; dit geldt in het bijzonder voor I-opgaven (zie ook: De Corte & Verschaffel, 1985b). Uit korte interviews die op het einde van het onderzoek bij de betrokken leerkrachten werden afgenomen, bleek verder dat zij de leerlingen in geen geval expliciet aangeleerd hadden om I-opgaven op te lossen door ze om te vormen tot een C-opgave.

3.2 Taken

Elke leerling kreeg negen enkelvoudige optellen aftrekvraagstukken aangeboden: één voorbeeldopgave, vier vergelijkingsopgaven die als experimentele items fungeerden, en vier bufferitems die tussen de testitems werden geschoven om stereotype antwoordtendensen te vermijden. Twee testitems hadden een consistente structuur; de andere twee een inconsistente. Binnen beide categorieën was er telkens één optelling en één aftrekking. De vier testitems worden gegeven in Tabel 1. Zoals uit deze tabel blijkt, begint - in tegenstelling tot in de onderzoeken van Lewis en Mayer (1987) en Verschaffel e.a. (1990, 1992) - de relationele zin uit de I-opgaven niet met een persoonlijk voornaamwoord ("Piet heeft 3 appels. *Hij...*"), doch met de herhaling van de naam van de reeds eerder geïntroduceerde persoon ("Piet heeft 3 appels. *Piet...*"). Op die manier werd verhinderd dat de factor 'aanwezigheid van een persoonlijk voornaamwoord' het eventuele consistentie-effect zou vertroebelen (Stern, ter perse; Verschaffel e.a., 1990, 1992). Verder werden de getallen in de experimentele items zo gekozen, dat nergens sprake was van 'overbrugging van het tiental'.

Als bufferitems fungeerden: een optel-

Tabel 1
De vier experimentele items

Structuur	Operatie	Opgave
Consistent	Optelling	Kris heeft 32 boeken. Raf heeft 13 boeken meer dan Kris. Hoeveel boeken heeft Raf?
Consistent	Aftrekking	Jan heeft 28 auto's. Ivo heeft 17 auto's minder dan Jan. Hoeveel auto's heeft Ivo?
Inconsistent	Optelling	Karel heeft 34 noten. Karel heeft 15 noten minder dan Toon. Hoeveel noten heeft Toon?
Inconsistent	Aftrekking	Piet heeft 29 noten. Piet heeft 14 noten meer dan Ria. Hoeveel noten heeft Ria?

vraagstuk met een veranderingsstructuur, een aftrekopgave met een combinatiestructuur, een eenvoudig vermenigvuldigvraagstuk (over gelijke groepen) en een eenvoudige delingsopgave (over eerlijk verdelen).

3.3 Procedure

De vraagstukken werden op steekkaarten afgedrukt. Op de voorzijde van de steekkaart stond de ganse opgave; de achterzijde bevatte enkel de twee gegeven getallen. De leerling werd gevraagd om het vraagstuk eerst stil te lezen en vervolgens te beantwoorden. Direct nadat de leerling het antwoord gegeven had, werd de steekkaart omgedraaid en kreeg de leerling de opdracht om de opgave na te vertellen. Bij het oplossen werd er geen enkele hulp geboden. Bij het navertellen bleef de hulp beperkt tot de volgende drie interventies.

- Wanneer de leerling niet doorging met navertellen omdat hij één of beide namen uit het vraagstuk vergeten was, herhaalde de interviewer de *beide* namen⁴.
- Wanneer de leerling niet verder kon navertellen omdat hij het soort van objecten (appels, knikkers...) vergeten was, werd dit door de interviewer meegedeeld.
- Wanneer de leerling naliet om de vraag na te vertellen, vroeg de interviewer: "En de vraag luidde?".

De vier bufferitems werden tussen de vier experimentele vraagstukken geschoven. Om volgorde-effecten te vermijden, werd de volgorde van de items systematisch gevarieerd.

Elk interview nam ongeveer 15-20 minuten

in beslag. De interviews werden op audio-band opgenomen.

3.4 Analyse

Op basis van de notities van de interviewer tijdens het interview en de audio-opnamen, werden voor elk van de 40 leerlingen en voor elk van de vier experimentele items de volgende gegevens bepaald.

(On)juistheid van de operatie. Het antwoord van de leerling werd gescoord in één van de volgende categorieën:

- Correcte operatie: de leerling beantwoordt de opgave correct of maakt een rekentechnische fout. Onder een rekentechnische fout wordt verstaan: een antwoord dat één of twee eenheden of tientallen afwijkt van de juiste uitkomst. De reden om geen onderscheid te maken tussen correcte antwoorden en rekentechnische fouten, is dat het LM-model toch geen betrekking heeft op moeilijkheden tijdens de uitvoeringsfase van het oplossingsproces.
- Verkeerde operatie: de leerling antwoordt met de uitkomst van een verkeerde rekenoperatie, m.n. een optelling in plaats van een aftrekking met de twee gegeven getallen, of omgekeerd. Ook antwoorden waarbij een verkeerde operatie gepaard ging met een rekentechnische fout, werden in deze categorie ondergebracht.
- Restcategorie: een uitkomst die niet in één van de twee voorgaande categorieën thuis hoort, zoals antwoorden met één van de ge-

geven getallen of helemaal geen antwoord geven.

Oplossingstijd. De tijd tussen het aanbieden van het vraagstuk en het moment waarop het antwoord gegeven werd.

(On)juistheid van de navertelling. Elk navertelprotocol werd vooreerst gescoord als 'correct' of 'foutief'. Onder een 'correcte navertelling' verstaan we: een goed gevormd, oplosbaar vraagstuk dat 1. leidt tot dezelfde uitkomst als de gegeven opgave, 2. rond hetzelfde semantisch basisschema (verandering, combinatie of vergelijking) is opgebouwd, en 3. bovendien dezelfde onbekende set heeft als de oorspronkelijke opgave. Hierbij dient opgemerkt dat - wat het derde criterium betreft - zowel de consistente als de *overeenkomstige* inconsistente formuleringswijze van de relationele zin uit de vergelijkingsopgave als 'correct' werd gescoord, tenminste voor zover de navertelling ook voor de rest beantwoordde aan de eisen van een goed gevormd vraagstuk (zie Tabel 2). De reden hiervoor is dat beide uitdrukkingwijzen van het verschil tussen twee vergeleken hoeveelheden vanuit semantisch oogpunt helemaal identiek zijn. Alle overige

navertellingen werden 'foutief' gescoord. In deze laatste categorie kwamen dus niet enkel onvolledige en slechtgevoormde navertellingen terecht, maar tevens navertellingen in de vorm van een goed opgebouwd vraagstuk dat echter een andere betekenis had dan het opgegeven vraagstuk (zie Tabel 2).

Consistent/inconsistent-omkering. Elke navertelling werd nog op een tweede manier gescoord. Daarbij werd nagegaan of er in het navertelprotocol al dan niet sprake was van een 'consistent/inconsistent-omkering' (verderop afgekort als: C/I-omkering). Daarmee wordt bedoeld: een C-vraagstuk dat als een I-opgave wordt naverteld, of een I-opgave die als een C-vraagstuk wordt naverteld. Hierbij dient beklemtoond dat zowel correcte als foutieve navertellingen op deze dimensie kunnen worden gescoord, tenminste voor zover de eerste twee zinnen uit het navertelprotocol een consistente of inconsistente vergelijkingsstructuur hebben (zie Tabel 3). Foutieve navertellingen waarbij dit niet het geval is (bijv. een zeer onvolledige navertelling, of een navertelling die helemaal opgebouwd is rond het veranderings- of het combinatieschema), werden eveneens in de categorie 'geen C/I-omkering' ondergebracht.

Tabel 2

Voorbeelden van correcte en foutieve navertellingen bij de inconsistente aftrekopgave

Opgave: Piet heeft 29 noten.

Piet heeft 14 noten meer dan Ria.

Hoeveel noten heeft Ria?

Correct

Piet heeft 29 knikkers.
Hij heeft 14 knikkers meer dan An.
Hoeveel knikkers heeft An?

Piet heeft 29 noten.
Ria heeft 14 noten minder dan Piet.
Hoeveel noten heeft Ria?

Piet heeft 29 noten en dat meisje
(I*: Ria) Ria heeft er 14 minder.
(I*: En de vraag luidde?) En dan
vragen ze hoeveel Ria er heeft.

Foutief

Piet heeft 29 knikkers.
Piet heeft 14 noten minder dan Ria.
Hoeveel noten heeft Ria?

Piet heeft 29 knikkers.
Ria heeft 14 noten meer dan Piet.
Hoeveel noten heeft Ria?

Piet heeft 29 knikkers. Ria heeft er 14.
Hoeveel knikkers heeft Ria minder dan Piet?

Piet heeft 29 knikkers. Piet heeft er 14
meer dan Ria. Hoeveel heeft hij er meer?

Piet had 29 knikkers. Hij gaf er 14 aan Ria.
Hoeveel knikkers houdt hij er over?

* (I) = Interviewer

Tabel 3

Correcte en foutieve navertellingen met en zonder I/C-omkering bij de inconsistente aftrekopgave

Opgave: Piet heeft 29 noten.
Piet heeft 14 noten meer dan Ria.
Hoeveel noten heeft Ria?

Correcte navertelling

Piet heeft 29 noten.
Piet heeft 14 noten meer dan Ria.
Hoeveel noten heeft Ria?

Piet heeft 29 noten.
Ria heeft 14 noten minder dan Piet.
Hoeveel noten heeft Ria?

Foutieve navertelling

Geen I/C-omkering

Piet heeft 29 noten.
Piet heeft 14 noten minder dan Ria.
Hoeveel noten heeft Ria?

Wel I/C-omkering

Piet heeft 29 noten.
Ria heeft 14 noten meer dan Piet.
Hoeveel noten heeft Ria?

Vervolgens werd er een variantie-analyse (2×2) uitgevoerd met 'consistentie' (consistent versus inconsistent) en 'operatie' (optelling versus aftrekking) als onafhankelijke variabelen en met de volgende vier afhankelijke variabelen: proportie correcte operaties, oplossings-tijd, proportie correcte navertellingen en proportie 'C/I-omkeringen'⁵.

4 Resultaten

4.1 Resultaten van de variantie-analyse

Zoals verwacht, lokten C-vraagstukken significant meer correcte operaties uit dan I-opgaven ($F(1,39) = 14.18$, $MSe = 1.60$, $p < 0.001$). In totaal werd bij 92.5 % van de C- en bij 72.5 % van de I-vraagstukken de correcte operatie uitgevoerd. Op twee gegeven-getalfouten na, werden alle overige antwoorden gescoord als verkeerde-operatiefouten.

C-vraagstukken werden tevens significant sneller opgelost dan I-opgaven ($F(1,39) = 40.92$, $MSe = 1040.40$, $p < 0.001$). De oplossingstijden bedroegen respectievelijk 12.2 sec. en 17.3 sec. Dit resultaat komt eveneens overeen met de voorspelling.

Verder werden er - zoals verwacht - significant meer correcte navertellingen aangetroffen bij C- dan bij I-opgaven ($F(1,39) = 4.53$, $MSe = 0.63$, $p < 0.05$). Het percentage correcte navertellingen bedroeg respectievelijk 85 en 72.5.

De voornaamste hypothese uit onderhavige studie betreft evenwel het verschillend aantal I/C-omkeringen in de navertellingen van de C-

en de I-opgaven. In de lijn van deze hypothese, werd er een zeer sterk effect gevonden van de factor 'consistentie' op de proportie I/C-omkeringen ($F(1,39) = 86.78$, $MSe = 15.01$, $p < 0.001$). Terwijl C-vraagstukken slechts 1 op 80 keer naverteld werden in de vorm van een I-opgave (= 1.3 %), werden I-vraagstukken in niet minder dan 49 van de 80 gevallen (= 61 %) in consistente vorm naverteld.

Hierna wordt dit laatste - en tevens belangrijkste - onderzoeksresultaat betreffende de aard van de navertellingen verder geanalyseerd. Daarbij wordt uitgegaan van Tabel 4, waarin de I/C-omkeringen die we in de navertellingen van de C- en de I-opgaven hebben aangetroffen, opgesplitst zijn op basis van de prestaties voor het oplossen en het navertellen.

4.2 Verdere analyse van de I/C-omkeringen

4.2.1 I/C-omkeringen bij consistente opgaven

Oplossing correct/navertelling correct. Zoals uit Tabel 4 blijkt, werden de twee C-opgaven tesamen in 66 van de 80 gevallen correct opgelost én naverteld. Slechts één van deze 66 navertellingen had de structuur van een I-opgave. Deze ene navertelling is afkomstig van een leerling die het C-optelvraagstuk eerst juist beantwoordde en vervolgens correct navertelde in de vorm van een I-optelopgave:

Opgave: Kris heeft 32 boeken. Raf heeft 13 boeken meer dan Kris. Hoeveel boeken heeft Raf?

Antwoord: 45

Navertelling: Kris heeft 32 boeken en hij heeft er 13 minder dan Raf. Hoeveel heeft Raf er?

Tabel 4

Overzicht van de I/C-omkeringen bij consistente en inconsistente opgaven

Consistente opgaven

Oplossing	Correct		Navertelling	
	Geen I/C*	Wel I/C	Geen I/C	Foutief Wel I/C
Correct	65	1	8	0
Foutief	1	0	5	0

Inconsistente opgaven

Oplossing	Correct		Navertelling	
	Geen I/C	Wel I/C	Geen I/C	Foutief Wel I/C
Correct	26	31	1	0
Foutief	2	0	2	18

* Geen I/C = geen I/C-omkering; wel I/C = wel I/C-omkering

In de overige 65 gevallen had de correcte navertelling dezelfde consistente structuur als de oorspronkelijke opgave.

Oplossing fout/navertelling fout. De twee C-vraagstukken werden samen vijf keer foutief beantwoord en vervolgens foutief naverteld. Geen enkele van deze vijf foutieve navertellingen had de structuur van een I-opgave. In vier van deze vijf gevallen maakte de leerling eerst een verkeerde-operatiefout en construeerde hij vervolgens de C-opgave die bij deze foutieve bewerking paste, zoals in onderstaand voorbeeld.

Opgave: Kris heeft 32 boeken. Raf heeft 13 boeken meer dan Kris. Hoeveel boeken heeft Raf?

Antwoord: 19.

Navertelling: Kris heeft 32 boeken. Raf heeft er 13 minder. Hoeveel heeft Raf er?

Oplossing correct/navertelling fout. Acht leerlingen losten een C-opgave correct op en vertelden ze daarop foutief na. In deze categorie werden er evenmin I/C-omkeringen aangetroffen. In de helft van de gevallen produceerde de leerling een goed gevormd vraagstuk dat weliswaar eenzelfde uitkomst opleverde als de oorspronkelijke opgave, doch een andere betekenisstructuur had, zoals in onderstaand voorbeeld:

Opgave: Kris heeft 32 boeken. Raf heeft 13 boeken meer dan Kris. Hoe-

veel boeken heeft Raf?

Antwoord: 45.

Navertelling: Kris heeft 32 boeken en Raf heeft 13 boeken. Hoeveel boeken... eh... hebben ze tesamen?

In de andere helft van deze gevallen was het navertelprotocol te categoriseren als een onvolledig of slecht gevormd vraagstuk.

Oplossing fout/navertelling correct. Bij de C-opgaven kwam het ten slotte één keer voor dat een vraagstuk foutief beantwoord werd met een verkeerde-operatiefout en vervolgens toch correct werd naverteld. Ook hier was er geen sprake van een I/C-omkering.

4.2.2 I/C-omkeringen bij inconsistente opgaven

Terwijl er in de 80 navertellingen van de twee C-vraagstukken slechts één I/C-omkering aangetroffen werd, werden er bij de twee I-opgaven samen niet minder dan 49 I/C-omkeringen geteld (zie Tabel 4).

Oplossing correct/navertelling correct. Het grootste aantal I/C-omkeringen werd aangetroffen in deze categorie: in 31 van de 57 gevallen waarin een I-opgave zowel correct opgelost als correct naverteld werd, had de navertelling de structuur van een C-vraagstuk. Hierna geven we hiervan een voorbeeld.

Opgave: Karel heeft 34 noten. Karel heeft 15 noten minder dan Toon. Hoeveel noten heeft Toon?

Antwoord: 49.

Navertelling: Karel heeft 34 noten... en die andere jongen heeft eh... (Interviewer: de namen waren Karel en Toon)... Toon heeft 15 noten meer. Hoeveel heeft Toon?

In de overige 26 gevallen werd de I-opgave op inconsistente wijze naverteld. Daarbij kwam het wel geregeld voor dat een leerling het I-vraagstuk als een C-opgave begon na te vertellen, doch zichzelf 'corrigeerde' en het vraagstuk uiteindelijk toch als een I-opgave navertelde. Bijvoorbeeld:

Opgave: Piet heeft 29 noten. Piet heeft 14 noten meer dan Ria. Hoeveel noten heeft Ria?

Antwoord: 15.

Navertelling: Piet heeft 29 noten ... eh... en Ria heeft er 14 minder ... eh ... en Piet heeft 14 noten meer dan Ria. Hoeveel noten heeft Ria?

M.a.w. ook in sommige navertellingen van I-opgaven die uiteindelijk als 'geen I/C-omkering' werden gescoord, waren sporen terug te vinden van de mentale transformatie van de oorspronkelijke probleemrepresentatie naar een representatie in termen van een C-opgave.

Oplissing fout/navertelling fout. De I-opgaven werden 20 keer foutief opgelost én naverteld. In al deze gevallen was het foutief antwoord het resultaat van een verkeerde operatie. Van de 20 foutieve navertellingen hadden er niet minder dan 18 de structuur van een C-vraagstuk. Deze navertellingen werden echter als 'foutief' gescoord, omdat subject en object uit de tweede zin wél omgewisseld waren terwijl de vergelijkende term dezelfde gebleven was. Daardoor was er een C-vraagstuk ontstaan dat een andere rekenoperatie vereiste dan de oorspronkelijke I-opgave, zoals in onderstaand voorbeeld.

Opgave: Karel heeft 34 noten. Karel heeft 15 noten minder dan Toon. Hoeveel noten heeft Toon?

Antwoord: 19.

Navertelling: Karel heeft 34 noten. Toon heeft 15 noten minder dan Karel. Hoeveel noten heeft Toon?

De twee overige verkeerde navertellingen die volgden op een foutief antwoord, waren onvolledige, slecht gevormde vraagstukken.

Oplissing correct/navertelling fout. In tegenstelling tot C-vraagstukken, lokten I-opgaven vrijwel geen 'correcte oplossing/foutieve navertelling'-en uit. Slechts één geval kwam in deze categorie terecht. Het betrof een leerling die de I-optelopgave correct oploste en vervolgens navertelde als een optelvraagstuk met een veranderingsstructuur.

Oplissing fout/navertelling correct. Tot slot waren er twee gevallen waarin een I-opgave eerst foutief werd opgelost en vervolgens correct werd naverteld. Eén leerling beantwoordde een I-vraagstuk met één van de gegeven getallen, doch vertelde het daarna correct na; bij de andere leerling volgde de correcte navertelling op een verkeerde-operatiefout. In beide gevallen bleef de inconsistente structuur van de opgave in de navertelling bewaard.

4.2.3 Afsluitend interview

Acht willekeurig gekozen leerlingen die als laatste toetsitem een I-vraagstuk gekregen hadden én deze opgave correct doch met een I/C-omkering hadden naverteld, werden op het einde van het interview geconfronteerd met hun 'eigenaardige' navertelling van deze laatste opgave. De uitgangsvraag van de interviewer was: "Lees de opgave nog eens heel aandachtig en luister goed hoe jij ze naverteld hebt. (De interviewer herhaalt de navertelling van de leerling). Wat vind je van jouw navertelling?" De ene helft van de leerlingen reageerde erg verward; sommigen van hen begonnen zelfs te twijfelen aan de juistheid van hun (correcte) navertelling én van hun (correct) antwoord. De andere helft reageerde helemaal niet verrast op de aanwezigheid van de I/C-omkering in hun navertelprotocol: zij legden uit dat zinnen als "Piet heeft 14 noten meer dan Ria" en "Ria heeft 14 noten minder dan Piet" hetzelfde betekenen, en twee van hen voegden daar expliciet aan toe dat ze tijdens het oplossen het I-vraagstuk 'bewust' omgevormd hadden tot een meer vertrouwde C-opgave om de keuze van de vereiste rekenoperatie te vergemakkelijken.

5 Samenvatting en discussie

In onderhavig artikel is verslag uitgebracht van een studie waarin 40 vijfdeklassers een aantal

vergelijkingsopgaven oplossen en navertelden. Dit onderzoek had tot doel het door Lewis en Mayer (1987) ontwikkeld model van het begrijpen en oplossen van dergelijke opgaven aan een verdere empirische toetsing te onderwerpen. De centrale hypothese uit dit model is dat subjecten een duidelijke voorkeur hebben voor vergelijkingsopgaven met een consistente structuur. Indien ze geconfronteerd worden met een I-opgave, zullen zij die - alvorens tot de keuze van de vereiste rekenoperatie over te gaan - mentaal omvormen tot een C-opgave. Deze omvorming stelt echter hoge eisen aan het werkgeheugen. Wanneer - als gevolg van deze geheugenoverlast - de omvorming slechts gedeeltelijk wordt doorgevoerd, ontstaat er een foutieve probleemrepresentatie die leidt tot een verkeerde-operatiefout.

Een eerste resultaat van onderhavige studie dat duidelijk steun verleent aan het LM-model, is dat de leerlingen significant slechter presteerden op I- dan op C-opgaven; bovendien waren de foutieve antwoorden op de I-opgaven allemaal het resultaat van het uitvoeren van een verkeerde operatie. Dit resultaat ligt helemaal in de lijn van de bevindingen van Lewis en Mayer (1987), Riley e.a. (1983) en Verschaffel e.a. (1990, 1992). Toch betekent het meer dan louter een bevestiging van dit inmiddels goed onderbouwde onderzoeksgegeven. Tot nog toe werd het effect van de factor 'consistentie' op de moeilijkheidsgraad van enkelvoudige vergelijkingsvraagstukken immers enkel vastgesteld bij jonge basisschoolleerlingen (6-9-jarigen), terwijl uit onderhavige studie blijkt dat deze factor ook nog invloed heeft op de prestaties van 10-11-jarigen op enkelvoudige vergelijkingsvraagstukken.

Ten tweede bevestigen de resultaten de hypothese dat I-vraagstukken meer oplossingstijd vergen dan C-opgaven. Ook dit resultaat, dat trouwens eveneens in de lijn ligt van voorgaand onderzoek (Verschaffel e.a., 1990, 1992), kan geïnterpreteerd worden als een indicatie voor de veronderstelde additionele verwerkingsprocessen bij I-opgaven.

Ten derde werd vastgesteld dat leerlingen C-vraagstukken vaker correct navertelden dan I-opgaven. Wanneer we ervan uitgaan dat het navertelprotocol een weerspiegeling vormt van de interne probleemrepresentatie en tevens aannemen dat de keuze van de vereiste reken-

operatie gebaseerd is op deze probleemrepresentatie, dan suggereert deze vaststelling dat het groter aantal verkeerde-operatiefouten en de langere oplossingstijden bij I-opgaven inderdaad te wijten zijn aan moeilijkheden in de fase van de probleemrepresentatie.

Het vierde - en tevens belangrijkste - resultaat houdt verband met de uit het LM-model afgeleide hypothese dat I-vraagstukken vaak naverteld zullen worden in de vorm van een C-opgave, terwijl deze laatste op hun beurt zelden of nooit als I-opgave zullen worden naverteld. De resultaten vormden een overtuigende bevestiging van deze hypothese. Terwijl bij de C-vraagstukken nauwelijks één navertelling voorkwam met een inconsistente structuur, werden de I-opgaven in 61 % van de gevallen als een C-opgave naverteld. We troffen deze I/C-omkeringen zowel aan in de navertelprotocollen van de leerlingen die een I-opgave correct oplossen én navertelden, als van degenen die de opgave fout oplossen én navertelden. In de veronderstelling dat zo'n navertelprotocol inderdaad de uitdrukking vormt van de interne probleemrepresentatie van de leerling, bieden deze gegevens grote steun voor het LM-model. Immers, enerzijds suggereren de vele I/C-omkeringen in de navertelprotocollen van de leerlingen die de I-opgaven correct oplossen én correct navertelden, dat deze oplossingen veelal tot stand gekomen zijn door de inconsistente opgavestructuur eerst mentaal om te vormen tot een consistente. Anderzijds blijkt uit de vele I/C-omkeringen in de navertellingen van de leerlingen die de I-opgaven foutief oplossen én navertelden, dat deze verkeerde-operatiefouten over het algemeen rechtstreeks voortvloeiden uit een verkeerde probleemrepresentatie die op haar beurt het gevolg was van een onvolledige mentale transformatie van de I- in een C-opgave.

De resultaten van onderhavige studie, en met name de resultaten met betrekking tot het navertellen, vormen dus aanvullend bewijsmateriaal voor de plausibiliteit van de consistentiehypothese van Lewis en Mayer (1987). Zoals we hierboven reeds hebben aangegeven, is deze conclusie echter gebaseerd op twee belangrijke assumpties, nl.

1 dat de leerling zich bij de keuze van de vereiste rekenoperatie laat leiden door een se-

mantische representatie die hij van de essentiële elementen en relaties uit het vraagstuk heeft opgebouwd;

- 2 dat de navertelling van de leerling gebaseerd is op de semantische representatie die hij van het vraagstuk heeft opgebouwd en die tevens het vertrekpunt was voor de keuze van de vereiste rekenoperatie.

Hierna wordt op beide assumpties dieper ingegaan.

De eerste basisassumptie brengt ons bij de sleutelwoordstrategie als mogelijke alternatieve verklaring voor het gegeven dat I-vraagstukken moeilijker zijn dan C-opgaven (Verschaffel e.a., 1990, 1992). Deze strategie komt kortweg hierop neer dat de oplosser zich bij de keuze van de vereiste rekenoperatie niet laat leiden door een globale semantische representatie van de essentiële elementen en relaties uit het vraagstuk, maar louter op de aanwezigheid van een bepaald sleutelwoord in de opgavetekst, nl. het woord 'meer' of 'minder' dat respectievelijk geassocieerd wordt met optellen en aftrekken. Bij C-opgaven leidt deze oppervlakkige sleutelwoordstrategie stevast tot de juiste operatie, terwijl ze bij I-opgaven steeds tot een verkeerde-operatiefout aanleiding geeft. In dit verband signaleren we dat Hegarty, Mayer en Green (1992) recent eveneens oplossings tijden en oogbewegingsgegevens bij vergelijkingsopgaven hebben verzameld. De belangrijkste vaststelling uit hun onderzoek, dat qua opzet analoog is aan de oogbewegingsstudies van Verschaffel e.a. (1990, 1992), is dat enkel de goede oplossers (d.w.z. degenen die weinig of geen fouten maakten) meer tijd besteedden aan de I- dan aan de C-opgaven; de zwakke oplossers daarentegen losten beide soorten opgaven even snel op. Volgens Hegarty e.a. (1992) zou deze laatste vaststelling er kunnen op wijzen dat de zwakke oplossers zich bij de keuze van de rekenoperatie niet lieten leiden door een semantische probleemrepresentatie, doch eerder hun toevlucht namen tot de oppervlakkige sleutelwoordstrategie. Dat deze sleutelwoordstrategie wellicht geen belangrijke rol heeft gespeeld in onderhavige studie, blijkt o.m. uit de volgende twee vaststellingen. Ten eerste, slechts van twee van de 40 leerlingen komt het antwoordpatroon voor de vier vergelijkingsvraagstukken overeen met dat

wat op basis van de sleutelwoordstrategie te voorspellen valt, nl. een correct antwoord op de twee C-opgaven en een verkeerde-operatiefout op de twee I-opgaven. Ten tweede, in 89% van de gevallen waarin een C-opgave correct opgelost werd, werd ze ook juist naverteld; indien de sleutelwoordstrategie in onderhavige studie wél een rol van betekenis zou hebben gespeeld, dan hadden we veel minder dergelijke gevallen moeten aantreffen (zie ook Stern, in press). Toch valt niet uit te sluiten dat enkele verkeerde-operatiefouten via deze alternatieve weg tot stand gekomen zijn.

Een tweede belangrijke assumptie die aan onderhavige studie ten grondslag ligt, is dat de semantische representatie, die als vertrekpunt fungeerde voor de keuze van de vereiste rekenoperatie, ook aan de basis lag van de navertelling. Meer bepaald zijn we ervan uitgegaan

- a dat de aanwezigheid van een I/C-omkering in een navertelprotocol erop wijst dat er tijdens het oplossingsproces effectief een transformatie van een I- tot een C-opgave (of omgekeerd) heeft plaatsgevonden, en
- b dat de afwezigheid van een I/C-omkering in een navertelprotocol een indicatie vormt dat er tijdens het oplossingsproces geen I/C-omkering heeft plaatsgevonden.

Zowel bij punt a. als bij punt b. kunnen echter vraagtekens worden geplaatst.

Punt a. kan het best verduidelijkt worden aan de hand van een denkbeeldig voorbeeld. Stel dat een leerling - op het moment dat hij het I-vraagstuk "Piet heeft 29 noten. Hij heeft 14 noten meer dan Ria. Hoeveel noten heeft Ria?" moet navertellen - geen toegang meer heeft tot de semantische representatie die hij van dit vraagstuk heeft opgebouwd, en zich enkel nog herinnert 1. dat er in de opgave sprake was van een vergelijking van twee sets en 2. dat de uitkomst 15 was. En laat ons verder aannemen dat deze leerling, door deze 'vage' herinneringen aan de opgave te combineren met 1. de informatie verstrekt door de interviewer ("het vraagstuk ging over noten", "de namen waren Piet en Ria"), 2. de beschikbare informatie op de achterkant van de steekkaart (nl. de getallen 29 en 14), en 3. z'n eigen (impliciete) verwachtingen omtrent vraagstukken in het algemeen en vergelijkingsvraagstukken in het bijzonder, de volgende navertelling produceert: "Piet

heeft 29 noten. Ria heeft 14 noten minder dan Piet. Hoeveel noten heeft An?". In dit (denkbeeldig) geval wijst de I/C-omkering in het correcte navertelprotocol van deze leerling er weliswaar op dat hij een voorkeur heeft voor de consistente uitdrukkingsvorm van vergelijkingsopgaven, maar of deze leerling het I-vraagstuk ook daadwerkelijk opgelost heeft via omvorming tot een C-opgave, kan daaruit niet met zekerheid worden afgeleid. Deze mogelijke alternatieve ontstaanswijze van een I/C-omkering in een navertelprotocol, kan geleid hebben tot een zekere overschatting van het aantal representatie- en oplossingsprocessen dat overeenkomt met het LM-model.

Dit probleem wordt echter gecompenseerd door probleem b., nl. dat we allicht ook niet alle gevallen waarin een I-vraagstuk effectief opgelost is door er een C-opgave van te maken, via de techniek van het navertellen op het spoor gekomen zijn. Immers, een leerling die de opdracht krijgt een vraagstuk na te vertellen, herinnert zich vaak niet enkel de semantische representatie die hij uiteindelijk van de opgave heeft opgebouwd; daarnaast kan hij tijdens het navertellen ook beroep doen op allerhande 'overblijfselen' van de daaraan voorafgaande verwerkingsfasen (De Corte & Verschaffel, 1987; Verschaffel, 1984). De kans bestaat dus dat sommige leerlingen die een I-vraagstuk daadwerkelijk opgelost hebben door er eerst een C-opgave van te maken, toch geen navertelling met een I/C-omkering hebben geproduceerd, doordat zij zich ook nog de oorspronkelijke formuleringwijze van de I-opgave herinnerden. In dit verband herinneren we eraan dat sommige leerlingen die een I-vraagstuk aanvankelijk als een C-opgave begonnen na te vertellen, zichzelf a.h.w. corrigeerden en de opgave vervolgens op inconsistente wijze afmaakten (zie paragraaf 4.2.1). Doch – in tegenstelling tot de onder punt a. besproken kwestie – vormt probleem b. in geen geval een aantasting van de resultaten en conclusies van onderhavige studie, aangezien het enkel kan geleid hebben tot een *onderschatting* van het aantal representatie- en oplossingsprocessen dat overeenkomt met het LM-model.

Omwille van de hierboven besproken methodologische problemen, is er behoefte aan voortgezet onderzoek waarin bijkomend empirisch

materiaal verzameld wordt over het door Lewis en Mayer (1987) veronderstelde transformatieproces bij I-opgaven, gebruikmakend van nieuwe (combinaties van) onderzoeksstrategieën en -technieken. Verbale rapporteringstechnieken zoals hardop-denken en retrospectie kunnen hierbij allicht een betekenisvolle rol spelen (zie paragraaf 4.2.3). Verder lijkt het ons aangewezen om de verzamelde gegevens niet uitsluitend te analyseren voor de ganse onderzoeksgroep, maar ook analyses per leerling te verrichten (bijv. systematiek in antwoorden, in navertellingen...).

Naast het verzamelen van bijkomend empirisch materiaal over de veronderstelde omvorming van I- naar C-opgaven, dringen zich rond het LM-model nog tal van onopgeloste vragen op: Hoe komt het dat C-vraagstukken in het algemeen verkozen worden boven I-opgaven? Wordt deze voorkeur veroorzaakt door de intrinsieke moeilijkheidsgraad van de inconsistente structuur; of is het eerder een kwestie van vertrouwdheid? Welk mechanisme is ervoor verantwoordelijk dat deze voorkeur voor C-opgaven het feitelijk oplossingsproces beïnvloedt? Is de transformatie van een I- in een C-opgave (altijd) het resultaat van de bewuste toepassing van een specifieke oplossingsstrategie? En zijn degenen die deze oplossingsstrategie bewust hanteren tevens de beste oplossers van I-opgaven? Hoe kunnen we verklaren dat I-vraagstukken niet altijd opgelost worden door er eerst een C-opgave van te maken? Komt dit doordat sommige oplossers (nog) niet beseffen dat beide uitdrukkingwijzen van de vergelijking gelijkwaardig zijn (Stern, in press)? Of is de reden dat bij hen de keuze van de vereiste rekenoperatie door deze transformatie niet écht vereenvoudigd wordt? En hoe verloopt het begrijpen en oplossen van I-opgaven bij deze oplossers dan wél? Vinden er bij hen misschien andersoortige transformatieprocessen plaats, bijv. in termen van het combinatie- of het veranderingsschema, zoals respectievelijk door Riley e.a. (1983) en door Fuson, Carroll en Landis (1992) wordt gesuggereerd?

Tot slot is er behoefte aan construerend onderzoek, waarin instructiemaatregelen die men uit de verrichte constaterende studies zou kunnen afleiden, systematisch worden uitgewerkt en bestudeerd. Enigszins vooruitlopend op de uitkomsten van het voortgezet constaterend

onderzoek, vermelden we reeds enkele mogelijke aandachtspunten:

- leerlingen leren inzien dat een vergelijkingsrelatie tussen twee sets op twee (evenwaardige) wijzen kan worden uitgedrukt (zie Stern, in press);
- leerlingen de transformatie van een I- naar een C-opgave bijbrengen als een concrete toepassing van de bekende algemene heuristisch 'denk aan een analoog probleem';
- leerlingen de metacognitieve kennis bijbrengen dat bij toepassing van deze transformatieregel het werkgeheugen zwaar belast wordt en er dus een reële kans bestaat dat er iets misloopt, zodat wanneer zij geconfronteerd worden met een I-opgave, een 'alarmbel gaat rinkelen' die maakt dat zij tijdens het uitvoeren van de transformatie extra aandachtig zijn en ook achteraf nog eens extra controleren (zie Fischbein, 1987).

Noten

- 1 'Object' verwijst in feite naar de zgn. 'nabepaling bij de vergelijkende term'. Omwille van de eenvoud van de uiteenzetting en naar analogie met de oorspronkelijke tekst van Lewis en Mayer (1987), hanteren we hiervoor echter de term 'object'.
- 2 Gemakshalve wordt de transformatie hier weergegeven alsof het een omvorming op tekstniveau betrof. Volgens het model gaat het echter niet om één transformatie van de opgavetext als zodanig, doch veeleer om een omvorming van de opgebouwde semantische probleemrepresentatie.
- 3 In het model zit ook nog de hypothese vevat dat de kans op omkering van de relationele term, kleiner is bij een I-opgave waarin de term 'minder' voorkomt dan bij een I-opgave die 'meer' bevat. In onderhavig artikel wordt aan dit onderdeel van het LM-model geen aandacht besteed.
- 4 Alleen de tweede naam geven (in plaats van de beide namen) zou immers een sterke suggestie inhouden om de tweede zin met deze tweede naam te beginnen en zou aldus een (re)productie in termen van een C-opgave in de hand werken.
- 5 In onderhavige studie beperken we ons - zoals in noot 3 vermeld - tot het consistentie-effect. De resultaten in verband met het andere taakmerk, nl. 'operatie', evenals de interactie-

effecten 'consistentie x operatie' zijn buiten beschouwing gelaten.

Literatuur

- Briars, D. J., & Larkin, J. H. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction*, 1, 245-296.
- Corte, E. De, & Verschaffel, L. (1985a). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 4, 3-21.
- Corte, E. De, & Verschaffel, L. (1985b). Werken met eenvoudige rekenvraagstukjes in de eerste klas. In E. De Moor (Ed.), *Reken/wiskundeonderwijs anno 1984. Panama cursusboek 3* (pp. 34-41). Utrecht: Stichting Opleiding Leraren/Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijs Computercentrum, R.U. Utrecht.
- Corte, E. De, & Verschaffel, L. (1987). Using retelling data to study young children's word problem solving. In D. Rogers & J. Sloboda (Eds.), *Cognitive processes in mathematics. (Keele Cognition Seminars 1)* (pp. 42-59). Oxford: Clarendon Press.
- Corte, E. De, Verschaffel, L., & Verschueren, J. (1982). First graders' solution processes in elementary word problems. In A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematical Education* (pp. 91-96). Antwerp: University of Antwerp.
- Cummins, D. D., Kintsch, W., Reusser, K., & Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology*, 20, 405-438.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Reidel.
- Fuson, K. C., Carroll, W. M., & Landis, J. (1992, March). *Developmental sequences of conceptual structures for children's solutions of addition and subtraction word problems*. Paper presented at a workshop on "Word problems in algebra and arithmetic: From language comprehension to problem solving". Max Planck Institut für Psychologische Forschung, München.
- Hegarty, M., Mayer, R. E., & Green, C. E. (1992). Comprehension of arithmetic word problems: Evidence for students' eye fixations. *Journal of Educational Psychology*, 84, 76-84.
- Huttenlocher, J., & Strauss, S. (1968). Comprehension and a statement's relation to the situation it describes. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, 7, 300-304.

Auteur

L. Verschaffel (1957) is Bevoegdverklaard Navorser van het Belgisch Nationaal Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek en tevens Deeltijds Universitair Hoofddocent aan de K.U.Leuven.

Adres: Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie, Katholieke Universiteit Leuven, Vesaliusstraat 2, B-3000 Leuven, België.

Abstract

How do children represent and solve compare problems? A test of a process model using retelling data

L. Verschaffel. *Pedagogische Studiën*, 1992, 69, 270-283.

In an attempt to explain pupils' and even adults' difficulties with particular types of compare problems, Lewis and Mayer (1987) have presented a model that simulates the comprehension processes when solving these problems. The crucial component of their model is the 'consistency hypothesis', according to which students are more likely to experience representational difficulties – and consequently to make an error – when the presentation of the terms in the relational statement of the problem is not consistent with their preferred format. To test this model, an experiment was carried out in which 40 fifth-graders were asked to solve and retell a set of one-step compare problems. The accuracy, solution time and – especially – the retelling data revealed strong evidence in favor of the consistency hypothesis.

Jaspers, M., & Van Lieshout, E. (1989). Een trainingsprogramma voor kinderen met leerproblemen gericht op het aanleren van concrete representaties voor redactieopgaven. *Pedagogische Studiën*, 66, 240-255.

Lewis, A., & Mayer, R. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 79, 363-371.

Mayer, R. E. (1982). Memory for algebra story problems. *Journal of Educational Psychology*, 74, 199-216.

Morales, R. V., Shute, V. J., & Pellegrino, J. W. (1985). Developmental differences in understanding and solving simple word problems. *Cognition and Instruction*, 2, 41-57.

Riley, M. S., & Greeno, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction*, 5, 49-101.

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburgh (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). New York: Academic Press.

Stern, E. (in press). What makes arithmetic word problems about the comparison of sets so hard for children? *Journal of Educational Psychology*.

Verschaffel, L. (1984). *Representatie- en oplossingsprocessen van eersteklassers bij aanvankelijke redactie-opgaven over optellen en aftrekken*. (Niet-gepubliceerd doctoraatsproefschrift). Leuven: Afdeling Didactiek, K.U.Leuven.

Verschaffel, L., Corte, E. De, & Pauwels, A. (1990). Het oplossen van vergelijkingsvraagstukken: een empirische toetsing van het model van Lewis en Mayer. *Tijdschrift voor Onderwijsresearch*, 15, 172-188.

Verschaffel, L., Corte, E. De, & Pauwels, A. (1992). Solving compare problems. An eye movement test of Lewis and Mayer's consistency hypothesis. *Journal of Educational Psychology*, 84, 85-94.