Rekenfeiten in het cijferend optellen en aftrekken tot 100*

M. W. J. BALTUSSEN en E. C. D. M. VAN LIESHOUT**
Instituut voor Orthopedagogiek
Katholieke Universiteit Nijmegen

Samenvatting

De vraag naar de functionele rol van het automatiseren van de rekenfeiten bij het cijferend optellen en aftrekken staat in dit onderzoek centraal. Bij 58 lom- en ml-kinderen is nagegaan of beheersing van de rekenfeiten direct van invloed is op de juistheid en het tempo van oplossen. Eveneens is onderzocht of deze beheersing indirect via het gebruik van geavanceerde rekenstrategieën in de juistheid van het antwoord tot uitdrukking komt. Er kon geen steun gevonden worden voor de hypothese dat kinderen met meer rekenfeitenkennis bij het oplossen van cijferopgaven minder vertraagd zouden worden door tientaloverschrijding dan kinderen zonder rekenfeitenkennis. Het ontbreken van rekenfeitenkennis blijkt wel vertragend te werken bij opgaven waarbij een twee-cijferig getal opgeteld of afgetrokken moet worden. Daarnaast bleken kinderen zonder kennis van de rekenfeiten vaker een telstrategie toe te passen en meer telfouten te maken dan kinderen die over meer geautomatiseerde rekenfeiten beschikken. Er lijken aanwijzingen te zijn voor een functionele rol van de rekenfeiten bij het cijferend rekenen.

* Deze bijdrage vormt een bewerkte versie van het paper: ''Number facts in het cijferend optellen en aftrekken tot 100'' gepresenteerd tijdens de Onderwijsresearchdagen, 24-25 mei 1989 te Leiden.

** Wij willen de teams van de Zonnegaardschool en de Wilhelmina Bladergroenschool uit Nijmegen en De Schans uit Venlo bedanken voor hun medewerking aan dit onderzoek. Tevens dank aan J. van Erp en J. van Veldhoven voor hun assistentie bij de onderzoekswerkzaamheden.

1 *Inleiding*

Kinderen met rekenproblemen (afkomstig uit het gewoon lager onderwijs) rekenen op een niveau dat vergelijkbaar is met normaal lerende maar een jaar jongere kinderen (Russel & Ginsburg, 1984). Een uitzondering vormt de beheersing van de rekenfeiten, die meer dan een jaar achterblijft. De rekenfeiten zijn onvoldoende geautomatiseerd. Dit zou een mogelijke oorzaak van rekenproblemen kunnen zijn. Onder rekenfeiten verstaan wij in dit onderzoek alle optelopgaven met enkelvoudige getallen zoals $7+8$ en aftrekopgaven met enkelvoudig aftrektal en enkelvoudige uitkomst zoals $12-5$. Wij zullen ons in deze bijdrage beperken tot die rekenfeiten waarbij sprake is van tientaloverschrijding. In onderhavig onderzoek wordt nagegaan of er aanwijzingen zijn dat de beheersing van rekenfeiten van belang is voor prestaties op het gebied van het cijferend rekenen. Wij richten ons hierbij op kinderen uit het speciaal onderwijs.

In een leerproces treden na verloop van tijd verkorting en versnelling van procedures op: handelingen worden geautomatiseerd. Automatisering van handelingen betekent echter niet alleen dat deze handelingen verkort en sneller uitgevoerd gaan worden, ook de graad van bewustzijn van de handelingen verandert. De procedure hoeft niet meer bewust uitgevoerd te worden maar voltrekt zich automatisch (Laberge & Samuels, 1974; Eysenck, 1984). Deze ideeën zijn met name ontwikkeld op het terrein van het lezen. Indien een geoefende lezer geconfronteerd wordt met een woord dan zal hij dit spontaan lezen; hij kan dit zelfs niet voorkómen. Bij gebrek aan vergelijkbare theorieën voor het rekenen, wordt verondersteld dat de theorieën omtrent de geautomatiseerde woordherkenning enigszins van toepassing zijn op de rekenfeiten (Resnick & Ford, 1984). Of ook hier geldt dat het zien van de opgave $6+5$, spontaan het antwoord '11' doet opkomen, is uit de huidige stand van onderzoek niet af te leiden. Wel lijkt bij een geautomatiseerd zijn van de rekenfeiten, evenals bij de geautomatiseerde woordherkenning de uitvoer van handelingen onbewust te verlopen zodat geen beroep meer gedaan

Pedagogische Studiën 1990 (67) 306-316

hoeft te worden op het werkgeheugen. De beperkte geheugencapaciteit kan daardoor voor andere – niet geautomatiseerde – zaken ingezet worden (Perfetti & Lesgold, 1979; Anderson, 1982).

Kinderen met rekenproblemen blijven rekenfeiten echter veelal langzaam en niet foutloos oplossen. Aanvankelijk bereiken de meeste kinderen de oplossing op een rekenfeit via uitgebreide procedures. Dit kan via het geheel uittellen van het antwoord (count-all) of via het geavanceerde doortellen (count-on) of bijtellen van het kleinste getal (count-by-min) verlopen (Groen & Parkman, 1972; Fuson, 1982). Uiteindelijk zullen de procedures zodanig verkort en versneld zijn dat het antwoord ineens uit het geheugen opgehaald kan worden. Het doorlopen van telprocedures blijft achterwege. De antwoorden op de rekenfeiten liggen direct toegankelijk opgeslagen in het lange termijn geheugen (Ashcraft & Battaglia, 1978; Ashcraft, 1982; Hamann & Ashcraft, 1985). De uitgebreide telprocedures blijven aanwezig zodat bij het verloren gaan van de direct uit het geheugen op te halen informatie hierop teruggevallen kan worden (Payne, 1988).

Naast het ineens ophalen van het antwoord uit het geheugen kunnen rekenfeiten eveneens opgelost worden via het gebruik van afgeleide rekenfeiten (Wolters, 1984/1985; Baroody, 1985; Steinberg, 1985). Zogenaamde handige rekenregels bieden de mogelijkheid om een onbekend rekenfeit om te vormen tot een vertrouwd probleem. Bijvoorbeeld via de dubbel + 1-regel (Steinberg, 1985) kan de som 6 + 7 herleid worden tot de bekende som (6 + 6) + 1. De handige rekenregels zijn specifiek afgestemd op één somtype. Het gevaar voor overgeneralisatie is met name bij zwakkere rekenaars groot (Wolters, 1984/1985). De kans op fouten in de rekenfeiten is bij deze groep kinderen waarschijnlijk kleiner indien het antwoord direct uit het geheugen opgehaald kan worden.

Het geautomatiseerd beheersen van de rekenfeiten heeft daarnaast, zoals eerder vermeld, als verdienste dat het werkgeheugen minder belast wordt in vergelijking met het uittellen of afleiden van het antwoord. Er blijft ruimte over voor het aanwenden van niet-geautomatiseerde procedures zoals bijvoorbeeld het inwisselen (Anderson, 1982; Resnick & Ford, 1984). Dit leidt mogelijk tot een vermindering van het foutenaantal.

Zoals eerder gesteld blijven kinderen met rekenproblemen achter wat betreft snelheid en nauwkeurigheid bij het oplossen van rekenfeiten. Het grote aantal van buiten te leren rekenfeiten (100) zou mogelijk voor deze kinderen een te zware geheugenbelasting vormen. In recent onderzoek (Baltussen & Van Lieshout, 1989) werd daarom het belang van het geautomatiseerd zijn van de splitsingen voor de cijferprestaties nagegaan. Splitsen omvat het uiteen kunnen leggen van een getal (tot en met 10) in zijn samenstellende delen. Bijvoorbeeld 5 kan gesplitst worden in 2 en 3 of 1 en 4. Een splitsing wijkt qua vorm af van een rekenfeit. Heeft een rekenfeit de vertrouwde vorm van een optel- of aftreksom, de splitsing wordt schriftelijk veelal weergegeven in een T-vorm: $\frac{8}{3\ 1}$. In totaal zijn er 66 splitsingen.

Verwacht werd dat het geautomatiseerd zijn van de splitsingen, het oplossen van sommen met tientaloverschrijding zou vergemakkelijken doordat splitsen aanleiding geeft tot het gebruik van een splitsstrategie (aanvullen en leegmaken tot 10); bijvoorbeeld bij: 7 + 8 dat splitsend uitgerekend wordt als (7 + 3) + 5. Het gebruik van splitsingen bij het oplossen van opgaven met tientaloverschrijding betekent een reductie in het aantal van buiten te leren rekenfeiten. In het voorbeeld hoeft het rekenfeit 7 + 8 = 15 niet meer gekend te worden. Wel moet het inzetten van de splitsstrategie aangeleerd worden. Dit algoritme is vergelijkbaar voor alle cijferopgaven en zou derhalve minder geheugenruimte behoeven.

In het genoemde onderzoek kon echter de interactie tussen de splitsvaardigheid van het kind en de aanwezigheid van tientaloverschrijding noch in het aantal juiste oplossingen noch in de oplossingstijd aangetoond worden. Dit leidde tot de vraag of de beschikbaarheid van de rekenfeiten met tientaloverschrijding wellicht toch een belangrijke rol vervult tijdens het cijferen van kinderen met rekenproblemen. Het zelfstandig toepassen van de splitsstrategie vormt mogelijk een groter struikelblok voor deze kinderen dan het van buiten leren van een grotere hoeveelheid rekenfeiten. Wellicht leidt het niet beschikbaar hebben van de rekenfeiten met tientaloverschrijding eerder tot tellen dan tot spontaan toepassen van een splitsstrategie zodat het tempo vertraagt en het aantal fouten toeneemt. De gegevens uit het genoemde onderzoek werden naar aanleiding van deze vraag heranalyseerd. Het achterliggende idee bij deze vraagstelling wordt gevormd door de overweging dat met name kinderen met rekenproblemen moeite blijven houden met het automatiseren van de rekenfeiten. Is het noodzakelijk deze kinderen te blijven trainen op dit terrein of kan ondanks het niet beheersen van de rekenfeiten toch verder gegaan worden met het voortgezet rekenen terwijl een redelijke kans op succes behouden blijft?

Het toepassen van rekenfeiten met tientaloverschrijding is vooral nuttig bij opgaven met tientaloverschrijding. De eenheden kunnen zonder tussenstappen opgeteld of afgetrokken worden. Kinderen, die deze rekenfeiten geautomatiseerd tot hun beschikking hebben, zullen bij opgaven met tientaloverschrijding in het voordeel zijn ten opzichte van kinderen die niet beschikken over geautomatiseerde rekenfeiten. De laatst genoemde kinderen zullen extra tijd nodig hebben voor het in het geheugen zoeken, het uitrekenen of het uittellen van het antwoord of, nadat ze in een impasse zijn geraakt, voor het overgaan op een andere oplossingsstrategie. Verwacht wordt, dat kinderen, die de rekenfeiten geautomatiseerd hebben, door de aanwezigheid van tientaloverschrijding bij het oplossen van cijferopgaven minder vertraagd worden dan kinderen zonder geautomatiseerde kennis van de rekenfeiten.

Een vrijwel identieke voorspelling kan, hoewel minder gemakkelijk, ook voor de juistheid van oplossen van cijferopgaven gedaan worden. Een goed antwoord is weliswaar ook via tellen, splitsen of handig rekenen te verkrijgen, maar de kans op fouten lijkt groter als gevolg van onder andere de zwaardere geheugenbelasting. Bij tellen is daarnaast het dubbelsporig tellen nog een extra foutenbron. Onder dubbelsporig tellen wordt verstaan het tegelijkertijd bijhouden van hoeveel al bij- of afgeteld is en van de tussenuitkomst op dat moment. Bijv. $8+4=9\,(+1), 10\,(+2), 11\,(+3), 12\,(+4)$. Het gebruik van rekenfeiten kan in eerste instantie, door verkeerd onthouden, leiden tot een toename van het aantal fouten. Zijn de rekenfeiten echter volledig geautomatiseerd dan zal het foutenaantal waarschijnlijk dalen.

Een interactie-effect tussen tientaloverschrijding en het beheersen van rekenfeiten voor wat betreft het aantal juist opgeloste opgaven zou derhalve een extra bevestiging voor de rol van de rekenfeiten zijn. Kinderen, die beschikken over geautomatiseerde kennis van de rekenfeiten zullen relatief meer opgaven met tientaloverschrijding goed maken dan kinderen die de rekenfeiten niet geautomatiseerd tot hun beschikking hebben, terwijl ze minder van elkaar zullen verschillen bij opgaven zonder tientaloverschrijding.

Observatie van oplossingsgedrag kan een andere aanwijzing geven voor de functionele rol, die het beheersen van de rekenfeiten bij het cijferend rekenen speelt. Kennis van de rekenfeiten is functioneel als deze bij het oplossen van cijferopgaven ingezet wordt. Hoewel veel kinderen vaak uit veiligheidsoverwegingen blijven tellen, sluipen in deze oplossingsroute fouten, die door het automatiseren van de rekenfeiten voorkomen kunnen worden. Kinderen, die de rekenfeiten geautomatiseerd hebben, zullen naar verwachting geavanceerdere oplossingsstrategieën (met name een rekenfeitenstrategie) gebruiken dan kinderen die de rekenfeiten niet geautomatiseerd hebben. Bevestiging van deze hypothese leidt tot de vraag of het gebruik van een geavanceerde oplossingsstrategie betere prestaties tot gevolg heeft. Kinderen, die tijdens het uitrekenen van een cijfersom een geavanceerde oplossingsstrategie gebruiken, zullen meer goede antwoorden geven dan kinderen die zich bedienen van minder geavanceerde strategieën. Een positief antwoord zou een verdere aanwijzing zijn voor de rol van de rekenfeiten bij het cijferend rekenen.

Het analyseren van foutief opgeloste opgaven biedt een andere mogelijkheid om informatie te verkrijgen over het inzetten van rekenfeiten bij het oplossen van cijferopgaven. Kinderen, die de rekenfeiten beheersen, zullen weinig telfouten maken. Hun fouten zullen zich concentreren in fouten tegen nog niet geautomatiseerde procedures zoals inwisselen en lenen. Kinderen, die de rekenfeiten niet geautomatiseerd hebben daarentegen, zullen naar verwachting zowel telfouten als fouten met inwisselen en lenen maken. Foutenanalyse kan meer inzicht geven in het daadwerkelijk gebruik van rekenfeiten.

2 *Methode*

2.1 *Procedure*

Het onderzoek viel uiteen in twee delen. Het eerste deel bestond uit een drietal individuele schriftelijke en mondelinge toetsen, die eenduidig te scoren waren. Het tweede deel bevatte één toets die aan de hand van hardopdenkonderzoek de door de leerling gehanteerde oplossingsstrategieën trachtte te achterhalen. Uit betrouwbaarheidsoverwegingen was bij het hardopdenk-onderzoek een tweede observator aanwezig. Voor het tweede deel van het onderzoek werd, vanwege de doelstellingen van het oorspronkelijke onderzoek waarin het splitsen centraal stond (Baltussen & Van Lieshout, 1989), een selectie uit de totale onderzoekspopulatie gemaakt op basis van splitsvaardigheid (de gemiddelde oplossingstijd per goede splitsopgave). Splitsvaardigheid kende twee categorieën a) hoog: de gemiddelde oplossingstijd ≤ 2.00 seconden en b) laag: gemiddelde oplossingstijd > 2.00 seconden. De korte oplossingstijd doet een geautomatiseerd zijn van de splitsingen vermoeden. Verondersteld werd dat de kinderen zonder bewust te hoeven nadenken, de opgaven oplossen. Dit kan echter niet in dit onderzoek nagegaan worden. Bij de hier beschreven heranalyse is een selectie gemaakt uit de kinderen op basis van de beheersing van de rekenfeiten. Daar van de totale onderzoeksgroep slechts twee kinderen de rekenfeiten in gemiddeld minder dan 2 seconden goed oplosten, werd gekozen voor het aanpassen van het tijdscriterium. De literatuur biedt geen duidelijke definitie van automatisering van de rekenfeiten. De vereiste oplossingstijd varieert tussen de 4 en 5 seconden (Usnick & Engelhardt, 1988). Dit leek ons echter te hoog. In 4 seconden kan een opgave tellend opgelost worden. Om toch twee groepen te formeren die duidelijk verschillen in de mate van geautomatiseerd zijn van de rekenfeiten is voor de snelle groep als criterium aangehouden: tenminste vijf van de tien rekenfeiten in ≤ 2 seconden goed opgelost. Voor de langzame groep was de maatstaf: geen enkel rekenfeit in ≤ 2 seconden goed beantwoord. Dit betekent dat de kinderen in de snelle groep niet alle rekenfeiten geautomatiseerd hebben. Aangenomen werd dat de graad van automatisering desondanks hoger was in deze groep dan in de groep met een gemiddeld langere antwoordtijd.

2.2 *Materiaal*

In het eerste gedeelte van het onderzoek werd de proefpersonen een splitstoets bestaande uit 15 splitsingen en een rekenfeitentoets bestaande uit tien opgaven betrekking hebbend op rekenfeiten met tientaloverschrijding (5 optel- en 5 aftrekopgaven) voorgelegd. De antwoordtijd en juistheid werden gescoord. Daarnaast werd een cijfertoets afgenomen, die bestond uit 32 cijferopgaven waarvan de ene helft optel- en de andere helft aftrekopgaven bevatte (zie Bijlage 1). De optel- en aftrekopgaven waren verdeeld in acht opgaven zonder en acht opgaven met tientaloverschrijding. Uitgaand van eerdere onderzoeksresultaten (Andrea, 1988) werd verondersteld dat zeer zwakke rekenaars het tweede getal uit een opgave geheel tellend bij het eerste getal zouden optellen of aftellen. De grootte van de telafstand leek derhalve ook de moeilijkheidsgraad van de opgave te beïnvloeden. De groepen van acht opgaven met en zonder tientaloverschrijding werden daarom op hun beurt verdeeld in drie opgaven met een kleine telafstand (+ of − max. 9) en vijf opgaven met een grote telafstand (+ of − min. 21). Dit alles resulteerde in acht verschillende somtypen. De antwoorden op de cijfertoets werden gescoord op tijd en juistheid.

Het hardopdenk-onderzoek bestond uit een strategie-onderzoek waarin het kind hardop denkend de opgaven moest oplossen. Het strategie-onderzoek bevatte 5 optel- en 5 aftrekopgaven met tientaloverschrijding (zie Bijlage 2). De scoring van de strategieën verliep aan de hand van een categorieënsysteem op basis van de methode die het kind hanteerde voor het optellen en aftrekken van de eenheden. De mate van geavanceerdheid van een oplossingsstrategie werd hierbij afgeleid uit de efficiëntie qua geheugenbelasting en de juistheid van de strategie. Onderscheiden werden de volgende strategieën in oplopende graad van geavanceerdheid: verkeerde strategie (smaller from larger, verkeerd splitsen en alle cijfers optellen alsof het eenheden zijn), tellen, splitsen, handig rekenen en/of rekenfeit toepassen. De geavanceerdheid van het strategiegebruik werd gescoord in een 4-puntsschaal (zie Figuur 1).

De categorieën, die geen relevante informatie over het optellen of aftrekken van de eenheden leverden, werden buiten beschouwing gelaten. Van 2.1% van de opgaven was

score 0:	verkeerde strategie		
	– foutief splitsen:	$\begin{array}{r}36\\+18\\\hline 54\end{array}$	8 gesplitst in 4 en 4
	– smaller from larger:	$\begin{array}{r}43\\-17\\\hline 34\end{array}$	$7-3=4$
	– alles optellen:	$\begin{array}{r}36\\+27\\\hline 18\end{array}$	$3+6+2+7=18$
score 1:	telstrategie	$\begin{array}{r}36\\+17\\\hline 53\end{array}$	$6+7=6,7,8\ldots,13$
score 2:	splitsstrategie	$\begin{array}{r}43\\-17\\\hline 26\end{array}$	eerst 3 eraf, inwisselen, daarna nog 4 eraf
score 3:	rekenfeitstrategie	$\begin{array}{r}43\\-17\\\hline 26\end{array}$	$13-7=6$
	handig rekenstrategie	$\begin{array}{r}36\\+17\\\hline 53\end{array}$	$6+7=(6+6)+1=12+1=13$

Figuur 1 *Scoringsschaal ten behoeve van het strategiegebruik*

het strategiegebruik niet categoriseerbaar.

Per persoon werd per opgave de strategie bepaald, gescoord op de schaal (van 0 t/m 3) en de totale score over de 10 opgaven berekend. Dit leidde uiteindelijk tot een strategievaardigheidsscore variërend van 0 t/m 30.

Binnen de categorieën tel-, rekenfeit- en handig rekenstrategie is geen onderscheid gemaakt tussen het juist of onjuist gebruik van deze strategieën. In eerste instantie omdat het oorspronkelijke onderzoek gericht was op de vergelijking van met name goede en slechte splitsers. Toen echter bleek dat ook kinderen uit het speciaal onderwijs een breed scala aan oplossingsstrategieën tot hun beschikking hadden, werd na bestudering van het aantal foutief toegepaste rekenfeit-, handig reken- en telstrategieën besloten dat een dergelijk onderscheid met het oog op het geringe voorkomen van foutief strategiegebruik onnodig was.

2.3 *Proefpersonen*

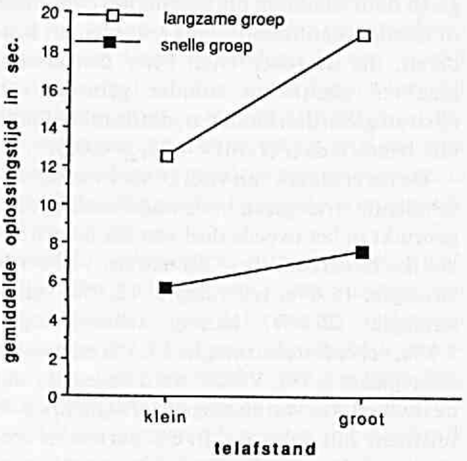
Voor het oorspronkelijke onderzoek werden 58 leerlingen van twee lom-scholen en een mlk-school geselecteerd. Er werden zoveel mogelijk kinderen geselecteerd, die nog niet zover in het cijferonderwijs gevorderd waren dat ze het oplossen van cijfersommen volledig onder de knie hadden. De uiteindelijke onderzoeksgroep voor het eerste deel van het onderzoek bestond uit 39 kinderen uit het lomonderwijs (30 jongens, 9 meisjes; gemiddelde leeftijd: 10.7 jaar, *sd*=0.95) en 19 kinderen uit het ml-onderwijs (9 jongens, 10 meisjes; gemiddelde leeftijd: 12.4 jaar, *sd*=1.01). Voor het tweede deel van het onderzoek werden van elke school de vijf kinderen met de hoogste en de vijf kinderen met de laagste splitsvaardigheid gekozen.

Bij de heranalyse werd volgens het criterium genoemd in 2.1 uit de genoemde proefgroep een nieuwe populatie samengesteld voor de herhaalde metingen analyse. Deze populatie bestond uit 20 kinderen uit het lomonderwijs (14 jongens, 6 meisjes; gemiddelde leeftijd: 10;8 jaar, *sd*=0.95) en 9 kinderen uit het ml-onderwijs (3 jongens en 6 meisjes; gemiddelde leeftijd: 12;6 jaar, *sd*=1.13). Deze procedure resulteerde in acht kinderen voor de snelle en tien kinderen voor de langzame groep in het tweede deel van het onderzoek.

3 *Resultaten*

Oplossingstempo

In een 2×2×2×2 variantie analytisch design met als afhankelijke variabele het oplossingstempo van de cijferopgaven, als tussen subjecten factor: beheersing van de rekenfeiten en met herhaalde metingen over de factoren: operatie, tientaloverschrijding en afstand werd geen significant interactie-effect gevonden tussen beheersing van de rekenfeiten en tientaloverschrijding ($F(1,27)=2.07$, ns). Kinderen, die de rekenfeiten beter beheersten, losten, in tegenstelling tot de verwachting, opgaven met tientaloverschrijding in vergelijking met opgaven zonder tientaloverschrijding niet sneller op dan kinderen met minder kennis van de rekenfeiten. Als hoofdeffect had tientaloverschrijding wel invloed op het oplossingstempo ($F(1,27)=16.7$, $p<.001$). Opgaven met tientaloverschrijding werden trager ($M=14.01$) opgelost dan opgaven zonder tientaloverschrijding ($M=8.21$). Daarnaast kon een significant interactie-effect vastgesteld worden tussen de beheersing van de rekenfeiten en de telafstand ($F(1,27)=7.83$, $p<.01$) (zie Figuur 2). Analyse van het simpele hoofdeffect van deze tweede orde interactie toonde aan dat kinderen, die over meer geautomatiseerde rekenfeiten beschikten opgaven met een kleine telafstand niet significant sneller oplosten ($M=5.65$) dan opgaven met een grote telafstand ($M=7.65$) ($F(1,10)=3.08$, ns). Dit in tegenstelling tot kinderen, die de rekenfeiten niet geautomatiseerd hadden, die opgaven met een kleine telafstand wel significant sneller oplosten ($M=12.55$) dan opgaven met een grote telafstand ($M=18.89$) ($F(1,17)=46.07$, $p<.01$).



Figuur 2 *Het tweede orde interactie-effect tussen beheersing van de rekenfeiten en telafstand.*

Juistheid van oplossen

In een zelfde variantie analytisch design met als afhankelijke variabele dit maal de juistheid van oplossen van de cijferopgaven kon geen significant interactie-effect vastgesteld worden voor de beheersing van de rekenfeiten en tientaloverschrijding. Er was wel sprake van een hoofdeffect van de beheersing van de rekenfeiten. Kinderen, die meer rekenfeiten geautomatiseerd beheersten, maakten significant meer opgaven goed dan kinderen die over minder geautomatiseerde rekenfeiten beschikten (($M=26.72$ resp. $M=20.8$); $F(1,27)=9.28$, $p<.01$)).

Strategievaardigheid

De betrouwbaarheid van de scoring van de strategieën was voldoende hoog: Cohens kappa lag boven het vereiste niveau van .60 (range =.66 – 1.00; mediaan=.89). Vergelijking van de groepen met een betere en slechtere beheersing van de rekenfeiten liet geen significant verschil in geavanceerdheid van strategiegebruik zien ($t(16)=0.5$, ns). Multivariate variantie analyse met de beheersing van de rekenfeiten als onafhankelijke variabele en de frequentie van het gebruik van een verkeerde strategie, tel-, splits-, handig reken- en rekenfeitenstrategie als afhankelijke variabelen, liet evenmin een verschil in strategiegebruik zien tussen de beide groepen ($F(5,12)=0.25$, n.s.). Uit de univariate analyse kwam een verschil naar voren in het toepassen van telstrategieën door kinderen die beschikten over meer of minder geautomatiseerde rekenfeiten. Kinderen, die de rekenfeiten beter beheersten, maakten significant minder gebruik van telstrategieën dan kinderen, die de rekenfeiten niet beheersten ($F(1,16)=4.75, p<.05$).

De percentages van voorkomen van de verschillende strategieën in de onderzoeksgroep, gebruikt in het tweede deel van het oorspronkelijke onderzoek ($n=29$) waren: verkeerde strategie: 15.6%, telstrategie: 12.1%, splitsstrategie: 26.6%, handig rekenstrategie: 7.5%, rekenfeitenstrategie: 27.5% en overige strategieën: 8.8%. Verder werd nagegaan wat de invloed was van strategievaardigheid op de juistheid van oplossen. In een herhaalde metingen analyse ($2\times2\times2\times2\times2$) waarbij strategievaardigheid en beheersing van de rekenfeiten als tussen subjecten factoren en operatie, afstand en tientaloverschrijding als binnen subjecten factoren waren opgenomen, bleek de gezochte tweede orde interactie tussen strategievaardigheid en tientaloverschrijding niet significant ($F(1,14)=2.37$, ns).

Foutenanalyse

De foutieve antwoorden op de cijfertoets werden gecategoriseerd. De meest gescoorde categorieën met percentage van voorkomen in de totale onderzoeksgroep ($n=58$) waren:
- operatie-fout: (optellen i.p.v. aftrekken of omgekeerd): 19.6%
- inwissel-leenfout (niet of verkeerd inwisselen of lenen): 15.6%
- positie-fout (fout tegen het positiestelsel): 5.3%
- smaller-from-larger (omdraaien van de volgorde van de eenheden bij aftrekopgaven met tientaloverschrijding): 19.6%
- telfout (afwijking met + of − maximaal 1 van de oorspronkelijke uitkomst): 26%
- overige fouten: 13.9%

Uit de multivariate analyse met als onafhankelijke variabele beheersing van de rekenfeiten en als afhankelijke variabelen de eerder genoemde foutencategorieën, kwam een significant verschil in gemaakte fouten naar voren tussen kinderen met en zonder geautomatiseerde kennis van de rekenfeiten ($F(5,23)=3.52, p<.05$). Bij nadere univariate analyse van deze gegevens bleek dat de twee groepen significant van elkaar verschilden in gemaakte telfouten ($F(1,27)=9.54, p<.01$). Kinderen met meer kennis van de rekenfeiten maakten minder telfouten dan kinderen met minder kennis op dat terrein. Wat betreft de overige foutencategorieën was geen significant verschil aanwezig.

4 *Discussie*

Het besproken onderzoek biedt geen bevestiging voor de verwachting dat kinderen met meer rekenfeitenkennis bij het oplossen van cijferopgaven minder vertraagd worden door tientaloverschrijding dan kinderen zonder rekenfeitenkennis. Het veronderstelde faciliterende effect van meer geautomatiseerde rekenfeiten is bij tientaloverschrijding niet gevonden. De mate van automatisering bleek enkel terug te vinden in het sneller kunnen oplossen van opgaven met een grote telafstand.

Ook wat betreft de juistheid van oplossen van cijferopgaven kon geen significant tweede orde interactie-effect tussen de beheersing van rekenfeiten en tientaloverschrijding aangetoond worden. Kinderen, die niet beschikken over geautomatiseerde rekenfeiten, kunnen desondanks cijferopgaven met tientaloverschrijding relatief even goed oplossen als kinderen die wel een aantal rekenfeiten geautomatiseerd hebben. Er kon enkel een voor de hand liggend algemeen vaardigheidseffect vastgesteld worden: kinderen, die de rekenfeiten beter beheersen, maken ook meer opgaven goed.

Het beschikken over geautomatiseerde rekenfeiten is echter wel terug te vinden in het strategiegebruik. Kinderen, die meer kennis hebben van de rekenfeiten, tellen minder dan kinderen, die weinig kennis van de rekenfeiten hebben. Er kon een relatie vastgesteld worden tussen de vaardigheid in het oplossen van rekenfeiten en het strategiegebruik. Zover hier nagegaan kon worden, werkt deze vaardigheid slechts heel globaal via het strategiegebruik door naar de juistheid van oplossen. Kinderen, die de rekenfeiten gedeeltelijk geautomatiseerd hebben, maken met name minder telfouten in cijferopgaven dan kinderen waarbij de rekenfeitenkennis ontbreekt. De afname van het aantal telfouten en de vermindering van het gebruik van telstrategieën loopt wellicht parallel. Dit effect lijkt tot uitdrukking te komen in de juistheid van oplossen bij alle opgaventypen. Hoewel niet duidelijk is of het aantal telfouten ook daadwerkelijk afneemt doordat kinderen minder telstrategieën toepassen.

Er lijkt echter een specifiek tempo-effect te zijn bij opgaven met een grote telafstand. Voor kinderen, die over een aantal geautomatiseerde rekenfeiten beschikken, lijkt de telafstand geen differentiële invloed te hebben: ze lossen de opgaven met een kleine of grote telafstand even snel op doordat ze het antwoord mogelijk direct uit het geheugen kunnen ophalen of in ieder geval niet tellend hoeven te achterhalen. Kinderen, die voor hun oplossingsmethode aangewezen zijn op tellen, hebben wel aanzienlijk meer tijd nodig voor het oplossen van opgaven met een grote dan met een kleine afstand. Dit resultaat zou er op kunnen wijzen dat kennis van de rekenfeiten ook gebruikt wordt bij het oplossen van cijferopgaven. Bij deze bevinding dient echter aangetekend te worden dat de gehanteerde definitie van 'telafstand' wellicht niet adequaat is. Verondersteld werd dat zwakke kinderen het tweede getal uit de opgave geheel tellend bij het eerste getal zouden op- of aftellen. Dit geheel uittellen van de uitkomst komt veelvuldig voor bij horizontaal afgebeelde opgaven (Andrea, 1988). Uit, niet systematische, observaties van het oplossingsgedrag van kinderen in onderhavig onderzoek bleek echter dat zij bij verticale somnotatie voornamelijk kolomsgewijs te werk gingen. Dus ook bij de toepassing van een telprocedure werd per kolom door- of teruggeteld. Hiermee wordt het gehanteerde afstandsconcept enigszins ondergraven. Het enige relevante verschil tussen opgaven met een grote en kleine telafstand lijkt niet de absolute grootte van het getal te zijn, maar het aantal cijfers waaruit het tweede getal bestaat. Bij een kleine afstand hoeft slechts een ééncijferig getal opgeteld of afgetrokken te worden, terwijl bij een grote afstand een keer extra opgeteld of afgetrokken moet worden. Hiermee zou het tweede orde interactie-effect tussen de vaardigheid in het oplossen van rekenfeiten en afstand verstaan kunnen worden als zouden kinderen die geen geautomatiseerde rekenfeiten tot hun beschikking hebben door het één keer meer moeten optellen of aftrekken relatief meer vertraagd worden dan kinderen die over een aantal geautomatiseerde rekenfeiten beschikken. Aangezien het tellend toevoegen of aftrekken van een getal tussen 0 en 10 gemiddeld meer tijd kost dan het geautomatiseerd optellen of aftrekken van zo'n getal, leidt het tweemaal toepassen van deze telprocedures tot een verschil in oplossingstijd dat groter is dan het verschil in oplossingstijd bij tweemaal inzetten van geautomatiseerde rekenfeiten. Of er al dan niet ingewisseld moet worden, schijnt voor beide vaardigheidsgroepen hetzelfde vertragende effect te hebben.

Uit dit onderzoek wordt niet duidelijk welke gevolgen de mate van automatisering van de rekenfeiten, naast de teruggang in telstrategieën, heeft voor de gebruikte oplossingsprocedures. Het onderzoek biedt enerzijds door het ontbreken van duidelijke samenhang tussen beheersing van rekenfeiten en het gebruik van een rekenfeitenstrategie ondersteuning voor de studie van Resnick en Omanson (1986) waarin ook aangetoond werd dat de aanwezigheid van kennis van een andere orde, nl. conceptuele kennis, geen garantie vormde voor de toepassing van deze kennis in de oplossingsstrategie. Anderzijds blijkt er toch invloed te zijn van de kennis van rekenfeiten op het gebruik van telstrategieën en het aantal telfouten dat gemaakt wordt.

Evenals in het onderzoek van Russel en Ginsburg (1984) kon een verband vastgesteld worden tussen slechtere rekenprestaties (met betrekking tot het aantal goed gemaakte opgaven en het aantal telfouten) en een minder geautomatiseerd zijn van de rekenfeiten. Hiermee is echter niet gezegd dat onvoldoende kennis van de rekenfeiten de oorzaak is van rekenproblemen. Slechte rekenprestaties (m.n. inwisselfouten) kunnen ook toegeschreven worden aan gebrekkige strategievaardigheid. Kennis van de rekenfeiten lijkt vooral van belang voor nauwkeurig rekenen i.c. minder telfouten.

Op basis van dit onderzoek kan het specifieke effect van het geautomatiseerd zijn van de rekenfeiten voor tientaloverschrijding niet aangetoond worden. Het effect zou wellicht wel tot uitdrukking gekomen zijn als meer variatie in de onderzoekspopulatie aangebracht was. In de huidige onderzoeksgroep zaten slechts enkele kinderen die de cijferopgaven foutloos beheersten. Hierdoor is de groep misschien te homogeen van samenstelling geweest waardoor specifieke effecten niet aangetoond konden worden.

Een tweede verklaring voor dit tegenvallend resultaat wordt gevormd door het feit dat in dit onderzoek de opgaven in verticale somvorm werden aangeboden. Hierdoor wordt eerder een cijferende dan hoofdrekenende aanpak uitgelokt. Doordat bij cijferend rekenen, in tegenstelling tot hoofdrekenen, de tussenuitkomsten opgeschreven worden, staat het werkgeheugen minder onder druk. Het is mogelijk dat het geautomatiseerd beheersen van de rekenfeiten voor het cijferend rekenen minder belangrijk is dan voor het hoofdrekenen. Het ontbreken van de rekenfeiten staat waarschijnlijk het ontstaan van de kennis nodig bij het leren inwisselen en lenen niet in de weg. Hiermee willen wij niet zeggen dat oefenen van de rekenfeiten uit het rekencurriculum geschrapt kan worden. Rekenfeiten zijn van invloed op de nauwkeurigheid van rekenen. Daarnaast lijkt het zeer aannemelijk dat het vlot kunnen oplossen van de rekenfeiten de efficiëntie bij de verschillende rekenoperaties (ook delen en vermenigvuldigen) vergroot. Uit het onderzoek blijkt dat ook kinderen uit het speciaal onderwijs als ze de rekenfeiten enigszins beheersen, profijt hebben van deze kennis bij het correct oplossen van cijferopgaven. Het dient echter aanbeveling om in het rekencurriculum de rekenfeiten niet geïsoleerd aan te bieden, maar juist in combinatie met het toepassen van de rekenfeiten in de oplossingsstrategie.

Literatuur

Anderson, J. R., Acquisition of cognitive skill. *Psychological Review*, 1982, *89*, 369-406.

Andrea, M. C. *De bijdrage van de vaardigheid in het splitsen van getallen tot en met 10 aan de prestaties van het cijferend rekenen onder de 100*. Nijmegen: doctoraalscriptie orthopedagogiek, 1988.

Ashcraft, M. H., The development of mental arithmetic: a chronometric approach. *Developmental Review*, 1982, *2*, 213-236.

Ashcraft, M. H. & J. Battaglia, Cognitive arithmetic: evidence for retrieval and decision processes in mental addition. *Journal of Experimental Psychology*, 1978, *4*, 527-538.

Baltussen, M. W. J. & E. C. D. M. van Lieshout, De plaats van het splitsen in het cijferend optellen en aftrekken tot 100. *Tijdschrift voor Onderwijswetenschappen*, 1989, *20*, 52-63.

Cauly, K. M., Construction of logical knowledge: study of borrowing in subtraction. *Journal of Educational Psychology*, 1988, *80*, 202-205.

Eysenck, M. W. *A handbook of cognitive psychology*, London: Erlbaum, 1984.

Fuson, K. C., An analysis of the couting-on solution procedure in addition. In: T. P. Carpenter; J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction; a cognitive perspective*, Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1982.

Greeno, J. G., Understanding and procedural knowledge in mathematics instruction. *Educational Psychologist*, 1978, *12*, 262-283.

Groen, G. J. & J. M. Parkman, A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review*, 1972, *79*, 329-343.

Hamann, M. S. & M. H. Ashcraft, Simple and complex mental addition across development. *Journal of Experimental Child Psychology*, 1985, *40*, 49-72.

Laberge, D. & S. J. Samuels, Towards a theory of automatic information processing in reading. *Cognitive Psychology*, 1974, *6*, 293-323.

Lucas, P. J. & L. C. van der Gaag, *Principes van expertsystemen*. Schoonhoven: Academic Service, 1988.

Payne, S. J., Methods and mental models in theories of cognitive skills. In: J. Self (Ed.), *Artificial intelligence and human learning*. London: Chapman and Hall, 1988.

Perfetti, C. A. & A. M. Lesgold, Coding and comprehension in skilled reading and implications for reading instruction. In: L. B. Resnick & P. A. Weaver (Eds). *Theory and practice of early reading*, Vol 1. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1979.

Resnick, L. B. & W. W. Ford, *The psychology of mathematics for instruction*. London: Erlbaum, 1984.

Resnick, L. B. & S. F. Omanson, Learning to understand arithmetic. In: R. Glaser (Ed.), *Instructional Psychology*, Vol. 3. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1987.

Russel, R. L. & H. P. Ginsburg, Cognitive analysis of children's mathematics difficulties. *Cognition and Instruction*, 1984, *1*, 217-244.

Steinberg, R. M., Instruction on derived facts strategies in addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1985, *16*, 337-355.

Usnick, V. & J. M. Engelhardt, Basic fact, numeration concepts and the learning of the standard multidigit addition algorithm. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 1988, *10*, 1-14.

Wolters, M., Die twee streepjes boven elkaar, is dat een ''is''?. *Willem Bartjens*, 1984/1985, *4*, 216-221.

Curricula vitae

M. W. J. Baltussen (1962) studeerde orthopedagogiek te Nijmegen. Tijdens haar studie was ze korte tijd werkzaam aan een onderwijsbegeleidingsdienst. Sinds haar afstuderen in 1986 werkt ze aan het Instituut voor Orthopedagogiek te Nijmegen, al waar ze onderzoek doet op het gebied van de theorie en behandeling van rekenproblemen.

E. C. D. M. van Lieshout: zie *Pedagogische Studiën*, 1989, *66*, p. 255.

Adres: Instituut voor Orthopedagogiek, Katholieke Universiteit Nijmegen, Postbus 9103, 6500 HD Nijmegen.

Manuscript aanvaard 29-3-'90

Summary

Baltussen, M. W. J. & E. C. D. M. van Lieshout. 'Number facts in paper-and-pencil addition and subtraction.' *Pedagogische Studiën*, 1990, *67*, 306-316.

Knowing number facts by heart is assumed to be important for paper-and-pencil addition and subtraction. Thirty-nine children with learning disabilities and 19 mildly retarded children were examined. They were administered a number facts test, an addition and subtraction test and a thinking aloud test. ANOVA showed that children who were more proficient in solving number facts compared to children less gifted in that area, solved sums faster. Contrary to what was expected the difference was not larger for sums with than for sums without borrowing and carrying. The difference was larger for sums with double digit addends or minuends than for sums with single digit addends or minuends. A relation could also be established between the proficiency in solving number facts and the correctness of solving the sums. The more proficient children less frequently computed the answers by counting and made fewer counting errors than children who did not know any number facts by heart.

Bijlage 1

De cijfertoets

De opgaven staan horizontaal afgebeeld. De kinderen kregen ze echter in verticale vorm voorgelegd. Ook de volgorde was anders.

optellen zonder tiental-overschrijding	optellen met tiental-overschrijding	aftrekken zonder tiental-overschrijding	aftrekken met tiental-overschrijding
42 + 33 =	48 + 35 =	75 − 32 =	72 − 35 =
32 + 54 =	38 + 56 =	96 − 52 =	94 − 56 =
61 + 5 =	69 + 6 =	76 − 1 =	71 − 6 =
24 + 63 =	26 + 67 =	78 − 45 =	93 − 67 =
32 + 5 =	48 + 7 =	47 − 2 =	42 − 7 =
25 + 43 =	25 + 48 =	48 − 2 =	75 − 48 =
37 + 2 =	34 + 8 =	68 − 31 =	42 − 8 =
21 + 37 =	29 + 38 =	97 − 63 =	61 − 38 =

Bijlage 2

De strategie-toets

De opgaven staan hier horizontaal afgebeeld. De kinderen kregen ze echter in verticale vorm voorgelegd.

48 + 35 =	29 + 38 =
71 − 6 =	34 + 8 =
93 − 67 =	72 − 35 =
26 + 67 =	69 + 6 =
42 − 8 =	61 − 38 =