

Abstractieniveaus in de ontwikkeling van het natuurkundig begrip 'druk'^o

H. VOS^{oo}

Faculteit der Elektrotechniek van de
Universiteit Twente

Samenvatting

Wetenschappelijke begrippen zoals druk, zijn abstracties uit de werkelijkheid. De psychologische ontwikkeling van het abstraheren wordt beschreven door het hiërarchische niveaumodel van Van Parreren. Wij passen dit model toe op de abstraherende handelingen vergelijken, meten en berekenen zoals die bij een begrip als druk voorkomen. Het blijkt dat we hierbij dezelfde niveaus kunnen onderscheiden. Deze abstractieniveaus beschrijven een psychologische ontwikkeling van het begrip, die niet noodzakelijk chronologisch is. Hetzelfde woord druk duidt een begrip aan dat zich op zes verschillende niveaus van ontwikkeling kan bevinden. Symbolen en formules spelen op elk van de niveaus een andere rol. Het hoogste niveau is van belang om de essentiële kenmerken van het begrip te kunnen bepalen en inzicht te krijgen in de voorwaarden die ons handelen beperken op lagere niveaus. Tevens blijkt dat vaststelling van de bereikte onderwijsresultaten niet losgemaakt kan worden van de voorafgaande ervaring (in onderwijs of daar buiten).

1 Inleiding

Het begrip druk komt in allerlei betekenissen en toepassingen voor. We kennen waterdruk, bloeddruk, luchtdruk, de drukpers en politieke druk. Het gaat ons in dit artikel om het begrip druk in de fysische betekenis van het woord.

^o Dit artikel is het vierde in de serie over 'onderwijs en het leren van begrippen', zoals aangekondigd in *Pedagogische Studiën*, november 1984, p. 429-430.

^{oo} Met dank aan C. F. van Parreren en I. de Bruijn voor het kritisch doorlezen van het manuscript en leveren van commentaar.

Dit begrip heeft zich bij een bepaald persoon in hoofdzaak ontwikkeld door de dagelijkse ervaring met druk, en door het onderwijs op school of universiteit. Hierdoor is er een zekere hoeveelheid kennis betreffende druk in het geheugen terechtgekomen. Bovendien is er abstractie opgetreden. Het type begrip dat ons interesseert en waar 'druk' een voorbeeld van is, is het wetenschappelijke begrip, dat ontstaan is door abstractie uit de werkelijkheid. Dit begrip is het resultaat van abstraheren.

Abstraheren als menselijke activiteit wordt in de psychologie bestudeerd. Het onderzoek hiernaar vindt veelal plaats aan de hand van classificatietaken. De psychologische handeling is dan: het bepalen van gelijkheid, volgens een gemeenschappelijk kenmerk dat uit de gegeven (vaak, maar niet noodzakelijk materiële) objecten geabstraheerd moet worden. Wij baseren ons op het niveaumodel dat door Van Parreren (1979) is opgesteld. Hij heeft meer dan honderd experimenten onderzocht, die de volgende taken omvatten: het ordenen van materiaal, het uitkiezen van materiaal volgens een voorbeeld, het uitbreiden van een gegeven groep met andere objecten en het benoemen van de groepeeringscriteria voor gegeven groepen. Al deze experimenten waren constaterend van aard, dat wil zeggen ze stellen vast wat de proefpersoon kan en in sommige gevallen ook hoe hij het doet. Van Parreren onderscheidt zes niveaus in de ontwikkeling van het abstraheren, hiërarchisch geordend en genummerd vanaf niveau nul. Deze ontwikkeling dient onderscheiden te worden van de eerdergenoemde ontwikkeling, omdat het om constaterende experimenten bij verschillende personen gaat.

Van Parreren baseert zijn model zoals aangegeven op een beperkt aantal taken. Hij generaliseert naar de algemene, abstraherende handelingsstructuur: het bepalen van gelijkheid. Bij een begrip als druk gaat het om een heel scala van andere taken, namelijk het vergelijken van drukken en het bepalen van drukken door meting en door berekening.

Deze taken zijn specificaties van de handlingsstructuur: het bepalen van gelijkheid. De vraag waar het om gaat is dan: behoudt het model zijn waarde voor de taken vergelijken, meten en berekenen zoals die bij druk voorkomen?

We zullen zien dat het inderdaad mogelijk is niveaus in de ontwikkeling van het begrip druk te onderscheiden die overeenkomen met de niveaus in de geconstateerde ontwikkeling van het classificerende abstraheren. Deze niveaus mogen we daarom abstractieniveaus noemen. De ontwikkeling van het begrip is hier niet een cultuur-historische of een individueel-chronologische ontwikkeling, maar een geïdealiseerde psychologische ontwikkeling, een rationele ontplooiing. De graad van ontwikkeling wordt aangegeven door het abstractieniveau. Hoe hoger het abstractieniveau, hoe machtiger het begrip, hoe meer mogelijkheden voor toepassing gehanteerd (dus ook omzeild) kunnen worden. Ook worden de essentiële kenmerken van het begrip steeds duidelijker.

Definiëring van deze niveaus is van groot belang voor het onderwijs: hiermee zijn onderwijsdoelen beter te omschrijven, en hiermee is beter in kaart te brengen hoever de leerling is. Beginvaardigheden, tussenresultaten en eindresultaten van het onderwijs zijn beter te bepalen. Ook zijn de schijnresultaten die je vaak tegenkomt beter te onderscheiden.

Zoals Van Parreren heeft opgemerkt is zijn model geen onderwijsmodel omdat het in hoofdzaak berust op constaterende experimenten. Ons model is een bepaalde interpretatie ervan die consequent toegepast kan worden op een begrip als druk, of liever, de cluster van begrippen waar druk het centrum van is. Het is daarmee nog steeds geen onderwijsmodel geworden. Wel wordt geaccentueerd dat het model microgenetisch van aard is, d.w.z. betrekking heeft op één handlingsstructuur, die zelf weliswaar heel algemeen is maar waarvoor hier in een specifiek geval (druk) de te constateren ontwikkeling wordt beschreven. Hierdoor komt het model dichter bij het onderwijs te staan.

Door dit model worden we ons bewust van het bestaan van welomschreven abstractieniveaus in een begrip, en kunnen we daaraan onderzoek verrichten. Het model is nog niet eerder toegepast, daarom weten we nog niet op welke wijze de verschillende niveaus be-

reikt worden en hoe overgangen van het ene naar het andere niveau plaats vinden. Wel draagt het model bij tot het verhelderen van het inzicht dat docent (en leerboek) met een en dezelfde term een begrip op verschillende niveaus van ontwikkeling aanduiden. Leermoeilijkheden die hierdoor optreden kunnen dan beter geduid worden en er is meer kans om maatregelen te vinden die deze problemen helpen oplossen.

We beperken ons dus tot het karakteriseren van de verschillende abstractieniveaus zonder aan te geven hoe deze bereikt kunnen worden. Bij de laagste niveaus gebruiken we de term leerling, bij de hogere niveaus de term student. Het is echter mogelijk dat ook de hoogste niveaus bereikbaar zijn voor leerlingen in het basis- of voortgezet onderwijs indien het onderwijs daarop wordt ingericht. Er zijn zelfs voorbeelden van onderwijs waarbij al in de lagere klassen van de basisschool het hoogste niveau wordt bereikt (vergelijk Vos, i.v.).

De ontwikkeling van het begrip druk beschrijven we aan de hand van een aantal voorbeelden van (denk)handelingen die voorkomen bij het uitvoeren van taken waarin druk een rol speelt. Hierbij moeten we onderscheid maken tussen handelingen die tijdens het leerproces uitgevoerd worden en die onder gunstige omstandigheden herinnerd en herhaald kunnen worden volgens bekend patronen (al dan niet met andere waarden), en handelingen die bestand zijn tegen storende factoren of die werkelijke generalisaties van het geleerde zijn.

In paragraaf 2 passen we het model toe op het type taak dat ons interesseert, en wel: 'Het uitvoeren van taken waarbij het begrip druk een rol speelt'. Dit leidt tot het onderscheiden van zes niveaus in de ontwikkeling van de abstraherende handlingsstructuur: het bepalen van gelijkheid, zoals die tot uiting komt in de taken: vergelijken, meten en berekenen, toegepast op de abstractie 'druk'. We geven hierbij ook aandacht aan de rol die formules spelen in het handelen. Bij elk niveau geven we aan het begin eerst een samenvatting van de abstraherende prestaties op dat niveau volgens Van Parreren. De nummering van de niveaus is van Van Parreren.

In paragraaf 3 bespreken we vervolgens enkele consequenties van ons model die van belang zijn voor het onderwijs.

2 *Abstractieniveaus in de ontwikkeling van het drukbegrip*

Het perceptieve niveau

Dit is het laagste niveau. De proefpersoon kan het materiaal ordenen naar een zeker criterium, spontaan of volgens een voorbeeld. Het gedrag wordt hierbij in hoge mate door veldfactoren ondersteund. Er vindt oriëntering aan in de waarneming opvallende gelijkenissen en verschillen plaats, niet alleen als aanzet tot maar ook als voortdurende steun bij de handeling. De proefpersoon is in staat een bepaald aspect in de waarneming te accentueren. Er treedt vaak afdwaling op door pregnante doch irrelevante veldfactoren.

Op het laagste niveau, *niveau 0*, kan de leerling in een aantal materiële gevallen situaties op grond van zijn waarneming (voelen en kijken) ordenen naar hoge en lage drukken:

Hoe harder je tegen een voorwerp drukt, hoe beter je dat voelt en hoe dieper de indrukken in je huid. Als je op ski's staat druk je de sneeuw minder diep in dan gewoon met je schoenen. Op dun ijs kun je niet staan, maar misschien wel liggen. Een ladder op het ijs helpen ook. Bij het opblazen van een ballon moet je in het begin harder persen dan later. Als je de opening van de kraan met je hand dichtdrukt en je draait met je andere hand de kraan langzaam(!) open, dan voel je de waterdruk toenemen. Als je een douche neemt en ergens dichtbij wordt een kraan open gedraaid, dan komt er minder water uit de douche en het water spuit minder ver. Een scherp mes druk je gemakkelijker door de kaas dan een bot mes, maar ook weer niet zo gemakkelijk als je zou denken.

De leerling herkent grote druk in een aantal analoge gevallen aan de waarneembare verschijnselen die als effect daarvan optreden. Grote druk geeft een diepe indrukking of laat diepe indrukken achter, doet ijs breken, laat een gascylinder ontploffen, laat een waterstraal door staal snijden. De leerling kan druk aflezen van de barometer en weet dat 1040 mbar een hoge luchtdruk is. Hij kent misschien ook drukmeters waarop je af kan lezen dat de druk in de leiding van de centrale verwarming of in je autoband 0,8 bar is, en hij weet dat dat laag is. De eenheid bar moet wel duidelijk op de meter staan anders zegt hij dat de druk 0,8 is. Het symbool p voor de grootte

van de druk is voor hem alleen nog maar een signaal om de afgelezen getalwaarde 0,8 op te schrijven.

De leerling kan op niveau 0 hoge en lage waarden van druk onderscheiden op grond van kenmerken die hij kan accentueren in zijn waarneming.

Het niveau van de selectieve accentuering

De proefpersoon kan de accentuering in de waarneming naar willekeur veranderen, hij kan het materiaal anders 'zien'. Sturing door veldfactoren vermindert en gaat nu over in meer intentionele sturing vooral ten aanzien van de accentuering van het waargenomen materiaal. De proefpersoon is in staat opzettelijk een andere accentuering te kiezen.

Op dit niveau is shift-gedrag mogelijk: wanneer de proefpersoon het materiaal volgens het ene criterium heeft gesorteerd, kan hij dezelfde voorwerpen daarna opnieuw sorteren naar een ander criterium.

Het vermogen tot shift-gedrag hangt samen met het aanwezig zijn van woorden voor de betrokken dimensies. De proefpersoon is nu in staat deze dimensies aan de objecten te onderscheiden.

Op *niveau 1* kan de leerling verschillende situaties niet alleen ordenen naar de grootte van de druk, maar ook naar de grootte van andere kenmerken die in het spel zijn en die op niveau 0 of hoger beheerst worden, zoals robuustheid, kleur, prijs, lengte van de objecten, krachten en contactoppervlakken. Ook echter naar de materiaalsoorten die in het spel zijn (lucht, water, vaste stof). De ordening vindt plaats aan de hand van waarneembare criteria en heeft betrekking op waarneembare objecten of aanschouwelijke, levende voorstellingen daarvan. Het handelen vindt plaats op grond van waarneming en geheugen, er is nog geen sprake van een denkregel.

Het belangrijkste kenmerk van niveau 1 is shift-gedrag. Dit wil zeggen dat de leerling een ordening van een aantal situaties volgens het ene criterium om kan zetten in een ordening van dezelfde situaties volgens een ander criterium.

Stel we hebben de volgende situaties: een volwassene op ski's en een klein kind op klompen, beiden in de sneeuw lopend. De leerling is nu in staat deze twee situaties eerst correct te ordenen naar de grootte van de krachten die in

het spel zijn, vervolgens correct te ordenen naar de grootte van de druk, en daarna naar de grootte van het contactvlak. Doordat hij dit soort ordeningen uit kan voeren, zou de leerling kunnen abstraheren dat steeds wanneer het over druk gaat, er ook een gedrukt oppervlak in het spel is en een drukkende kracht, maar bovendien dat bij dezelfde drukkraft de druk groter is bij een kleiner oppervlak, dat bij hetzelfde oppervlak de druk toeneemt met de kracht, en dat bij dezelfde druk de kracht groter is bij een groter oppervlak, en ten slotte dat andere kenmerken zoals de hoogte van de persoon niet relevant zijn. We komen dan op het begin van niveau 2 want dit zijn al regels. Het hangt van de taken af die de leerling opgedragen krijgt, of hij zijn begrip van het begrip druk ook werkelijk op deze wijze en zover ontwikkelt.

De leerling kan op niveau 1 de dimensie (in de zin van 'attribute') kracht onderscheiden van de dimensie druk, in sommige materiële situaties, namelijk waar hij gesteund wordt door de waarneming. Deze materiële situaties omvatten ook de zogenaamde gematerialiseerde situaties, dat wil zeggen schriftelijke beschrijvingen, tekeningen en schema's, mits deze gesteund worden door aanschouwelijke, levende voorstellingen van de materiële objecten. De leerling kan op deze manier in schriftelijke opgaven druk herkennen.

Hij weet dan dat als er geen sprake is van een contactvlak, het begrip druk niet van toepassing is in de opgave. Hij verliest geen tijd aan het piekeren over druk als dat niet relevant is. Hij krijgt de voorwaarden voor toepassing van het begrip in het oog.

De leerling herkent verschillende soorten druk. Echter, als de leersituaties alleen betrekking hebben gehad op één soort druk, bijvoorbeeld luchtdruk, dan mag niet verwacht worden dat de leerling op dit niveau druk in andere gevallen, zoals bij vaste lichamen die tegen elkaar drukken, herkent. Voor een breder leerstofgebied is uiteraard een groter scala van leersituaties vereist, of, een andere mogelijkheid, er dient een generalisatie plaats gevonden te hebben naar andere soorten druk, maar dat ligt op niveau 3.

Het is mogelijk in de leerstof een symbool voor de dimensie druk op te nemen, bijvoorbeeld een streepje met een pijl erdoor, of een p. Dit symbool wordt hier als een signaal opgevat om na te gaan of de dimensie druk te

herkennen valt, of via effecten van druk (de waarneembare kenmerken) of via contactvlak en drukkraft (de voorwaarden).

Het regelniveau

Het handelen vindt plaats op grond van een intern vastgehouden, expliciete regel zonder steun vanuit het waarnemingsveld, dus onafhankelijk van pregnante veldfactoren, en uitputtend. Er is een verbale karakterisering van de handelingscriteria mogelijk. Het materiaal is op dit niveau concreet, dus zichtbaar, gegeven of bekend.

Op niveau 2 kan de leerling drukken bepalen (door meting of berekening) via een intern vastgehouden, expliciete regel, zonder steun van de waarneming wat betreft de kenmerken van de grootte van de druk. De druk in de ene situatie wordt intern vergeleken met de druk in de andere situatie. De druk in een bepaalde situatie wordt als referentie gekozen en vastgehouden. De eenheid van druk is een waarde die in gedachten vastgehouden wordt. De grootte van de druk is nu niet meer 0,8 maar 0,8 bar omdat hij intern gerelateerd wordt aan de referentiesituatie. Ook wordt 1,0 bar nu gelijk aan 1000 mbar: de leerling kan de luchtdruk van 1040 mbar en de druk in de autoband van 0,8 bar vergelijken. De letter p is nu werkelijk een symbool voor de grootte druk, zodat de leerling noteert: $p = 0,8$ bar. Hij wordt niet meer in verwarring gebracht als hij het symbool p tegenkomt in een opgave waarin het over de grootte impuls gaat die meestal ook met het symbool p wordt aangeduid.

Als de begrippen kracht (F) en oppervlak (A) even ver ontwikkeld zijn, kan de relatie tussen de dimensie druk, kracht en oppervlak, die op niveau 1 waargenomen kon worden, nu samengevat worden in de formule $p = F/A$. In deze formule is de relatie tussen de getalwaarden geabstraheerd uit de werkelijkheid, maar niet (zoals bij Davydov, 1972) losgemaakt van de betrokken dimensies: hiër horen ook de eenheden in de relatie te blijven staan.

De leerling kan nu de grootte van de druk bepalen of uit de grootte van de druk andere gegevens afleiden. Stel dat de leeractiviteiten betrekking hadden op vaste lichamen, waarbij de kracht de gewichtskraft was, terwijl de contactvlakken horizontaal waren en de druk op het totale ondersteunende vlak bepaald

werd (vergelijk Obuchova, 1973). De leerling is nu in staat de druk te berekenen die optreedt als het gewicht van een tafel met een draai-bank erop verdeeld wordt over het oppervlak van de vier tafelpoten. Hij kan het maximale gewicht uitrekenen van een jongen die wil lopen op ijs dat een gegeven druk kan verdragen. Hij kan relevante van irrelevante gegevens onderscheiden en wordt er niet door in verwarring gebracht. Bij onvolledige opgaven ontdekt hij wat er ontbreekt. Hij kan niet al te complexe opgaven in het hoofd oplossen zonder gebruik van schetsen of tekeningen, waarbij ter ondersteuning van het geheugen de tussenresultaten betreffende de waarden van grootheden worden genoteerd. Hij heeft een oplossings-schema in het hoofd dat hij zonedig kan expliciteren met voorwaarden voor toepassing en al.

Dit is dus meer dan het gedachtenloos, formeel of algoritmisch manipuleren met de formule $p = F/A$ waarin getallen en eenheden worden ingevuld op dezelfde wijze die vroeger geoefend is en die is opgeslagen in het geheugen. De handeling vindt niet plaats volgens een algoritme dat een oplossing garandeert, maar volgens een heuristiek, die in een beperkt aantal materiële gevallen tot een oplossing leidt, namelijk in die gevallen waarin aan de voorwaarden voor het toepassen van het begrip druk is voldaan, en die inzichtelijk gehanteerd wordt, dat wil zeggen teruggevoerd kan worden tot de kenmerken van druk op het perceptieve niveau. De leerling is in staat mondeling of schriftelijk weer te geven wát hij gedaan heeft en waarom. Hij kan dus bijvoorbeeld uitleggen waarom je kracht en oppervlak moet delen en niet vermenigvuldigen om de druk te krijgen (vergelijk Treffers, 1984).

Een ander spoor van leeractiviteiten leidt tot de volledige meethandeling van de druk. De leerling is dan in staat om de druk te bepalen door een drukmeter op de juiste wijze aan te sluiten en af te lezen, eventueel met correctie voor de invloed van de meter, als hem dat geleerd is.

Het niveau van de regelgeneralisatie

De denkhandeling (de identificatieregels) kan nu toegepast worden op elk concreet materiaal, waarbij de handeling kan worden aangepast aan de concrete omstandigheden. De handeling zelf kan gevarieerd worden. Er is een algemene hoofdregel ontstaan waaruit

voor concrete gevallen de specifieke uitvoeringsregels kunnen worden afgeleid, of: waarin de specifieke uitvoeringsregels kunnen worden herkend (Davydov, 1962). Deze hoofdregel leidt tot de uitvoeringsregels, en constitueert zo de ordeningscategorieën.

Op niveau 3 is de handeling generaliseerbaar naar (alle) andere materiële objecten. Niet alleen de objecten waarop de handeling betrekking heeft kunnen veranderd worden, maar ook de regel zelf. In gevallen waarin aan de voorwaarden voor toepassing van de regel op niveau 2 niet voldaan is, kan de regel worden aangepast aan nieuwe voorwaarden. Het kan zijn dat deze voorwaarden zelfs niet ter sprake zijn geweest op niveau 2: zij worden nu pas zichtbaar. Hier volgen enige voorbeelden.

Als de machine niet midden op de werkbank staat is de druk onder de poten aan de kant van de machine groter dan aan de andere kant. Iemand kan zijn gewicht naar één been overbrengen waardoor de druk onder zijn voeten verschillend wordt. Andere krachten kunnen een rol spelen zoals magnetische of menselijke krachten. Het vlak kan hellen en de kracht kan scheef op het oppervlak komen te staan, ja zelfs langs het oppervlak komen te liggen. Wrijvingskrachten gaan dan een rol spelen, waardoor het mes niet zo gemakkelijk door de kaas snijdt als je zou denken. De handeling kan gegeneraliseerd worden naar andere soorten druk die nog niet eerder aan bod kwamen: luchtdruk, hydrostatische druk of stralingsdruk, alle op scheidingsvlakken uitgeoefend. Ten slotte noemen we nog de druk in versnelde systemen zoals in een lift, in een centrifuge of in een ruimtestation.

Op dit niveau kan de handeling zelf gewijzigd worden. Het zou echter kunnen zijn dat deze wijziging reeds eerder werd uitgevoerd of gezien, en goed onthouden. Om te kunnen vaststellen of dit niveau bereikt is, is dus een gedetailleerde kennis van de voorafgaande ervaring vereist.

In al deze gevallen is generalisatie opgetreden van de handeling op niveau 2. De handeling is niet alleen inzichtelijk maar ook flexibel, er is een hogere handelingsstructuur tot stand gekomen waar de oplossingsprocessen in de opgaven voorbeelden van zijn. Er is een algemene hoofdregel ontstaan waarin de specifieke uitvoeringsregels kunnen worden herkend: deze hoofdregel constitueert de uit-

voeringsregels. Wel gaat het steeds om materiële objecten en concrete situaties. Als deze niet zichtbaar zijn kunnen ze altijd voorgesteld worden door foto, film, video, model of een beschrijving zoals in opgaven plaats vindt, al dan niet met tekening. De bedoeling is dat de student het materiële object kent en herkent, dat hij er een levende voorstelling van heeft. Is dit niet het geval dan moet de student handelen aan voor hem denkbeeldige objecten. Dit vergt verdergaande abstractie en ligt dus op het volgende niveau.

Het abstract-symbolische niveau

De constituerende hoofdregel is nu toepasbaar op alle, ook niet gegeven, of zelfs denkbeeldige objecten. De inhoud van de klasse (de ordeningscategorie zelf) wordt geconstitueerd door de regel. Symbolen worden gebruikt om mentale handelingen aan niet-gegeven, eventueel zelfs niet-bestaande objecten grijpbaar te maken. Deze objecten zijn gedachte, maar in principe als concrete realiteit bestaanbare voorwerpen. Een teken, een woord of een letter duidt een object aan dat potentieel tot een bepaalde klasse behoort. De logische quantor 'alle' is als symbool vereist om de totale omvang van een klasse aan te kunnen duiden. De omvang van de klasse: 'Alle denkbare objecten van een bepaalde ordeningscategorie' is het gedachte resultaat van de identificatiehandeling.

Op *niveau 4* is de constituerende hoofdregel toepasbaar op denkbeeldige objecten. Het oppervlak is bijvoorbeeld denkbeeldig. De student kan nu opgaven oplossen die de inwendige druk in een gas betreffen, waarbij eerst een vlak in het gas gedacht moet worden. De druk midden in een gas, een vloeistof of een vaste stof krijgt betekenis. Op *niveau 2* kon dit niet omdat een voorwaarde van druk (het aanwezig zijn van een contact- of scheidingsvlak) niet vervuld was.

Er doet zich nu een opmerkelijke splitsing voor. Laat de druk in een gas gedefinieerd zijn als de relatie tussen een denkbeeldig vlak in het gas en de kracht die daar doorheen wordt uitgeoefend. Dit kan op twee manieren opgevat worden. Ten eerste kan dit betekenen dat *als* wij een materiële vlak aanbrengen in dat gas op dezelfde plek als dat denkbeeldige vlak, dat dan de druk op dat materiaal gelijk is aan de berekende druk. Dit kan men de praktische

manier van denken noemen. Op elk moment is het in deze denkwijze mogelijk over te stappen naar een materiële niveau. Voortdurend is men inzichtelijk bezig en kan men op lagere niveaus verantwoording afleggen van het handelen.

Anderzijds kan men het vlak denkbeeldig laten. De druk kan dan echter niet meer opgevat worden als een kracht die verdeeld wordt over een zeker oppervlak. De druk wordt nu een theoretische grootte (impulsstroomdichtheid) die uiteraard dezelfde dimensie heeft als de druk. Hij speelt bijvoorbeeld een rol bij de berekening van de diffusiesnelheid van gassen. Wij zouden deze denkwijze de theoretische willen noemen. Hij leidt tot verdere generalisatie dan de praktische, is formeler, en staat los van de werkelijkheid. Deze denkwijze moet achteraf bewijzen dat het nog steeds over de realiteit gaat.

Het object van het begrip druk is op *niveau 4* een gedacht (denkwijze twee) maar in principe als concrete realiteit bestaanbaar (denkwijze een) oppervlak.

Met inzichtelijk bedoelen we op dit niveau dat de student tijdens of na zijn formele berekeningen door over te stappen naar materiële niveaus moet kunnen aangeven waarom hij op een bepaalde manier handelt. Irrelevante gegevens moet hij negeren, onvolledigheden opsporen, kenmerken en voorwaarden op correcte wijze hanteren.

Op dit niveau is het ook mogelijk na te denken over oneindig grote en oneindig kleine druk hoewel geen van beide in werkelijkheid bestaan. Ze kunnen opgevat worden als een limiet van steeds grotere respectievelijk steeds kleinere druk. Een druk ter waarde nul zou op *niveau 0* zelfs niet onder het begrip druk gerangschikt kunnen worden omdat het kenmerk van druk niet aanwezig is! Ook de lokale druk $p(x)$ die van punt tot punt kan variëren, en die een drukverdeling voorstelt, ligt op dit niveau.

Het symbool p is nu niet meer een symbool dat een gegeven of een onbekende waarde van de druk aanduidt, maar een continue variabele die als functiesymbool gebruikt wordt. Deze functie voegt aan elke x een waarde $p(x)$ toe. De waardenverzameling 'alle meetbare drukkens' en de omvang van de klasse 'alle punten waarin de druk groter is dan 1,5 bar' zijn nu het gedachte resultaat van specifieke handelingen, die een karakter van kwantitatieve onbepaaldheid in zich dragen.

Het niveau van de relatering

Hier worden abstracties opgebouwd op abstracties en vindt relatering van klassen aan klassen plaats. Een symbool of een reeks symbolen kan nu staan voor de totale omvang van een klasse, dat wil zeggen voor het resultaat van lagere identificatiehandelingen.

Inclusierelatie (in het algemeen zijn er meer vrouwen dan moeders), symmetrierelatie (als $a = b$ geldt dan is ook $b = a$ waar) en transitiviteitsrelatie (als $a > b$ en $b > c$ beide waar zijn, dan is ook $a > c$ waar) liggen op dit niveau. De objecten zijn hier alleen door symbolen weer te geven, door het denken geconstrueerde objecten.

Op niveau 5, het hoogste niveau, is een volledig begrip van het begrip 'druk' als handeling bereikt. De student kan nu opgaven oplossen die eigenschappen van het begrip druk van niveau 4 betreffen. Een voorbeeld hiervan is: de luchtdrukverdeling $p(h)$ als functie van de hoogte boven het aardoppervlak. De variatie van deze functie over de aardbol heen, kan nu bestudeerd worden. De student kan nu inzichtelijk gebruik maken van de eigenschap dat de druk in een gas in alle richtingen even groot is, of hij kan dat bewijzen uit andere natuurkundige abstracties zoals moleculaire eigenschappen en symmetrie.

Op dit niveau is het mogelijk niet alleen de grootte van de druk, dat is de waarde, en het object van druk, dat is het oppervlak met de kracht er doorheen, te symboliseren maar ook het begrip, de handeling, zelf. Het symbool p kan nu als object in een formule staan en een complete oneindig grote verzameling van waarden aanduiden. Dat is een door het denken geconstrueerd object dat niet, ook niet in principe, als realiteit kan bestaan.

Sommige beperkende voorwaarden zijn pas op dit niveau te voorzien. Wanneer we water in een cylinder onder een zuiger samenpersen, werkt de drukkracht loodrecht op het oppervlak en we krijgen een zekere positieve druk. Trekken we daarentegen aan de zuiger, dan werkt de drukkracht niet door het oppervlak heen maar de andere kant op waardoor een negatieve druk optreedt. Hoe harder we trekken hoe negatiever de druk. De negatieve druk kan niet lager worden dan min 1,0 bar, volgens de gangbare redenering. Immers, op dit punt wordt de luchtdruk van plus 1,0 bar die van buitenaf werkt, precies opgeheven. Er ont-

staat dan 'vacuum'. In werkelijkheid zijn drukken van min 277 bar bereikt. (Nog sterker: in hoge bomen om ons heen worden ook drukken ontwikkeld die lager zijn dan min 1,0 bar, en wel door de bladeren om voedingssappen op te zuigen). De voorwaarde die we niet gezien hebben, is dat vóór er 'vacuum' ontstaat, het water gaat koken! Als voorkomen wordt dat het water gaat koken, kan er ook niet zo snel 'vacuum' ontstaan (zie Vos, 1983, en Vos en Licht, 1985). Dit gebeurt dan pas als de watermoleculen echt van elkaar worden 'losgescheurd', naar verwachting bij ongeveer min 1500 bar. Als u dit niet helemaal begrijpt bevindt u zich in goed gezelschap: ik ken een hoogleraar in de fysica die ook niet geloofde dat drukken lager dan min 1,0 bar in water kunnen voorkomen. Dit om aan te geven hoe sterk de beperkende voorwaarden kunnen werken voordat we ze doorzien.

Het voorgaande houdt in dat we pas op niveau 5 in staat zijn na te gaan welke kenmerken van het begrip essentieel zijn en welke niet, maar dat dit zelfs hier niet moeiteloos gaat.

3 *Consequenties*

Het niveau-model van Van Parreren behoudt duidelijk zijn waarde en leidt tot het onderscheiden van abstractieniveaus in de (psychologische) ontwikkeling van een wetenschappelijk begrip zoals druk. Ook voor andere wetenschappelijke begrippen zijn soortgelijke abstractieniveaus te onderscheiden (vergelijk Vos, 1987). Een dergelijk wetenschappelijk begrip interpreteren we daarom als het in staat zijn tot de mentale handeling die de verbinding legt tussen zekere objecten en de waarde (value) die zij bezitten voor een zekere eigenschap (attribute). Hoe verder het begrip ontwikkeld is, dus hoe hoger het abstractieniveau, hoe uitgebreider de klasse van objecten waarvoor het begrip is toe te passen, en hoe uitgebreider de verzameling van waarden is.

Als we alle abstraheren opvatten als denkhandeling, dan treedt er op alle zes niveaus een denkhandeling op. In het algemeen beschouwt men vaak de handelingen op de hogere niveaus pas als echte denkhandelingen:

Op niveau 2 wordt de waarde die een materiële object heeft met betrekking tot een eigenschap object van het denken.

Op niveau 3 wordt de waardebepaling voor

materiële objecten, de handeling zelf, object van het denken.

Op niveau 4 worden de objecten van de handeling objecten van het denken. De handeling is een constituerende handeling voor de klasse van objecten die eronder vallen, en voor de verzameling van waarden op dit niveau.

Op niveau 5 wordt de volledige handeling een object van het denken waardoor een volledig begrip van de eigenschap aanwezig is.

We realiseren ons nu dat er slechts één woord druk en één symbool p is om een begrip aan te duiden dat zich op zes verschillende niveaus van ontplooiing kan bevinden. Vooral in de inleidende leerstof leidt dit tot problemen voor de leerling (zie Elshout-Mohr en van Daalen-Kaptejns, 1985).

Degene die op niveau 5 is aangeland kan een definitie van het begrip druk geven die niet alleen op dit niveau geldig is maar waarin ook alle specifieke gevallen van druk te herkennen zijn. Zo'n definitie zou bijvoorbeeld kunnen zijn: Druk is de relatie tussen een vlakje met zekere stand en grootte, en de kracht die daar doorheen wordt uitgeoefend. Zo'n definitie komt achteraf tot stand, nadat het totale abstraheringsproces is doorlopen. Vaak beschouwt men deze abstractie als de definitie waarvan uitgegaan moet worden in de leerstof. Dit is onjuist, het begrijpen van de abstracte definitie is een einddoel van het onderwijs. Over de wijze waarop dit einddoel bereikt wordt bestaan verschillende meningen.

De aanname dat je moet beginnen bij zo'n definitie om generalisatie tot stand te brengen is niet noodzakelijk. Dit is aangetoond door Obuchova (1973) wier resultaten door Fridman (1975) zijn geanalyseerd. De leerdefinitie van Obuchova is veel specifieker dan de boven gegeven definitie. Fridman vermeldt nog meer voorwaarden dan Obuchova. Geen van beiden vermeldt daarenboven de voorwaarden dat de lichamen in rust zijn, dat er contactkrachten door het oppervlak heen in het spel zijn die gelijk worden genomen aan de gewichtskracht, en dat de gewichtskracht naar het oppervlak toe werkt. Hoe hoger het niveau van analyse, hoe meer voorwaarden er in het spel komen.

De leerresultaten van de leerlingen van Obuchova zijn niet alleen dat de leerlingen het begrip druk op mentaal niveau hebben geleerd

(in ons schema de denkhandeling op niveau 2), maar ze wijzen op generalisatie, dus het bereikt hebben van niveau 3. De leerlingen kunnen niet alleen in hun hoofd opgaven met druk oplossen, maar ook hun handelingen wijzigen door als de opgave dat vereist over te gaan van gemiddelde druk naar een drukverdeling zonder dat ze dat expliciet geleerd hebben. Dit wijst erop dat het met een specifieke leerdefinitie en zorgvuldig ontwikkeld onderwijs mogelijk is om hoge abstractieniveaus te bereiken. Ter vergelijking: de meeste leerlingen in ons voortgezet onderwijs bereiken geen begrip dat bestand is tegen irrelevante of onvolledige informatie. Zij komen niet verder dan het begin van niveau 2.

Voor het onderwijs is nu belangrijk dat pas op niveau 5 alle voorwaarden in het zicht komen die ons handelen op lagere niveaus beperken, en dat pas op niveau 5 te bepalen is welke kenmerken essentieel zijn voor het begrip. Voorts is voor de onderwijsvormgeving van belang dat hier niet alleen een symbolisering van het begrip in woorden kan plaats vinden, zoals bij een definitie het geval is, maar dat ook andere symboliseringen bedacht kunnen worden, in formules, in schema's, in modellen en in demonstratie-experimenten die de essentiële kenmerken in reïncultuur bevatten. Een symbool, een demonstratieëxperiment of een model kan vanaf niveau 0 functioneren, een schema dat de relaties tussen verschillende dimensies weergeeft, vanaf niveau 1, en een formule voor de kwantitatieve relaties tussen de samenstellende grootheden vanaf niveau 2.

Deze symboliseringen zijn eigenlijk materialiseringen van het begrip op het hoogste niveau. Zij geven in materiële vorm een mogelijkheid voor de leerlingen tot oriëntering op de gedachten van de docent mits de docent duidelijk aangeeft over welke specifieke voorwaarden heen gegeneraliseerd moet worden. Een goed en creatief docent is in staat een demonstratie te bedenken die de toeschouwers in de waarneming van materiële objecten, dus op niveau 0, reeds zicht geeft op het begrip druk als object van het denken op niveau 5. Hiertoe moet hij de beperkende voorwaarden doorzien en laten vallen, en de essentiële kenmerken belichten. Dit getuigt van een werkelijke beheersing van het begrip druk, die bruikbaar is in het onderwijs.

Het moeilijkste is hierbij het afdalen naar

niveau 0 of 1. Ook bij de opleiding van aanstaande leraren blijkt dat studenten het erg moeilijk vinden om het abstracte begrip waarneembaar te maken. Het hanteren van abstractieniveaus kan hier dienstbaar zijn om verbalisme en formele formulemanipulatie te doorbreken.

Wanneer een docent door af te dalen naar materiële niveaus de leerlingen of studenten zicht geeft op het abstracte begrip op hoog niveau, kan het gehoor genieten van de glasheldere uiteenzetting en het wijde perspectief dat geboden wordt, zoals ieder uit eigen ervaring als docent of als toehoorder wel weet. De illusie van inzicht is echter van korte duur. Zonder inspanning en toepassing via het maken van opgaven komt geen duurzaam inzicht tot stand. We komen nu op het terrein van de inrichting van onderwijs dat gericht is op het bereiken van hoge abstractieniveaus. Daar zullen we ons nu niet mee bezig houden. Hier willen we alleen het volgende opmerken.

De docent moet opgaven voorbereiden en aanwijzingen verstrekken om deze opgaven zo te kunnen maken dat de inspanningen van de leerling leiden tot de gewenste abstractie. Een probleem hierbij is dat de denkhandelingen van de docent voor een gedeelte verkort, en voor een ander gedeelte intuïtief verlopen. De opgave voor de docent is dus enerzijds om zijn eigen verkortingen op te heffen en de volledige denkhandeling te reconstrueren, anderzijds om datgene wat hij intuïtief doet expliciet te maken. Het is onze ervaring dat ons model daarbij behulpzaam kan zijn, vooral wat betreft de basisbegrippen van een vak.

Uiteraard betekent dit niet dat elke docent elk begrip op niveau 5 moet beheersen. Voor het geven van onderwijs gericht op niveau 2 is een beheersing op niveau 2 à 3 voldoende. Wel is het gewenst dat de samenstellers en de schrijvers van de leerstof te rade gaan bij de juiste deskundigen om een overzicht te krijgen van alle voorwaarden, ook die welke in het begin buiten beschouwing worden gelaten. Anders bestaat het gevaar dat irrelevante, storende materiaalfactoren als essentieel in het begrip sluipen, en een verdere ontwikkeling van het begrip blokkeren.

Een ander aspect van de relatering van het begrip druk aan andere begrippen op niveau 5 is de bredere visie die ontstaat. De relaties met andere vakonderdelen en disciplines komen

meer in 't zicht. Het kan zijn (afhankelijk van het onderwijs) dat men zich nu pas realiseert dat de drukkracht door een vlak heen van het ene lichaam op het andere, even groot is als en tegengesteld gericht is aan, de drukkracht van het laatste op het eerste. Immers, de contactkracht door het contactoppervlak heen, van het ene lichaam op het andere, is even groot als en tegengesteld gericht aan de contactkracht van het tweede op het eerste, volgens de derde wet van Newton: actie is het tegengestelde van reactie.

Druk heeft dus de eigenschap dat hij als het ware twee kanten op werkt, het is een soort spanning in het vlakje. In een andere onderwijssituatie zouden deze eigenschappen van druk reeds op niveau 0 geleerd kunnen zijn! Immers, als men twee lichamen bekleedt met verend materiaal en tegen elkaar drukt, dan kan men waarnemen dat het materiaal op beide lichamen ingedrukt wordt, en wel evenveel. Als men die lichamen op elkaar plakt en ze uit elkaar trekt kan men waarnemen dat het materiaal uitgerekt wordt, en alweer aan beide kanten evenveel. Het verschil tussen niveau 5 en niveau 0 is hier dat op niveau 0 nog niet de relatie met de derde wet van Newton gelegd kan worden.

Het bereikt hebben van een bepaald niveau van abstractie kan dus niet afgelezen worden uit het resultaat van een handeling of uit het antwoord op een opgave, maar hangt af van de wijze waarop het resultaat tot stand komt en de (denk)handelingen die daarvoor uitgevoerd worden. Het belangrijkste instrument om achter deze gedachten te komen is het geven van afwijkende opgaven, opgaven waarin de voorwaarden anders zijn, of waarin storende factoren aanwezig zijn die niet eerder aan bod zijn gekomen, en vervolgens de vraag aan de leerling: 'Waarom doe je dit? Waarom doe je dit op deze manier?'. Wij zijn van mening dat met het gepresenteerde model de docent beter in staat is het ontwikkelingsniveau van dit denken te beoordelen. Hierdoor krijgt hij een instrument in handen waarmee hij het onderwijs beter aan kan passen aan het begripsniveau van de leerling, zo hij dat wil.

Literatuur

Davydov, V. V., De introductie van het begrip grootheid in de eerste klas van de basisschool,

1962. In: C. F. van Parreren en J. A. M. Carpay (red.), *Sovjetspsychologen aan het woord*. Groningen: Wolters-Noordhoff, 1972.
- Elshout-Mohr, M. & M. M. van Daalen-Kapteijns, Het leren van begrippen, in het bijzonder in het eerste stadium van het hoger onderwijs. *Pedagogische Studiën*, 1985, 62, 459-470.
- Fridman, L. M., Het opstellen van een oriënteringsbasis voor het oplossen van theoretische vraagstukken. *Voprosy Psichologii*, 1975 (4), 51-61. Samenvatting: J. Carpay.
- Obuchova, L. F., Die Ausbildung eines Systems physikalischer Begriffe unter dem Aspekt des Lösen von Ausgaben. In: J. Lompscher (Hrsg.), *Sowjetische Beiträge zur Lerntheorie. Die Schule P. J. Galperins*. Köln: Pahl-Rugenstein, 1973.
- Parreren, C. F. van, Niveaus in de ontwikkeling van het abstraheren. In: J. de Wit e.a. (red.), *Psychologen over het kind*, deel 6. Groningen: Wolters-Noordhoff, 1979.
- Treffers, A., Psychologie, vakdidactiek en ontwikkelingsonderzoek. *Tijdschrift voor didactiek van de natuurwetenschappen*, 1984, 2(3), 149-169.
- Vastenhouw, J. & W. Jochems, Begrippen en hun niveaus van beheersing: de theorie van Klausmeier en haar belang voor het onderwijs. *Pedagogische Studiën*, 1984, 61, 431-443.
- Vos, H. & P. Licht, Der Zusammenhalt des Wassers und das Phänomen des negativen Drucks. *Chimica Didactica*, 1985, 11, 109-124.
- Vos, H., De samenhang van water en negatieve druk. *Faraday*, 1983, 52, 85-90.
- Vos, H., Abstractieniveaus in de ontwikkeling van het begrip elektrische stroom. *Tijdschrift voor didactiek van de beta-wetenschappen*, 1987.
- Vos, H., Abstractieniveaus in het begrip getal en het rekenonderwijs van Davydov. In voorbereiding.

Curriculum vitae

H. Vos (1943), studie natuurkunde Vrije Universiteit, Amsterdam, promotie 1972. Werkzaam geweest bij de lerarenopleiding VL-VU te Amsterdam, bij de Gadjah Mada Universiteit in Yogyakarta, en sinds 1985 verbonden aan de Universiteit Twente als onderwijskundig adviseur bij de faculteit der Elektrotechniek.

Adres: Universiteit Twente, faculteit der Elektrotechniek, Postbus 217, 7500 AE Enschede.

Manuscript aanvaard 15-5-'87

Summary

Vos, H. 'Levels of abstraction in the development of the concept pressure.' *Pedagogische Studiën*, 1987, 64, 285-294.

Scientific concepts like pressure, have been developed by abstraction from reality. The hierarchical model by Van Parreren describes six levels in the development of the mental act of abstraction. We apply this model to the abstracting tasks of comparing, measuring and calculating as they arise in connection with the concept pressure. It turns out that the same levels can be distinguished. These levels of abstraction describe a psychological development of the concept, not necessarily a chronological one. Only one word pressure stands for a concept that can be in six different states of development. Symbols and formulae play different roles at the various levels. The highest level is needed in order to determine the essential characteristics of a concept and to get insight into the conditions that limit our actions at lower levels. Tests to determine educational results cannot be independent of preliminary experience and educational tasks.