

Analyseren en ontwikkelen van reken/wiskundeonderwijs vanuit twee verschillende basisconcepties

A. TREFFERS

*Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs
en Onderwijs Computercentrum
Rijksuniversiteit, Utrecht*

Samenvatting

De kernvraag luidt of algemene onderwijsleertheorieën ook zonder meer als constructie-theorieën voor rekenen-wiskunde kunnen fungeren. Aan de hand van de theorie van Gal'perin en de leergang staartdelen wordt aangetoond dat niet zozeer de algemene onderwijsleertheorie als wel de basisconceptie over wiskunde en wiskunde-onderwijs grotendeels bepalend is voor het ontwikkelde onderwijs-produkt. De basisconcepties blijken namelijk in hoge mate de vakinhoudelijke of logische analyse te bepalen en daarmee de grote lijn van de leergangen of te wel macro-structurering van het onderwijs. Bij het ontwikkelen van onderwijs zal men dus de basisconceptie over het betreffende onderwijsgebied moeten expliciteren en verantwoorden, en zich niet louter tot een psychologische analyse bepalen, zo luidt onze slot-som. Nu blijken de bekende analysemethoden van algemeen onderwijs-leertheoretische oorsprong in het algemeen weinig ruimte voor diepgaande logische analyses te laten. Om die redenen wordt op een analyse-methodiek gewezen die meer specifiek op het reken-wiskundeonderwijs is toegesneden, en die een meer fundamentele opvatting over wiskundeonderwijs toelaat bij het ontwikkelen van onderwijs.

1 Inleiding

Men kent in onderwijs-leertheoretische kringen grote invloed toe aan algemene theoretische concepten bij het samenstellen van lessen en het ontwikkelen van onderwijs.

Het constructieve element wordt dan als

vervolg gezien op een of andere vorm van analyse, aangeduid als:

- taakanalyse (Gagné);
- vakinhoudelijke en psychologische analyse (Gal'perin);
- logische en psychologische analyse (Davydov);
- of rationele en empirische analyse (Resnick).

Tallose Nederlandse MO- en doctoraal-scripties dragen titels als: 'Optellen en aftrekken onder de 20 volgens Davydov', 'Een leergang oppervlakte volgens Gal'perin', 'Meten volgens Gagné, Achter dergelijke titels gaat de (vaak niet geëxpliciteerde) opvatting schuil dat verschillende theoretische concepten verschillende onderwijsproducten opleveren. Of omgekeerd dat fundamenteel verschillende onderwijsarrangementen niet aan een en dezelfde onderwijs-leertheoretische bron kunnen ontspringen. Zo tekende De Klerk naar aanleiding van een opdracht aan onderwijs-leertheoretici om een opticales samen te stellen, het volgende op: 'Met stijgende verbazing vernamen de toehoorders dat, ofschoon de theoretische uitgangspunten totaal verschillend zijn, de uitwerkingen van de lessen opmerkelijk veel overeenkomsten vertoonden' (De Klerk, 1982, p. 520).

In dit artikel proberen we de vraag te beantwoorden of algemene onderwijsleertheorieën met bijbehorende analysemethoden ook inderdaad (voldoende) houvast bieden bij het ontwikkelen van lessen en leergangen. Zijn dergelijke theorieën als constructie-theorieën te gebruiken? Met andere woorden: zijn uit die theorieën handelingsregels af te leiden voor het ontwikkelen van leergangen voor bijvoorbeeld cijferen, oppervlakte of breuken? En zo niet, is er dan een alternatieve strategie voor het ontwikkelen van onderwijs voorhanden?

We stellen deze kwestie hier mede aan de orde vanwege de actualiteit ervan voor het ontwikkelen van courseware (programma-tuur) dat thans in brede kring wordt aangevat.

2 Twee onderwijsconstructies omkleed door één algemene theorie

Wat De Klerk registreerde bij een optica-les constateerden wij bij het cijferen, namelijk dat men vanuit verschillende theoretische uitgangspunten tot dezelfde onderwijsopzet kan komen (Treffers, 1982). Omgekeerd is het mogelijk dat men vanuit één algemene onderwijs-leertheorie tot fundamenteel verschillende onderwijsconstructies geraakt. We zullen dit nu trachten aan te tonen aan de hand van het cijferen i.c. de staartdeling. De fundamenteel verschillende leergangen die daarvoor zijn ontwikkeld, zijn eerder in dit tijdschrift beschreven (Treffers, 1982). En we kiezen daarbij Gal'perins theorie over de trapsgewijze vorming van mentale handelingen als relatief bekende onderwijs-leertheorie.

2.1 Geïsoleerd cijferend delen volgens progressieve complicering

Bij het geïsoleerde cijferende delen staat het cijferen los van handig en toegepast rekenen. Vandaar de typering 'geïsoleerd'. En de aanduiding 'progressieve complicering' slaat op de opbouw van de leergang. Deze wordt gekenmerkt door het feit dat de 'kale' rekenopgaven geordend zijn naar opklimmende moeilijkheid. De clusters van soortgelijke sommen kunnen bijvoorbeeld als volgt in het gelid worden geplaatst: eerst $18 : 3$, dan $256 : 4$, vervolgens $840 : 20$, en $1924 : 26$, tot $93875 : 324$. Daarbij wordt steeds per deelgeval naar de standaardvorm van de staartdeling toegewerkt. Soms worden zelfs tientallen deelgevallen onderscheiden, geordend naar opklimmende grootte van deeltal en deeler, gecombineerd met nullen en zonder nullen in opgave en antwoord, al dan niet met een restgetal.

In de inzichtelijke variant wordt in de startfase per deelgeval van inwissel-materiaal gebruik gemaakt, dat verdeeld of opgedeelde wordt. Maar volgens de mechanistische aanpak wordt uitsluitend op papier gewerkt.

2.2 Geïntegreerd cijferend delen volgens progressieve schematisering

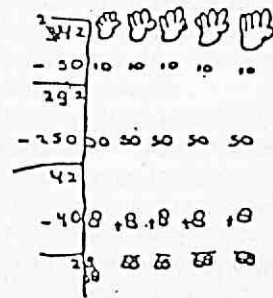
De leergang staartdelen volgens progressieve schematisering ontwikkelt zich geleidelijk uit handig en steeds handiger rekenen. Reële problemen spelen een dominerende rol bij

zowel het ontwikkelen van de staartdelingsprocedure als het toepassen ervan.

Er wordt met een elementair probleem van eerlijk delen gestart, bijvoorbeeld: '342 stickers worden onder 5 kinderen verdeeld, hoeveel krijgt ieder?'

In de eerste fase van de leergang voeren de leerlingen het verdelen concreet uit via één-voor-één uitdelen; tegelijkertijd noteren en controleren ze het resultaat. De langdradige en onhandige één-voor-één werkwijze komt daarbij ter sprake.

In de tweede fase worden er grotere porties uitgedeeld en de stand wordt in een soort delingsschema bijgehouden (zie Figuur 1).



Figuur 1 Verdelingsschema

In de derde fase noteren de kinderen nog maar één kolom (de porties zijn immers toch gelijk) en ze werken aan een steeds verdergaande verkorting van de staart. Honderdtallen, tientallen en eenheden worden bij het verdelen en opdelen zoveel mogelijk samen genomen. In het voorbeeld van Figuur 1 betekent dit dat in de ene overblijvende kolom direct 60 en daarna 8 worden uitgedeeld en genoteerd:

$$\begin{array}{r}
 5 \overline{) 342} \setminus \\
 \underline{300} \quad 60 \\
 42 \\
 \underline{40} \quad 8 \\
 R \quad 2 \quad 68
 \end{array}$$

Het probleem van het restgetal wordt mede in relatie met de zakrekenmachine beschouwd ('Hoe bepaal je uit het kommagetal dat in het rekenvenster verschijnt het restgetal?').

Ook wordt voortdurend aandacht besteed aan het zelf construeren van verhaaltjessom-

2 Doe wat met de rest!

- a Op een wagon van een autotrein passen 14 auto's.
Er moeten 371 auto's vervoerd worden
Hoeveel wagons zijn er nodig?



Delen met rest in toepassing

men bij kale rekenopgaven ('6394 : 12; bedenk een verhaaltje zodanig dat de uitkomst 532 is'; idem met als uitkomst 533; idem $532\frac{5}{6}$; ...).

Over de onderwijsresultaten van deze geïntegreerde werkwijze in vergelijking tot de traditionele geïsoleerde aanpak zullen we het later hebben.

2.3 *Eén theoretische omkleeding: Gal'perins concept*

Nu zal blijken dat beide geschetste leergangen door de onderwijstheorie van Gal'perin omkleed kunnen worden.

Volgens de trapsgewijze onderwijsprocedure van Gal'perin moet iedere nieuwe mentale handeling worden voorbereid door een handeling op materieel en gematerialiseerd niveau, die reeds alle essentiële trekken bevat waarop men zich ook bij de uitvoering van de mentale handeling baseert. Door deze weerspiegeling van de kern-elementen op verschillende niveaus van uitvoering kunnen de leerlingen zich van meet af aan op de cijferhandelingen oriënteren.

Bij het cijferen volgens progressieve complicering vindt de verinnerlijking en verkorting van de handelingen met concreet of schematisch voorgesteld materiaal steeds per deelgeval plaats. De fasering naar de eindhandeling van de standaard procedures is in dit cyclische proces zeer kort. De andere parameters die Gal'perin aan handelingen toekent, te weten de graad van de algemeenheid, de mate van verkorting en de beheersingsgraad manifesteren zich hier als volgt. De algemeenheid heeft betrekking op de procedures per deelgeval. De kenmerkende bestand-

delen ervan behouden ook in de meer complexe gevallen hun geldigheid. De verkorting vindt steeds per deelgeval plaats en voltrekt zich zeer snel: de overgang van het inleidende handelen met positie-materiaal (zo dat al plaats vindt) naar de definitieve uitvoering van de algoritme geschiedt in een of enkele lessen. En de beheersingsgraad wordt stap voor stap opgevoerd in een cumulatief proces van inslijpen van deel-procedurehandelingen waaruit de algoritme is opgebouwd.

Belangwekkend is echter dat ook het cijferen volgens progressieve schematisering zich conform Gal'perins onderwijsprocedure voltrekt. Zo liggen in het concrete uitdelen en noteren van de porties bij het eerlijk verdelen exact de rekenhandelingen van de staartdeling voorgetekend. Het kortingsproces is hier uitdrukkelijk object van onderwijs en loopt als een rode draad door de leergang. Er is sprake van een geleidelijk voortschrijdende schematisering en verkorting van de rekenhandelingen. De mate van algemeenheid is evenzeer een opvallende trek: de kinderen werken vrijwel vanaf de start met relatief grote getallen, zij het zoals gezegd dat de wijze van oplossen eerst nog weinig verkort plaatsvindt. Daarnaast wordt de algemeenheid op een andere manier verzorgd, namelijk met betrekking tot de toepasbaarheid van de (staart-)deling.

Dit blijkt onder meer uit de aandacht voor delingen met rest en de daaruit voortvloeiende contextafhankelijke antwoorden. De beheersingsgraad wordt verzorgd door het inslijpen en onderhouden van de basisvaardigheden – wat dit betreft is er geen verschil met de eerstgenoemde aanpak van het cijferen. Wel is het zo dat een minder hoge beheersingsgraad van de vaardigheden in met name het cijferend vermenigvuldigen 'uit het hoofd' van een èncijfergetal met een meercijfergetal, nu niet direct tot een falen bij het staartdelen hoeft te leiden. Alleen de mate van verkorting wordt er ernstig door belemmerd.

Samenvattend stellen we vast dat in het geval van de progressieve complicering Gal'perins parameters van fasering en verkorting op de onderscheiden deelgevallen worden toegepast, terwijl bij het cijferen volgens progressieve schematisering de genoemde kenmerken op de totale leergang inwerken. Bij dit geïntegreerde cijferen stofferen con-

textproblemen de oriënteringsbasis. Als gevolg daarvan krijgen de mate van algemeenheid en de beheersingsgraad nu een bredere inhoud: ze raken niet alleen het cijferen maar ook de toepasbaarheid van de cijferprocedures.

2.4 Conclusie en interpretatie

Uit een en ander mogen we concluderen dat men vanuit de algemene onderwijsleertheorie van Gal'perin tot fundamenteel verschillende leergangconstructies van het cijferen kan komen. Zelfs algemener: dit geldt niet alleen voor het specifieke cijferen in relatie tot de theorie van Gal'perin. In plaats van cijferen hadden we namelijk net zo goed oppervlakte of breuken of nog een andere leergang kunnen nemen. En Gal'perins onderwijstheorie had vervangen kunnen worden door die van Gagné of Resnick – het resultaat zou onveranderd zijn. Dat wil zeggen: er zouden fundamenteel verschillende ontwerpen van onderwijs te maken zijn onder de koepel van een en dezelfde algemene onderwijsleertheorie. Althans principieel, want in de praktische voorbeelden die de genoemde onderwijsleertheoretici zelf geven, wordt steeds de sterk vaksystematisch bepaalde weg van de progressieve complicering gekozen – maar daarover straks meer.

Wellicht spreekt de meeste overtuigingskracht voor deze stelling uit het feit dat onderwijsprogramma's die vanuit één algemene onderwijsleertheorie geïnspireerd zijn, blijken fundamenteel te verschillen. Neem bijvoorbeeld Davydovs concept. Aan de ene zijde staat het Utrechts Reken-Wiskunde Programma van Nelissen, Vuurmans e.a. dat op deze theorie is geënt. Anderzijds is er het Operel-programma van Wolters, Perrenet e.a. voor het aanvangsonderwijs dat aan dezelfde theorie-bron ontspringt. Welnu, deze programma's verschillen fundamenteel: het eerstgenoemde is veel minder vaksystematisch bepaald dan het tweede; op deze tweedeling gaan we straks in.

Hoe is iets dergelijks nu mogelijk? Wel, Gal'perin – om ons nu maar tot hem te bepalen – zou de fundamentele verschillen toeschrijven aan verschillen in de logische analyse. Een logische analyse die naar zijn opvatting door de vakwetenschapper gemaakt moet worden (Gal'perin, 1974, p.109).

Met dit te stellen verschuift de zojuist

gestelde vraag dan echter naar die van de logische of vakinhoudelijke analyse: 'Hoe is het mogelijk dat vakinhoudelijke analyses tot zulke fundamentele verschillende uitwerkingen kunnen leiden?' Het antwoord luidt simpel: 'Omdat er zo fundamenteel verschillend tegen het "vak" wiskunde wordt aangekeken'.

3 Verschillende basisconcepties over wiskunde-onderwijs

De logische analyse zoals door Gal'perin bedoeld, is er op gericht de essentiële kenmerken van wiskundige begrippen, operaties en structuren op te sporen. Bijvoorbeeld: wat zijn de wezenlijke elementen van de staartdelingsprocedure en het kunnen toepassen ervan op delingsproblemen.

Gelet op het voorgaande blijken op deze vraag twee antwoorden te worden gegeven. Deze nu vormen een concrete uitdrukking van twee meer algemene verschillen in opvatting over wiskunde en wiskundeonderwijs, waarover onder meer Freudenthal, Lakatos, Hilton en de Wiskobasgroep hebben geschreven. Aangezien deze twee basisconcepties van beslissende invloed blijken te zijn op de vakinhoudelijke analyses en constructies, zullen we er nu kort enige aandacht aan besteden.

3.1 Heuristisch versus deductivistisch onderwijs

Lakatos' bemaamde boek 'Proofs and refutations' (1977) heeft als ondertitel 'The logic of mathematical discovery'. In felle bewoordingen bestrijdt Lakatos het standpunt van de formalistische school dat deze logica de deductie zou zijn die als het ware door een geprogrammeerde Turingmachine zou kunnen worden uitgevoerd. Hij is het evenzeer oneens met de visie als zouden wiskundige ontdekkingen in het geheel geen logica bezitten, doch louter een irrationeel proces zijn. In beide gevallen leidt dit tot een deductief, vaksystematisch opgezet onderwijs, dat in canonieke leerboeken wordt opgeslagen in het quotiënt dat groter is dan tien. genschappen, bewijzen en ontdekkingen als het ware uit de lucht komen vallen. Lakatos stelt zich dus teweer tegen de opvatting van leerstellige wiskunde met zijn eeuwig en on-

aantastbare waarheden. Dit is wiskunde, zo stelt hij, waarin het zoeken, het avontuur, het falen, zowel fylogenetisch als ontogenetisch bezien, wordt weggestopt en waarin de weerlegging van het feilbare bewijs plaats heeft moeten maken voor de onwankelbare stelling. En hij stelt tegenover de formele, vaksystematische mathematica de informele, quasi-empirische wiskunde. Aan deze wiskunde als produkt van menselijke activiteit ligt een situationele logica, een heuristiek, een feilbare logica van de wiskundige processen van het ontdekken ten grondslag, de logica van 'proofs and refutations'.

Lakatos stelt dan ook voor om de leerboeken zodanig te herschrijven dat de dialectiek, de groei van de wiskundige ontdekking er in tot uitdrukking wordt gebracht. Een dergelijk heuristisch uitgelijnd onderwijs volgt niet exact het verloop van de historische ontstaanswijze van de betreffende mathematische begrippen, operaties en structuren, maar komt tot stand via een rationele reconstructie van het ontstaansproces met het oog op de lerende, zo luidt globaal Lakatos' gedachtengang.

Het is duidelijk dat een logische analyse vanuit vaksystematisch of deductivistisch standpunt gepleegd tot een andere uitkomst leidt dan die welke vanuit heuristische optiek wordt gemaakt – we gaan daar straks nog wat dieper op in.

3.2 *Realistisch versus structuralistisch onderwijs*

Hilton, de Wiskobasgroep e.a. duiden de beschreven tweedeling aan met de termen structuralistisch en realistisch. Vanuit structuralistisch standpunt bezien is wiskunde een schoolvak waarvan de inhoud uit de vakwetenschap is afgeleid. Een vak dat een compendium is van verworven structuren, concepten en denkwijzen. Zo bezien is wiskunde 'af', het is een voortgetekende structuur, een voltooid bouwwerk, iets dat je aantreft en wat verder op het onderwijsniveau geen nadere explicatie behoeft. Denkend vanuit dat gegeven produkt is het de taak van de onderwijsleerpsychologie te onderzoeken hoe mensen die begrippen leren (gebruiken en toepassen) en hoe het complex van cognitieve structuren waarin de wiskundige kennis vervat ligt, moet worden onderwezen. De lijn van afleiding voor onderwijsontwikkeling loopt

van de theoretische structuur van de vakwetenschap via de cognitieve structuur van de expert langs de te ontwikkelen inhoudelijke leerstof-structuur naar de actuele en beoogde cognitieve structuur van de leerling. Daarbij wordt de vaksystematische ordening van de leerstof in diepste grond niet ter discussie gesteld, aldus het structuralistische standpunt.

In het realistische wiskunde-onderwijs daarentegen wordt de vaksystematische ordening niet als onaantastbaar beschouwd. Wiskunde wordt hier primair als een menselijke activiteit gezien, die op iedere leeftijd en op ieder niveau tot (on-)volwaardige wiskundige denkprestaties en (feilbare) produkten kan leiden. De aanduiding 'realistisch' typeert de gerichtheid van deze onderwijsaanpak op de realiteit i.c. op contextproblemen. Deze kunnen namelijk, volgens deze conceptie, de brugfunctie vervullen tussen het formele systeem en de realiteit waarop het van toepassing is, of juist, de werkelijkheid waaraan de wiskunde is ontsproten. Evenzeer kenmerkend voor dit wiskunde-onderwijs is de sterke nadruk die op het constructieve element wordt gelegd. Dat wil zeggen, de leerling wordt geholpen om via een geleidelijk constructie-proces van voortschrijdende abstractie en formalisering wiskundige kennis te verwerven. Anders gezegd: invoering in de meer formele wiskunde geschiedt vanuit de informele benaderingswijzen die kinderen bij het oplossen van contextproblemen hanteren, via een langlopend leerproces van progressieve mathematisering (Treffers en Goffree, 1985).

Wat deze oriëntatie op toepasbaarheid, constructie en geleidelijke verwiskundiging concreet kan inhouden blijkt bijvoorbeeld uit de eerder geschetste aanpak van de staartdeling volgens progressieve schematisering.

3.3 *Nuancering van de tweedeling*

Kijkend naar langlopende leerprocessen en naar de grote lijnen die de verschillende leergangen traceren – zichtbaar gemaakt in de opeenvolging van opgaven en activiteiten – blijken er ruwweg twee fundamenteel verschillende basisconcepties over wiskunde-onderwijs te bestaan. Deze worden, zoals hiervoor bleek, met wisselende termen aangeduid. Omdat we hier vooral het accent op de globale leerstofordening leggen, vatten we

de betreffende dichotomie samen in de aanduiding vaksystematisch bepaald versus niet-vaksystematisch bepaald wiskunde-onderwijs.

De eerder beschreven kenmerken van die twee basisconcepties zullen nog verder verduidelijkt en genuanceerd worden aan de hand van het voorbeeld over delen en wel speciaal de staartdeling.

Allereerst de vaksystematische aanpak. Welnu, vaksystematisch bezien komt delen na de trits optellen – aftrekken – vermenigvuldigen; het is de inverse operatie van vermenigvuldigen, dat op zijn beurt weer aan het (herhaalde) optellen is gekoppeld, waarvan het aftrekken de inverse is. Die volgorde vindt men in het onderwijs en in de leerboeken weerspiegeld: delen verschijnt als laatste van de basisoperaties in het vervangsonderwijs, de staartdeling sluit de rij van de cijferalgoritmen in de middenklassen, en ook in de bovenbouw bij kommagetallen en breuken is de deling het sluitstuk.

Eerder is al beschreven dat de vaksystematisch bepaalde aanpak van de staartdeling wordt gekenmerkt door de toenemende complicering van de opgaven, het direct aansturen op de eindvormen van de algoritmen i.c. de standaardprocedures, en de toepassingen achteraf. Dit wat de globale structurering of macro-structurering van de leergang betreft, waarop het etiket 'vaksystematisch' past.

Betrekken we echter daarbij ook het micro-niveau van het onderwijs op onderdelen van de leergang, zeg per les-eenheden, dan moet de algemene kenschets aanzienlijk worden verfijnd. Het maakt namelijk nogal wat uit of bijvoorbeeld in het geval van de staartdeling, de procedure 'blind' wordt aangeleerd, of inzichtelijk met ondersteuning van positie-materiaal. In het laatste geval wordt de kennis van de leerlingen veel beter gestructureerd, zodat er ook veel minder deelgevallen onderscheiden hoeven worden. Gelet op dit belangrijke onderscheid, kan de vaksystematisch bepaalde aanpak uiteengelegd worden in een mechanistische richting en een structuralistische richting. En als men dan nog bedenkt dat in plaats van 'kunstmatig' structureel positie-materiaal, ook natuurlijk positie-materiaal in de vorm van geld, lengtematen of gewichten, kan worden gebruikt en ingebed in elementaire contextopgaven, dan wordt nog een derde richting

zichtbaar, de empiristische, die al sterke niet vak-systematische trekken kan vertonen (zie verde Treffers, 1984). Waaruit dan tevens naar voren komt dat er geen sprake is van een scherpe tweedeling, maar veeleer van een vloeiende lijn met tal van overgangsvormen tussen de genoemde extremen.

Nu het andere uiterste: de niet-vaksystematische aanpak. In deze opvatting van wiskunde-onderwijs waarin men zich meer aan het reële verschijnsel delen oriënteert dan aan de vaksystematisch bepaalde plaats ervan, is de genoemde volgorde optellen – aftrekken – vermenigvuldigen – delen helemaal niet vanzelfsprekend als indeling en volgorde van onderwijs. Men redeneert namelijk als volgt: eerlijk delen is voor kinderen een reëel en aansprekend fenomeen. Uitgaand van het eerlijk verdelen van objecten kunnen de relaties meer, minder en is-gelijk geïntroduceerd worden. Via hoeveel meer of minder komt het aftrekken in beeld. Het samenemen van gelijke porties leidt tot herhaald optellen i.c. vermenigvuldigen. Kortom, de vaksystematische ordening van de basisoperaties hoeft niet strikt te worden gevolgd. Anders gezegd: de vaksystematiek levert niet het enige, ja zelfs niet het meest voor de hand liggende criterium voor de leerstofordening op – aldus luidt de gedachtingang van de niet-vaksystematisch geïnspireerde wiskunde-didacticus. En in de leerboeken komt dit tot uiting, zoals gezegd, in de vroege introductie van (eerlijk)-delen. Bij de staartdeling blijkt de niet-systematische of informeel-systematische aanpak uit de toenemende schematisering en verkorting van de wijze van oplossen van delingsopgaven, het pas op langere termijn aansturen op de standaardvormen, en het gebruiken van toepassingen vooraf en tijdens, in plaats van alleen achteraf. De opgaven zijn niet alleen in rekentaal gesteld en ze zijn van meet af aan betrekkelijk complex.

Dus al direct bij het oppervlakkig doorbladeren van de leerboeken kan het genoemde onderscheid signaleerd worden dat zich, zoals gezegd, met name in de macro-structurering van de leerstof en de onderwijsactiviteiten voordoet.

In het volgende zullen de consequenties van deze basisconcepties nog wat nader worden uitgewerkt voor de logische of vakinhoudelijke analyses die zich voornamelijk op die

macro-structurering richten.

4 Twee soorten logische analyses

4.1. *Vaksystematische logische analyse*

Gagné's taakanalyse past exact in het vaksystematische basisconcept. De startvraag van de taakanalyse luidt: 'Wat moet een kind weten en kunnen om deze taak te kunnen uitvoeren, nadat het onderwijs heeft ontvangen?' (Gagné, 1969). Deze analyse-vraag leidt bij Gagné vervolgens tot het uiteenleggen van samengestelde taken in een hiërarchie van enkelvoudige taken die als deeltaken van de complexe kunnen worden beschouwd. Beheersing van de elementaire taken vereenvoudigt het leren uitvoeren van de meer complexe taken, zo wordt gepostuleerd. In zo'n leerhiërarchie die Gagné voor onder meer het cijferen heeft gemaakt, ziet men zijn cumulatieve leertheorie weerspiegeld: hoe lager in de leerstructuur des te meer elementair zijn de leertypen (Gagné & Briggs, 1974). Kort gezegd gaat de taakanalyse uit van een vaksystematisch bepaald eindproduct van verworven begrippen en procedures; het is een naar beneden vertaald expertgedrag.

Resnicks rationele en empirische analyse verschilt in enkele belangrijke opzichten van deze taakanalyse (Resnick, 1976; Resnick & Ford, 1981). Zij voert als belangrijkste bezwaar tegen de taakanalyse aan dat deze te leerproduct-gericht is. En zij stelt er een procesanalyse naast waarin meer aandacht aan het leerproces en de cognitieve structuren wordt besteed. Wat het cijferen betreft heeft Resnick de relatie tussen de cijferhandelingen ('syntax') en het betekenisvol manipuleren ('semantics') met positiemateriaal onderzocht (Resnick & Ford, 1981; Resnick, 1982). Maar – en dit is van essentieel belang – de vaksystematisch bepaalde leerstofordening als geheel laat ze onaangetast: de rationele procesanalyse richt zich op het psychologische micro-niveau van cognitieve representaties, en het macro-niveau van de curriculum-oriëntatie wordt door haar en andere onderwijs-leertheoretici uit de informatie-verwerkingstheorie bewust buiten beschouwing gelaten (zie de mededeling daarover in Carpay, 1982, p.32; en zie ook Cobb & Steffe, 1983). Het is wellicht juist

om te zeggen dat Resnick een impliciete basisopvatting over wiskunde-onderwijs hanteert, die vaksystematisch of meer bepaald, structuralistisch van aard is, hetgeen onder meer uit haar onderzoek over cijferen blijkt.

In het voorgaande werd er al op gewezen dat Gal'perin de logische analyse aan de wetenschappers toebedeelt. De consequentie hiervan is, net als bij Resnick, dat de onderwijs-leerpsycholoog de macro-structurering van de leerstof grotendeels uitbestedt en weinig toegankelijk maakt voor psychologisch onderzoek. Voor zover Gal'perin zelf logische analyses verricht (aanvankelijk getalbegrip, meetkunde, cijferen) zijn deze vaksystematisch van opzet, met zowel mechanistische als structuralistische trekken.

Davydov rekent de logische analyse wel tot de taak van de onderwijs-leerpsychologie, en hij besteedt dan ook uitdrukkelijk aandacht aan de leerstof-opbouw. Men zou zelfs kunnen zeggen 'dat Davydov te zeer gericht is op het onderwijs-leerproces in curriculaire zin en het onderwijs-leerproces in microgenetische zin verwaarloost' (Van Oers, 1983, p.154).

Zijn denkbeelden over de vorming van theoretische begrippen voeren hem naar de structuralistische opvattingen van de Bourbaki-groep. Anderzijds beroept hij zich bij de (dialectisch) logische analyse ook op de denkbeelden van Lakatos over rationele procesreconstructie van structuren en begrippen – Lakatos die zich nu juist sterk afzet tegen Bourbaki! (Davydov, 1977, p.361). Bij zijn pogingen om de structuralistische en heuristische elementen te integreren, komt Davydov tot interessante maar aanvechtbare leerstofordeningen. Deze tonen de trekken van een vaksystematische ordening, zij het dat het dan om een zeer specifieke, om niet te zeggen eigenaardige opvatting over wiskunde gaat. Dit komt bijvoorbeeld duidelijk tot uitdrukking in zijn ideeën over de algemene kern van het getal, en de leergang voor de vorming van het getalbegrip die daarop geënt is. Met name zijn gerichtheid op het zoeken naar één algemene ingang voor de vorming van theoretisch getalbegrip leidt tot een generalisatie, unificatie en systematiek van het aanvangsonderwijs welke vakinhoudelijk niet goed houdbaar is (zie voor een 'bewijs' van de didactische aberraties. Tref-

fers, 1985). Maar daarvan afgezien, luidt de algemene kritiek op Davydov 'dat de belangrijke theoretische generalisaties nooit door de leerlingen zelf geconstrueerd worden, maar dat deze hem aangeboden worden (zij het meestal niet meteen in hun definitieve vorm)' (Van Oers, 1983, p.146). Anders gezegd: de leerstofordening en de onderwijs-leeractiviteiten worden volgens een bepaalde systematiek 'opgelegd'. Davydovs betrekkelijk geringe belangstelling voor de wijze waarop individuele kinderen zich bepaalde begrippen toeëigenen moet dan ook vanuit deze voorgestructureerde systematiek van quasi-vakmatige aard worden begrepen. En hoewel Davydov dus in zekere zin een tussenpositie inneemt ten aanzien van de eerder geschetste basisconcepties, hebben we zijn (dialectisch) logische analyse vanwege die strakke tracerings van de macro-structurering van de leerstof toch onder het hoofd van de 'vak-systematisch bepaalde logische analyse' geplaatst.

4.2 *Voorlopig antwoord op kernvraag over constructietheorieën*

In de inleiding stelden we de kernvraag of algemene onderwijs-leertheorieën met de bijbehorende analyse-methoden als constructietheorieën zijn te gebruiken. Na het voorgaande over logische analyses, gezien tegen de achtergrond van twee fundamenteel verschillende basisconcepties over wiskunde en wiskunde-onderwijs, luidt het antwoord op die vraag dat het er van afhangt hoe men tegen wiskunde aankijkt: vanaf structuralistisch standpunt gezien is het antwoord niet principeel ontkennend, maar uit realistisch gezichtspunt beschouwd pertinent wel. Bezwaren die in de (veelal vakdidactische) realistische hoek tegen algemeen onderwijs-leertheoretisch (ontwikkelings-)onderzoek gehoord worden, voor zover dat op het wiskunde-onderwijs betrekking heeft, richten zich dan ook primair op de basisconcepties over wiskunde welke door de betrokken onderzoekers worden aangehangen.

Dit blijkt bijvoorbeeld uit de reacties op het inmiddels bekende boek 'The psychology of mathematics for instruction' van Resnick en Ford. In algemeen onderwijs-leertheoretische kring wordt dit werk hoog aangeslagen en als het standaardwerk voor rekenen-wiskunde beschouwd, hetgeen ook

blijkt uit de veelal zeer gunstige recensies in de betreffende vaktijdschriften. Uit de vakdidactische hoek klinken veel terughoudender geluiden, wat ook naar voren komt in de boekbesprekingen. Zo schrijft Schoenfeld (1983): 'But there is little mathematics here, as mathematicians see it and would like to see conveyed in the classroom' (p.42). 'The view of mathematics represented in "The psychology of mathematics for instruction" is a travesty and to have that represent "mathematics for instruction" would be devastating' (p.45).

Zeker bij het ontwikkelen van onderwijs, waarover dit artikel speciaal gaat, kan de basisconceptie van wiskunde en wiskunde-onderwijs niet buiten beschouwing worden gelaten. Met name de macro-structurering van de leerstof houdt er direct verband mee. En aangezien de voornoemde algemene onderwijs-leertheorieën onvoldoende of onjuiste aangrijpingspunten voor de leerstofordening bieden - althans vanuit niet-vaksystematisch standpunt bezien - zal er naar een alternatief gezocht moeten worden.

De vraag is nu hoe zo'n andere benaderingswijze eruit ziet.

4.3 *Niet-vaksystematische logische analyse*

De kenmerken van de niet-vaksystematische logische analyse worden beschreven aan de hand van de staartdeling. We steunen daarbij op wat in het voorgaande reeds is geschetst.

Eerst een analyse van de beschikbare empirische gegevens als resultaten van de gebruikelijke onderwijsaanpak.

Welnu, de staartdeling staat van oudsher bekend als de eerste grote hindernis in het rekenonderwijs op de basisschool. Eén op de drie leerlingen blijkt hem niet te kunnen leren, en bij wat moeilijker delingsommen (bijv. met nullen in de uitkomst) struikelt zelfs meer dan de helft. En dan hebben we het alleen maar over de typische procedurefouten, zoals het niet opnemen van nullen in het quotiënt, het nemen van een te groot restgetal, niet 'aanhalen', invullen van een getal in het quotiënt dat groter is dan tien.

Voorts blijkt dat kinderen lang niet altijd de delingsstructuur in toepassingsproblemen onderkennen of juist toepassen, met name niet als er kommagetallen in het geding zijn. Ook de invloed van het restgetal op het ant-

woord in contextproblemen blijkt voor vele leerlingen problematisch. Kortom, de staartdeling blijkt zowel qua procedure op zich als qua toepasbaarheid een lastig stukje onderwijs te representeren: er wordt 60 tot 100 lessen onderwijstijd aan gespendeerd en de opbrengst ervan is op zijn zachtst uitgedrukt zeer matig.

Nu zou men kunnen proberen om op micro-didactisch niveau allerlei verbeteringen aan te brengen, met name door het laten gebruiken van positiemateriaal en door meer inzicht te verschaffen in het positie-systeem. Er zijn echter allerlei redenen om deze 'structuralistische' oplossing als onvoldoende ingrijpende revisie te kwalificeren: de materialisering van de staartdeling is zeer lastig via verdeling van positie-materiaal of anderszins uit te voeren, de kwestie van de toepasbaarheid van het delen in contextproblemen wordt er onvoldoende mee aangepakt, de resultaten van de inzichtelijke aanpak zijn weliswaar in deze vaksystematische werkwijze beter maar toch niet op alle onderdelen bevredigend, en zo meer.

Er zijn dus diverse redenen om naar een diepergaande niet-vaksystematisch bepaalde oplossing te zoeken.

Een historische oriëntatie leert dat onze huidige staartdeling het resultaat is van een proces van schematisering en verkorting, dat in de loop van de geschiedenis plaatsvond binnen achtereenvolgens de divisio ferrea, de divisio aurea en de galeiendeling (Menninger, 1958, p.138 e.v.).

Dit historische feit nu, gevoegd bij de resultaten van het empirisch onderzoek, leiden tot de volgende kernvragen waarin de eerste aanzetten van een rationele procesreconstructie in de zin van Lakatos vervat liggen:

- Waarom zouden de standaard-algoritmen, zijnde eindprodukten, het uitgangspunt van analyse moeten vormen en waarom niet het algoritmiseringsproces van schematisering en verkorting?
- Wat is de reden dat het cijferen los van contextproblemen wordt aangeleerd, terwijl bekend is dat kinderen de algoritmen (als ze die al vaardig kunnen uitvoeren) lang niet altijd op de daartoe geëigende problemen toepassen, maar informele, meer contextgebonden werkwijzen hantieren?

Positief beantwoord leidt een en ander tot een onderwijsconstructie waarin de informele werkwijze van kinderen bij het oplossen van contextproblemen over delen, als hefboom worden gebruikt om de formele procedure van staartdelen en het toepassen ervan aan te leren. Het leidend beginsel daarbij is dat van de progressieve mathematisering i.c. schematisering en verkorting.

Hoe de logische analyse ten slotte in onderwijs uitpakt, werd geschetst onder de titel 'geïntegreerd cijferen volgens progressieve schematisering'.

Ten slotte nog iets over de resultaten van deze alternatieve aanpak van de staartdeling. Welnu, uit onderzoek van Rengerink (1983) blijkt, wat ook reeds uit de proefscholen van het Wiskobas-project bekend was, dat de staartdeling nu geen obstakel meer hoeft te zijn. Meer dan negentig procent van de leerlingen beheerst na 25 lessen reeds 'een' vorm van de staartdeling, zij het op verschillende niveaus. Ook het 'herkennen' van de delingsstructuur in moeilijke gevallen gaat 'significant' beter dan in de traditionele onderwijsaanpak.

Ziehier hoe een niet-vaksystematisch ontwerp van onderwijs volgens het principe van de progressieve mathematisering werd gerealiseerd. Analyse van onderwijs en onderwijsresultaten en historische analyse, gecombineerd met de basisconceptie van wiskunde-onderwijs volgens welke 'men jonge lerenden in de gelegenheid moet stellen: om als het ware het leerproces van de mensheid te herhalen' (Freudenthal, 1984, p.9), leidde tot een fundamentele wijziging van de vaksystematisch bepaalde, traditionele onderwijsaanpak die een belangrijke verbetering lijkt in te houden. In ieder geval is het alternatief de moeite van het bestuderen waard. En meer in het algemeen zou men kunnen stellen dat de macro-structurering van het onderwijs de aandacht van ontwikkelaars en onderzoekers verdient, en dan met name de niet-vaksystematische opvatting daarover. Voorbeelden van analyses die tot dergelijk heuristisch, realistisch of constructivistisch onderwijs leiden, treft men onder meer aan:

- in het werk van Wertheimer (1959) als productieve analyse,
- bij Freudenthal (1984) als didactisch-fenomenologische analyse,
- bij Lesh & Landau (1983) als idee-analyse

- en bij de Wiskobas-groep (Treffers, 1979, Streefland, 1980) als fundamenteel mathematisch-didactische analyse.

Op de vraag of er een alternatief is voor de vaksystematisch bepaalde analyse- en constructiemethodieken uit de algemeen onderwijs-leertheoretische hoek, luidt het antwoord dus bevestigend. Zij het dat het hier niet zozeer om een 'algoritme' als wel om een 'heuristiek' voor onderwijsontwikkeling gaat.

5 *Slotson*

Hier is de grondstelling verdedigd dat men slechts op verantwoorde wijze wiskunde-onderwijs kan ontwerpen en ontwikkelen vanuit een goed gefundeerde en geëxpliciteerde basisconceptie over wiskunde-onderwijs. Men mag tenminste eisen dat het ontwerp in eerste instantie houdbaar is tegen elementaire vakdidactische kritiek. Vele van de in de inleiding aangeduide studies zijn daar echter niet tegen bestand. Maar wat wellicht nog ernstiger is: ook meer professioneel ingericht en wijdverspreid onderwijs-ontwikkelingswerk in de vorm van courseware (zie Feys & De Moor, 1985) of een basis-schoolmethode (zie Freudenthal, 1985; Treffers, 1985) voldoet soms niet aan de meest elementaire vakdidactische standaarden.

Een en ander is mede te wijten aan de overtuiging dat ontwikkelaars en onderzoekers uitsluitend op algemeen onderwijs-leertheoretisch kompas kunnen varen. De opvatting van onderwijsvakpsychologie als afgeleide van onderwijspsychologie; van vakonderwijskunde als afgeleide van onderwijskunde. Het idee dat je je heel snel in de wiskunde-onderwijskunde kunt inwerken als je zelf behoorlijk wat wiskunde beheerst en algemeen onderwijskundig goed op de hoogte bent. Kortom, de gedachte dat je wiskunde kunt ontwikkelen op basis van vaksystematische kennis plus algemeen psychologische inzichten toegepast op dat vak.

Uit het voorgaande is duidelijk, dat wij geen scheiding tussen logische en psychologische analyse voorstaan. Maar waar we het onderscheid hier toch handhaven, is dat om de reden dat daarin duidelijk tot uitdrukking kan worden gebracht, dat de vakinhoudelijke of logische component een geïntegreerd

onderdeel van het wiskunde-onderwijs uitmaakt, en die inhoud ook de neerslag vormt van een proces van mathematiseren als menselijke activiteit en niet louter een vaksystematisch geordend produkt is waar vakpsychologie en vakonderwijskunde geen enkele greep op hebben.

Nu zou het volstrekt onjuist zijn te stellen dat iedere algemeen onderwijs-leertheoretisch geïnspireerde onderwijsontwikkeling vakdidactisch onder de maat is, omdat men de vakinhoudelijke component onvoldoende in het oog zou houden. In het Nederlandse taalgebied geven de publikaties van bijvoorbeeld De Corte & Verschaffel (1985), Nelissen (1983), Van Eerde & Van den Berg (1983) die van oorsprong niet vak-didactisch georiënteerd zijn, van het tegendeel blijk. En ook uit het werk van bijvoorbeeld Kohnstamm (1937) en Van Gelder (1964) spreekt een grote zorg voor de vakinhoudelijke kant van het reken-onderwijs. Maar in de vloed van de hedendaagse studies is een dergelijke gezindheid eerder uitzondering dan regel, en dat stemt tot bezinning.

Naar onze mening komt de lichtvaardigheid waarmee de logische analyse als 'wiedes' wordt afgedaan, voort uit een naïeve opvatting over wiskunde en wiskunde-onderwijs, of zoals Lakatos zegt, een autoritaire conceptie, hetgeen de idee van wiskunde als een menselijke activiteit ernstig schaadt. Uit dat alles mag men overigens niet afleiden dat de vaksystematiek van de progressieve complicering per se uit den boze zou zijn, maar wel dat ze niet onaantastbaar is en dat ze object van kritische doordenking en onderzoek behoort te zijn.

We vatten tenslotte de belangrijkste punten samen:

1. verschillende basisconcepties leiden in het algemeen gesproken tot fundamenteel verschillende onderwijsconstructies;
2. dit kan van verschillende algemene onderwijsleertheorieën niet gezegd worden, want
3. vrijwel alle theorieën waarmee het vaksystematische onderwijs wordt gefundeerd, kunnen ook de niet-vaksystematisch bepaalde realistische aanpak omkleden;
4. ergo: algemene onderwijsleertheorieën vormen noch een concrete noch een volledige oriënteringsbasis voor het ontwikkelen van onderwijs;

5. maar het zijn dus vooral de (vaak impliciete) basisconcepties, zeg de *specifieke* onderwijs-leertheorieën, die de concrete ontwikkeling van het onderwijs in grote lijnen bepalen, zoals men in het voorbeeld van de staartdeling duidelijk kan waarnemen;
6. de wenselijkheid en houdbaarheid van de onderscheiden specifieke onderwijs-leertheorieën (basisconcepties) en hun toepassingen op verschillende deelterreinen, dienen aan empirische gegevens getoetst te worden;
7. vooralsnog spreken de beschikbare feiten niet zonder meer voor de vaksystematische basisconceptie, die in de algemeen onderwijs-leertheoretische beschouwingen zo'n belangrijke rol krijgt toegemeten;
8. om alle genoemde redenen achten wij werkwijzen en opdrachten, die uitsluitend aanzetten tot het ontwikkelen van onderwijs op basis van algemene onderwijs-leertheorieën en stoelend op een (impliciete) vaksystematisch bepaalde opvatting over wiskunde-onderwijs wetenschappelijk discutabel;
9. positief gesteld: bij het verrichten van ontwikkelingsonderzoek zal men zich in de eerste plaats vak-onderwijskundig moeten oriënteren, dat wil zeggen, men zal een rationale moeten maken:
 - ter explicitering van de theoretische vooronderstellingen;
 - gebruik makend van wat bekend is;
 - en ter bevordering van de wetenschappelijke discussie;
 een rationale, waarin logische, psychologische en empirische analyse-onderdelen geïntegreerd zijn.

Literatuur

- Berg, W. van den & D. van Eerde, De Kwantiwijzer: diagnostisch instrumentarium voor het reken-wiskundeonderwijs. In: E. de Moor (Ed.), *Panamacursusboek I*. Utrecht: SOL, OW&OC, 1983, 39-49.
- Carpay, J. A. M., Westeuropese benadering van onderwijsleerprocessen. In: E. De Corte (red.), *Onderzoek van onderwijsleerprocessen. Stroomingen en actuele onderzoeksthema's*. 's Gravenhage: S.V.O., 1982, 28-36.
- Cobb, P. & L. P. Steffe, The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1983, 14, 95-101.
- Corte, E. De & L. Verschaffel, Werken met eenvoudige rekenvraagstukjes in de eerste klas. In: E. de Moor (red.), *Reken-wiskundemethoden anno 1984*. Utrecht: SOL en OW&OC, 1985, 34-42.
- Davydov, W. *Arten der Verallgemeinerung im Unterricht. Logischpsychologische Probleme des Aufbaus vom Unterrichtsfächern*. Berlin: Volk und Wissen, 1977.
- Davydov, V. V., Logical and Psychological Problems of Elementary Mathematics as an Academic Subject. In: J. Kilpatrick e.a. (Eds.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*, vol VII. Chicago: 1975, 55-109.
- Feys, E. & E. de Moor, Vakdidactische beoordeling van rekensoftware. *Panamapost*, 1985, 3, 3, 7-19.
- Freudenthal, H., *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren* (deel I). Utrecht: OW&OC, 1984.
- Freudenthal., Het is niet alles botertje tot 'De Rekenboom'. *Willem Bartjens*, 1985, 4, 88-92.
- Gagné, R. M., *The conditions of learning*. London: Holt, Rinehart en Winston, 1965.
- Gagné, R. M. & Briggs, L. J., *Principles of instructional design*. London: Holt, Rinehart en Winston, 1974.
- Gal'perin, P. J., Stages in the development of mental acts. In: M. Cole & J. Maltzman (Eds.), *Handbook of contemporary soviet psychology*. London: Basis Books, 1969, 149-173.
- Gal'perin, P. J. & N. F. Talysina, Die Bildung erster geometrischer Begriffe auf der Grundlage organisierter Handlungen der Schüler. In: P. J. Gal'perin e.a. (Eds.), *Probleme der Lerntheorie*. Berlin: Volk und Wissen, 1974, 106-129.
- Gelder, L. van, *Grondslagen van de rekendidactiek*. Groningen: Wolters, 1964.
- Hoeve, A. van der, Ph. Kohnstamm & G. van Veen, *Over leesrekenopgaven en hun didactische en diagnostische waarde*. Groningen: Wolters, 1937.
- Klerk, L. F. W. de, Verslag van het AERA-Congres 1982 te New York *Pedagogische Studiën*, 1982, 59, 519-521.
- Lakatos, I., *Proofs and Refutations. The logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press, 1977.
- Lesh, R. & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press, 1983.
- Menninger, K., *Zahlwort und Ziffer*. Göttingen: 1958, band II.
- Nelissen, J. M. C., Een onderwijsontwikkelingsproject in analyse. *Pedagogische Studiën*, 1983, 60, 497-510.
- Oers, B. van, Davydov over begrippen in het onderwijs. In: J. Haenen en B. van Oers (red.), *Begrippen in het onderwijs. De theorie van Da-*

- vydov. Amsterdam: Pegasus, 1983, 111-160.
- Rengerink, J., *De staartdeling: een geïntegreerde aanpak volgens het principe van de progressieve schematisering*. Utrecht: OW&OC, 1983.
- Resnick, L. B., Task Analysis in Instructional Design: Some Cases from Mathematics. In: D. Klahr (Ed.), *Cognition and Instruction* New York: John Wiley & Sons, 1976, 51-81.
- Resnick, L. B. & W. Ford, *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1981, 136-156.
- Resnick, L. B., Syntax and Semantics in learning to Subtract. In: T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1982, 136-156.
- Schoenfeld, A. H., The wild, wild, wild, wild world of problem-solving: a review of sorts. *For the learning of Mathematics*, 1983, 3, 40-47.
- Streefland, L., *Makro-structurele verkenningen voor het wiskundeonderwijs*. Utrecht: IOWO, 1980.
- Treffers, A. (Ed.), *Cijferend vermenigvuldigen en delen. Overzicht en achtergronden*. Utrecht: IOWO, 1979.
- Treffers, A., Basialgoritmen in het wiskundeonderwijs op de basisschool. *Pedagogische Studiën*, 1982, 59, 471-483.
- Treffers, A., Mathematisch-didactische stromingen en onderzoek van wiskunde-onderwijs, In: P. G. Vos, K. Koster en J. Kingma (red.), *Rekenen. Balans van standpunten in theorievorming en empirisch onderzoek*. Lisse: Swets & Zeitlinger, 1984, 21-49.
- Treffers, A., Hoeveelheidsgetal en maat - Davydov in 'De Rekenboom'. In: E. de Moor (red.), *Reken-wiskundeonderwijs anno 1984*. Utrecht: SOL en OW&OC, 1985, 23-34.
- Treffers, A. & F. Groffree, Rational Analysis of Realistic Mathematics Education. In: L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2), Utrecht: OW&OC, 1985, 97-123.
- Wertheimer, M., *Productive thinking* (enlarged version) New York: Harper & Row, 1959.
- Wolters, M. e.a., *Experimentele leergang algebra voor de eerste en tweede klassen*. Utrecht: I.P.A.W. z.j.

Curriculum vitae

A. Treffers studeerde wiskunde en onderwijskunde, was eerst werkzaam in het voortgezette onderwijs, vervolgens in de periode 1971-1981 medewerker van het Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO), en is vanaf 1 januari 1981 verbonden aan de vakgroep Onderzoek Wiskunde Onderwijs en Onderwijs Computercentrum (OW & OC, subfaculteit wiskunde, Rijksuniversiteit Utrecht).

Hij promoveerde in 1978 op het proefschrift 'Wiskobas doelgericht', over de inhoud en beschrijvingswijze van de doelstellingen van het wiskundeonderwijs op de basisschool volgens Wiskobas (waarvan een handelsuitgave in de Duitse taal en de Engelse taal is verschenen).

Adres: Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs & Computercentrum Rijksuniversiteit Utrecht, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht.

Manuscript aanvaard 25-6-'85

Summary

Treffers, A. 'Analysing and developing mathematics (arithmetic) instruction from two basic conceptions'. *Pedagogische Studiën*, 1986, 63, 14-25.

The crucial problem dealt with is whether general learning and teaching theories as such can function as construction theories. That of Gal'perin is tested by the development of courses in long division, and it is shown that based on such a theory fundamentally different courses can be developed.

It appears that all what matters with a view on the factually developed instruction, is the specific basic conception of mathematics and mathematics education rather than the general learning-teaching theory. Such basic conception can globally lead to approaches which are, or are not, patterned on the systematics of the subject matter to be taught.

The best known method of analysis, arisen from general learning-teaching theories, are of the first kind. Our plea is in favour of the second kind: more latitude for methods of analysis, which are not patterned on the subject matter systematics, and where, rather than a prefabricated subject, mathematics is viewed as a human activity. Such a fundamental mathematical-didactical analysis should include a historical component, a description of informal procedures developed by children in the domain under consideration, and the various possibilities to pass from the stage of informal methods to that of the formal ones.