

Onderzoek van onderwijsleerprocessen en onderwijspraktijk

Een exemplarische bespreking met betrekking tot het aanvankelijk wiskunde-onderwijs

E. DE CORTE &
L. VERSCHAFFEL*

Katholieke Universiteit Leuven

Samenvatting

In deze bijdrage worden een aantal bevindingen uit het recent cognitief psychologisch onderzoek op het gebied van het aanvankelijk rekenen samengebracht, die voor de onderwijspraktijk relevant en bruikbaar kunnen zijn. De volgende vijf punten worden achtereenvolgens toegelicht en geïllustreerd aan de hand van resultaten van onderzoek verricht in de Verenigde Staten en te Leuven: 1. de mathematische meer-vaardigheden van jonge kinderen; 2. diversiteit en inventie in oplossingswegen; 3. systematiek in fouten; 4. de huidige rekendidactiek als oorzaak van fouten en 5. een verbeterde didactiek ter bevordering van het wiskundig denken. Op het einde worden een aantal problemen gesignaleerd die rijzen wanneer practici zich op de besproken onderwijspsychologische onderzoekingen en rapporten willen baseren om hun onderwijspraktijk te optimaliseren.

1 Inleiding

Een veel gehoorde kritiek in de jaren zestig en zeventig op de wetenschappelijke psychologie in het Westen is dat zij niet of nauwelijks in staat is om de onderwijspraktijk met haar inzichten te bevruchten. Dit laatste is in zekere zin niet altijd het geval geweest. Zo bestond er in het begin van deze eeuw een zeer actieve wisselwerking tussen de psychologie enerzijds en de studie en de praktijk van het onderwijs anderzijds (zie Glaser, 1978; De Corte, 1980). Dit kwam o.m. tot uiting in het werk van vooraanstaande onderzoekers als Thorndike en Dewey. Recent heeft de cognitieve revolutie in

de westerse psychologie en met name de 'information-processing approach' van de cognitie indirect geleid tot een hernieuwde aandacht van de psychologen voor leerprocessen in reële onderwijssituaties. Immers, doordat men de organisatie van de informatie in het menselijk cognitief systeem als centraal onderzoeksobject neemt, wordt in het speurwerk meer en meer gebruik gemaakt van complexe taken uit semantisch rijke domeinen, die nauw verwant zijn met schoolrelevante opgaven en problemen (De Corte, 1980, p. 256).

De hernieuwde aandacht van de kant van de onderzoekers vormt evenwel nog helemaal geen garantie dat hun begrippen en resultaten ook werkelijk voor de praktijk bruikbaar zijn en naar deze praktijk doorstromen. In onderhavig artikel proberen wij daartoe exemplarisch een concrete bijdrage te leveren door enkele relevante bevindingen naar voren te brengen uit het recent onderzoek van het leren probleemoplossen bij wiskundige taken door leerlingen uit de basisschool. Een grotere vertrouwdheid van practici met deze bevindingen kan o.i. de aanvankelijke rekendidactiek ten goede komen. Dit standpunt vloeit voort uit onze opvatting dat de recente vernieuwingen van het wiskunde-onderwijs in de basisschool heel wat meer vruchten zouden opleveren, wanneer men zich nietzijdig op verbetering van de leerinhoud richt, maar parallel daarmee de (aspirant-) leerkrachten tracht uit te rusten met bruikbare kennis over de cognitieve processen die bij het leren van wiskundige begrippen en vaardigheden in werking (moeten) treden. Het is precies op dit terrein dat de hedendaagse onderwijspsychologie heel wat te bieden heeft.

In deze bijdrage wordt geenszins een volledig overzicht betracht van het wetenschappelijk onderzoek met betrekking tot het aanvankelijk rekenen dat in het kader van de informatieverwerkingsbenadering is verricht. Wij beperken ons tot vijf bevindingen die een vrij rechtstreekse praktijkrelevantie hebben. Bij elk van deze punten zullen wij kort verwijzen naar een aantal interessante studies en daarnaast meer uitvoerige illustraties geven uit ei-

* L. Verschaffel is aspirant-navorser bij het Nationaal Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek.

gen onderzoeken op het gebied van het (le-
ren) probleemoplossen met betrekking tot
aanvankelijke formule- en redactie-opgaven
over optellen en aftrekken. In een eerste studie
hebben wij een kwalitatieve analyse doorge-
voerd van de oplossingsprocessen van jonge
kinderen bij aanvankelijke formule-opgaven
en werd in een daaropvolgend construerend
onderzoek gepoogd de vastgestelde moeij-
heden bij het oplossen van deze rekenopgaven
weg te werken (zie De Corte & Verschaffel,
1980a & b; 1981). In een andere studie, die
een meer longitudinaal karakter had, gingen
wij op zoek naar de oplossingsvaardigheden en
-processen van jonge kinderen bij eenvoudige
schoolvraagstukjes en naar de ontwikkeling die
deze vaardigheden en processen doormaken
(mede) ten gevolge van de introductie van deze
kinderen in het formeel rekenonderwijs (zie
De Corte & Verschaffel, 1982a, b, c).

Wij besluiten deze bijdrage met een korte
evaluatie van het besproken speurwerk vanuit
het standpunt van de praktijkrelevantie.

2 De mathematische meer-vaardigheden van jonge kinderen

Een verkeerde, eenzijdige of oppervlakkige
interpretatie van de tot voor kort dominerende
psychologische theorieën – nl. het behavio-
risme en de theorie van Piaget – is er mede de
oorzaak van, dat in het verleden de mathema-
tische capaciteiten van kinderen op de drempel
van het lager onderwijs al te vaak onderschat
werden. Uitgaande van de behavioristische
grondstelling dat de ontwikkeling voortschrijdt
ten gevolge van specifieke leerervaringen, werd
aangenomen dat het brein van kinderen die
nog niet of nauwelijks met 'mathematische sti-
muli' geconfronteerd werden, op dit punt als
een 'tabula rasa' te beschouwen is en dat door
de leerkracht derhalve van de grond af aan
begonnen moest worden (zie Ginsburg, 1977,
p. 63). In de vulgariserende literatuur rond de
ontwikkelingstheorie van Piaget werd vooral
aandacht besteed aan datgene wat kinderen,
die het concreet-operationele stadium nog niet
bereikt hebben, niet aankunnen. Er werd
daarbij niet gewezen op de eigenaardige, posi-
tieve kwaliteiten van het kinderlijke denken in
dit ontwikkelingsstadium. Bij Gelman & Gal-
listel (1978, p. 2-3) vinden wij een samenvat-
ting van het beeld dat in deze literatuur over

kinderen beneden de leeftijdsgrens van 6 à 8
jaar opgehangen wordt: zij kunnen nog niet
classificeren, seriëren, conserveren; zij zijn
egocentrisch en niet in staat tot reversibel den-
ken; hun denken wordt primair geleid door de
waarneming in plaats van door logische princi-
pes; hun denken verloopt voornamelijk asso-
ciatief; enz. Kortom, 'the definition of how the
younger child differs from the older is given in
terms of the capacity the younger child lacks'
(Gelman & Gallistel, 1978, p. 3).

Recente constaterende onderzoeken opge-
gezet in het kader van de informatieverwer-
kingsbenadering om een beter zicht te krijgen
op de probleemoplossingsvaardigheden van
jonge kinderen en de wijze waarop deze zich
ontwikkelen, suggereren nu precies het tegen-
deel, nl. 'that children know more about ma-
thematics than they are given credit for' (Sha-
velson, 1981, p. 30). In goede overzichten van
de capaciteiten van jonge kinderen op dit ge-
bied komt o.a. tot uiting: 1. dat de meeste
kleuters behoorlijk kunnen tellen en hun in-
formele telvaardigheden kunnen aanwenden
om allerhande concrete, kwantitatieve pro-
bleempjes het hoofd te bieden en 2. dat zij
vaak op z'n minst impliciete, intuïtieve noties
hebben van de essentiële principes die aan het
getalbegrip en de operaties optelling en aftrek-
king ten grondslag liggen (zie Ginsburg, 1975;
Gelman & Gallistel, 1978; Carpenter, 1979).

Er dient aan toegevoegd te worden dat psy-
chologen die een dergelijke 'positieve' kijk
hebben op de wiskundige mogelijkheden van
jonge kinderen nochtans geenszins de ogen
sluiten voor de vroegere onderzoeksresultaten
waaruit een minder optimistisch beeld te
voorschijn kwam. Zij wijzen deze bevindingen
niet af, maar plaatsen ze in een juist daglicht
door aan te tonen dat de zwakke prestaties van
de kinderen in deze klassieke studies eigenlijk
het rechtstreeks gevolg waren van de instructies
waarmee de opdrachten ingeleid werden, de
criteria die bij de evaluatie gehanteerd werden,
de aard van het materiaal dat in de toetsen
gebruikt werd en de context waarin de kinde-
ren met de problemen geconfronteerd werden.
Illustratief zijn bijvoorbeeld de originele on-
derzoeken van Donaldson (1978). Deze
auteur toonde aan dat kinderen, die op basis
van klassieke Piagetiaanse proeven als ego-
centrische denkers of als non-conserveerders
geklasseerd zouden worden, er in slagen om
taken, die isomorf zijn aan de klassieke proe-

ven maar in een meer zinvolle en vertrouwde context aangeboden worden, wél tot een goed einde te brengen. Zij besloot derhalve dat vele kinderen falen op klassieke Piaget-opdrachten, niet omwille van gebrekkige denkstructuren inherent aan hun niveau van cognitieve ontwikkeling, maar wel omdat zij in voor hen niet begrijpelijke en weinig uitdagende probleemsituaties geplaatst worden. In dezelfde richting wijzen de resultaten van onze analyse van de foutieve oplossingen van een aantal beginnende eersteklassertjes op klassieke schoolvraagstukjes zoals de volgende opgaven 1 en 2. (zie De Corte & Verschaffel, 1982b en c).

Opgave 1

Piet had drie appels.
An gaf Piet vijf appels
bij.
Hoeveel appels heeft
Piet nu?

Opgave 2

Piet had wat appels.
Piet gaf An drie appels.
Nu heeft Piet nog vijf
appels.
Hoeveel appels had Piet
eerst?

Een niet onbelangrijk aantal beginnende eersteklassertjes faalde ook hier omdat zij onvertrouwd waren met dit vreemdsoortig opgavetype. Zo bleken sommige kinderen in de knoei te raken omdat zij niet op de hoogte waren van welbepaalde afspraken en veronderstellingen, die niet expliciet in de opgavetekst vermeld staan maar wél gekend moeten zijn om het vraagstukje tot een goed einde te brengen.

Ilse slaagde er maar niet in opgave 1 op te lossen. De reden daarvoor komt duidelijk tot uiting in onderstaand uittreksel uit het protocol van Ilse¹.

Protocol 1

- I. : Wacht, Ilse. Ik ga het vraagstukje nogmaals lezen. Telkens wanneer ik een zinnetje gelezen heb, moet jij proberen het te spelen met de poppen en de blokken: Piet had drie appels.
Ll. : (Zij neemt drie blokken en legt die neer naast de pop die Piet voorstelt).
I. : An gaf Piet vijf appels bij.
Ll. : Dat gaat niet!
I. : Waarom gaat dat niet?
Ll. : Omdat An geen appels heeft.
I. : Wel, geef haar maar een hele hoop appels.

Anderen faalden omdat zij de bedoeling van vraagstukken niet doorhadden: van de 17 kinderen die opgave 2 aangeboden kregen gaf één

leerling als antwoord 'wat appels', een ander 'een paar' en nog een ander 'een beetje'. Dit is niet zo verwonderlijk, want nergens in de tekst staat expliciet vermeld dat het antwoord een preciese getalsaanduiding moet bevatten. Dát behoort tot de kennis van redactie-opgaven en van de bedoeling ervan in het aanvankelijk rekenonderwijs, waarover meer competente probleemoplossers beschikken. Overigens, zowel Ilse bij opgave 1 als de drie kinderen bij opgave 2 slaagden er in het vraagstukje correct te beantwoorden, nadat de interviewer de impliciete veronderstellingen toegelicht had.

Deze bevindingen suggereren dat klassieke redactie-opgaven, wanneer zij zonder voorafgaande introductie en zonder bijzondere aandacht voor de presentatie- en formuleringswijze aan jonge kinderen voorgelegd worden, soms foutief opgelost worden, niet omdat de jonge kinderen de nodige mathematische vaardigheden missen, maar gewoon omdat zij niet weten wat vraagstukjes eigenlijk zijn, wat ze onderscheidt van verhaaltjes of raadsels, hoe ze opgebouwd zijn en aangepakt kunnen worden, welke afspraken en regels gerespecteerd moeten worden wanneer het 'spel der vraagstukken' gespeeld wordt (De Corte & Verschaffel, 1982c). Overigens zijn de resultaten uit de studies van Donaldson (1978) en De Corte & Verschaffel (1982b en c) niet in strijd met de stelling dat jonge kinderen heel wat meer kennen en kunnen dan traditioneel wordt aangenomen. Wel dient op basis van deze resultaten daaraan de conditie toegevoegd te worden dat de context waarin hun mathematische vaardigheden nagegaan worden door hen als zinvol en uitdagend beleefd moet worden. Met deze bevindingen dienen practici in belangrijke mate rekening te houden, wanneer zij opgaven selecteren en opstellen om de mathematische capaciteiten van jonge kinderen te bevorderen en te evalueren.

3 Diversiteit en inventie in oplossingswegen

Een belangrijk kenmerk van de informatieverwerkingsbenadering is dat men zich niet beperkt tot de studie van de uitwendige prestaties, maar tracht door te dringen tot de cognitieve structuren en de interne processen die daaraan ten grondslag liggen (De Corte, 1980, p. 256). Uit de onderzoekingen waarin getracht wordt deze structuren en processen te achterhalen,

komen inzake het oplossen van rekentaken bij kinderen o.m. volgende belangrijke conclusies naar voren: 1. correcte antwoorden op wiskundige problemen komen op zeer verschillende manieren tot stand; 2. vele, misschien wel de meeste van deze oplossingswegen werden nooit door de leerkracht expliciet onderwezen en zijn zelfs voor velen onder hen volkomen onbekend.

Wat het eerste punt betreft worden in verscheidene studies overzichten gegeven van de grote variatie in oplossingswegen waarmee jonge kinderen formule-opgaven (zie Ginsburg, 1977; De Corte & Verschaffel, 1980) en redactie-opgaven (zie Carpenter & Moser, 1982; De Corte & Verschaffel, 1982a) tot een goed einde brengen. Wat bijvoorbeeld redactie-opgaven betreft blijkt uit laatstgenoemde studies, dat eersteklassertjes via totaal verschillende wegen het correct antwoord vinden op vergelijkingsopgaven zoals 'Piet heeft drie appels. An heeft acht appels. Hoeveel appels heeft An meer dan Piet?' Sommigen deden dit door middel van het opstellen en het uitrekenen van de formule-opgave ' $8 - 3 = .$ ' of ' $3 + . = 8$ '; anderen begonnen op hun vingers te tellen van drie tot acht en gaven het aantal keer dat één werd bijgeteld als antwoord op het vraagstukje; nog anderen legden eerst een rij van drie blokken en daar recht tegenover een rij van acht blokken en telden vervolgens het aantal blokken uit de grootste rij dat geen corresponderende blok in de kleinste rij had. Carpenter & Moser (1982) hebben een classificatieschema ontwikkeld voor de oplossingsprocessen bij aanvankelijke rekenvraagstukjes, dat vijf verschillende optel- en negen diverse aftrekstrategieën bevat.

Het is nu van belang erop te wijzen dat verscheidene strategieën die bij jonge kinderen aangetroffen worden, niet als dusdanig door de leerkracht onderwezen werden, maar door de leerling(en) a.h.w. zelf ontdekt zijn. Tot deze conclusie kwamen o.a. onderzoekers die de oplossingsprocessen van jonge kinderen bij eenvoudige rekenopgaven op het spoor trachten te komen door middel van de techniek van chronometrische analyse (Groen & Parkman, 1972; Groen & Poll, 1973; Woods, Resnick & Groen, 1975). Deze techniek komt erop neer dat men vooraf diverse oplossingsmodellen opstelt en voor alle aan te bieden opgaven oplossingstijden voorspelt op basis van het aantal stappen dat volgens elk model

nodig is om het antwoord te bereiken. Na afname van de opgaven bij groepen proefpersonen wordt via regressie-analyse nagegaan welk hypothetisch model het best de geobserveerde oplossingstijden voorspelt (zie De Corte, 1980, p. 262). Uit het onderzoek van Groen & Poll (1973) bijvoorbeeld bleek dat indirecte optellingen van het type $a + . = b$ het meest frequent aangepakt worden door middel van de volgende vrij complexe doch erg efficiënte strategie: wanneer a kleiner is dan $b - a$ wordt het grootste van de twee getallen met het kleinste verminderd; is a daarentegen groter dan $b - a$, dan wordt vanaf het kleinste getal doorgeteld totdat het grootste bereikt is en wordt het aantal bijgetelde eenheden als antwoord gegeven. M.a.w. deze onderzoekers stelden vast dat de meeste onderzochte kinderen uit de aanvangsklassen van het basisonderwijs een strategie volgen, waarmee opgaven zoals $2 + . = 7$ opgelost werden door het grootste met het kleinste getal te verminderen, en opgaven zoals $6 + . = 9$ door van het kleinste naar het grootste getal door te tellen. De auteurs beschikken over aanwijzingen dat deze oplossingsstrategie nooit expliciet aan de onderzochte leerlingen onderwezen werd.

In onze studie met formule-opgaven werd niet met chronometrische analyse gewerkt, maar vooral met het individueel interview. Concreet komt deze methode hierop neer: terwijl het kind een bepaalde taak uitvoert, stelt de onderzoeker procesgerichte vragen en biedt hij diagnostische deeltaken aan over kritische aspecten van de opgave. Deze techniek vertoont gelijkenis met het klinisch interview zoals dit door Piaget aangewend werd, maar verschilt daarvan in die zin dat het sterker gestructureerd verloopt (De Corte, 1980, p. 257). Met deze techniek kwamen wij nog een andere strategie om indirecte opgaven van het type $a \pm . = b$ en $\pm b = a$ op te lossen op het spoor. Deze strategie, die wij de methode van het 'verstandig uitproberen' genoemd hebben (De Corte & Verschaffel, 1980a, p. 392), verloopt als volgt: de leerling maakt een schatting van het getal dat op de plaats van het puntje staat; vervolgens controleert hij of de vergelijking die aldus ontstaat, klopt en op basis daarvan maakt hij (eventueel) een nieuwe schatting. Dit proces wordt herhaald totdat het correcte getal gevonden is. Ter illustratie beschrijven wij kort het oplossingsproces van een eersteklasser bij de opgave $17 = . + 13$. Eerst

probeerde hij met 6. Hij rekende $6 + 13$ uit en kwam 19. Op basis van dit resultaat besloot hij $5 + 13$ uit te rekenen. Hij vond 18. Onmiddellijk daarop gaf hij de juiste oplossing van de rekenopgave, nl. 4. Hij zei: 'Als ik vijf invul is de uitkomst nog te groot, namelijk achttien in plaats van zeventien. Dus moet ik het getal invullen dat één kleiner is dan vijf. Uit gesprekken met de leerkrachten van de onderzochte kinderen bleek dat deze omslachtige doch ingenieuze werkwijze door geen enkele leerkracht expliciet onderwezen werd. De meesten onder hen bleken zelfs van het bestaan ervan niet op de hoogte te zijn.

Samenvattend kunnen wij stellen dat kinderen rekenopgaven vaak correct oplossen volgens een grote verscheidenheid aan procedures en strategieën die veelal niet overeenstemmen met deze die onderwezen werden. De aangetroffen procedures zijn vaak aanpassingen en transformaties door de leerlingen zelf van oorspronkelijk aangeleerde werkwijzen, die door hen als gemakkelijker en efficiënter beleefd worden. Resnick (1976, p. 66) schrijft in dit verband: 'These experiments suggest that what we teach to children and how they perform a relatively short time after instruction are not identical neither are they unrelated. They suggest that children seek simplifying procedures that lead them to construct or invent more efficient routines that might be quite difficult to teach directly'. De conclusie voor de leerkrachten hieruit is o.i. niet dat zij een dergelijke „wildgroei” aan individuele strategieën moeten beschouwen als een mislukking om de leer- en oplossingsprocessen van hun leerlingen onder controle te houden. Wel moeten zij zich van het bestaan van deze verscheidenheid bewust worden en zij moeten zich inspannen om de concrete diversiteit aan strategieën in hun klas te achterhalen. Bij het opsporen en interpreteren van de verschillende werkwijzen kunnen zij trouwens adequaat gebruik maken van de technieken die in het kader van het recent onderwijs-psychologisch onderzoek ontwikkeld werden, zoals bijv. het individueel interview.

4 Systematiek in fouten

De procesgerichte oriëntatie in de cognitieve psychologie heeft ook tot een andere kijk op fouten geleid. Net zoals dit voor correcte ant-

woorden het geval is, gaat men ervan uit dat fouten niet 'zomaar of lukraak' tot stand komen maar dat zij integendeel een begrijpelijk karakter hebben: d.w.z. een fout is het gevolg van een intelligibel denkproces dat opgespoord kan worden en waarin aangeduid kan worden welke stap of beslissing voor het foutief antwoord verantwoordelijk was. Een ander kenmerk van fouten hangt daarmee samen, nl. hun systematisch of regelmatig karakter: als éénmaal de oplossingsstrategie die tot een foutief antwoord geleid heeft, ontdekt en precies omschreven is, kan met vrij grote zekerheid voorspeld worden welke andere opgaven door de leerling wél en welke niet correct beantwoord zullen worden en – in het laatste geval – welk foutief antwoord zal gegeven worden. In deze zin kan men een fout vergelijken met de 'output' van een lopend computerprogramma waarin een 'bug' is binnengeslopen (Brown & Burton, 1978; Brown & Van Lehn, 1982; De Corte & Verschaffel, 1982d)². Recente studies over fouten van leerlingen bij wiskundige problemen tonen aan dat het een erg tijdrovende en moeizame bezigheid is om tot een gedetailleerde procesmatige beschrijving van een fout te komen. Van de andere kant blijkt evenwel dat men daar vrij goed in slaagt en dat de resultaten erg lonend kunnen zijn in didactisch perspectief. Voor overzichten van procesmatige beschrijvingen van fouten van basisschoolleerlingen bij eenvoudige en complexere formule-opgaven verwijzen wij naar Brown & Burton (1978), Resnick (1980) en De Corte & Verschaffel (1980a). Descripties van fouten bij aanvankelijke redactieopgaven zijn te vinden in Carpenter & Moser (1982), De Corte & Verschaffel (1982b) en Riley, Greeno & Heller (1983). Op één van de daarin beschreven foutentypen – nl. het antwoorden met één van de getallen uit de opgave – gaan we hieronder uitvoeriger in. In onze studie boden wij beginnende eersteklascertjes o.a. de volgende twee vergelijkingsopgaven aan:

<i>Opgave 3</i>	<i>Opgave 4</i>
Piet heeft drie appels.	Piet heeft drie appels.
An heeft zes appels	An heeft wat meer app-
meer dan Piet.	pels dan Piet.
Hoeveel appels heeft	An heeft acht appels.
An?	Hoeveel appels heeft
	An meer dan Piet?

Bij de analyse van de antwoorden stelden wij vast dat opgave 3 en 4 resp. slechts door 4 en

door 6 van de 30 leerlingen correct beantwoord werden. Bijna alle andere kinderen losten opgave 3 met het getal '6' op, terwijl opgave 4 door de helft van de kinderen met '8' beantwoord werd. Wij ontdekten dat aan dit soort fouten bij de leerlingen een precies te omschrijven misvatting van de opgavesituatie ten grondslag ligt, die als rechtstreeks en noodzakelijk gevolg heeft dat één van de getallen uit de opgavetekst als antwoord gegeven wordt. Tom was één van de kinderen die voor de eerste opgave '6' als antwoord gaf. We laten nu een stukje uit het interview met Tom volgen en geven daarna onze interpretatie van dit soort fouten.

Protocol 2

- I. : Piet heeft drie appels. An heeft zes appels meer dan Piet. Hoeveel appels heeft An? Vertel eens het vraagstukje.
- Ll. : Zes (na 1 seconde)
- I. : Kun je eerst eens het verhaaltje vertellen.
- Ll. : Piet heeft drie appels. An heeft er meer dan Piet. Zij heeft er zes . . .
- I. : En 't vraagje? Hoeveel . . .
- Ll. : Hoeveel . . .
- I. : Ik zal het vraagstukje nogmaals lezen en nu mag je 't oplossen: Piet heeft drie appels. An heeft zes appels meer dan Piet. Hoeveel appels heeft An?
- Ll. : Zes (na 2 seconden)
- I. : Hoe heb je dat gedaan?
- Ll. : -
- I. : Heb je gerekend?
- Ll. : Neen
- I. : Waarom niet?
- Ll. : Omdat gij het gewoon gezegd hebt.
- I. : Ha zo. Toon eens met de poppen en de blokken hoe jij dat weet.
- Ll. : (Neemt zes blokken en legt die bij An en neemt drie blokken en legt die bij Piet)

Uit de manier waarop Tom de opgave navertelt blijkt dat hij de tweede zin uit de opgavetekst opsplijt in twee gescheiden informatie-elementen: 1. An heeft meer appels dan Piet én 2. An heeft zes appels. Twee andere feiten uit het protocol wijzen in dezelfde richting. In tegenstelling tot de overige opgaven gaf Tom hier zeer snel het antwoord zonder enige vorm van tel- of rekenactiviteit; hij wist het antwoord onmiddellijk omdat het volgens hem in de opgavetekst zelf gegeven was ('omdat gij het gewoon gezegd hebt'). Daarnaast is ook de wijze waarop Tom de opgave naspeelt indicatief: hij

legt gewoon 6 blokken bij de pop die An voorstelt. In de protocollen van verscheidene andere leerlingen die dezelfde fout(en) maakten vonden we soortgelijke aanwijzingen. Deze vaststellingen verlenen steun aan de volgende interpretatie van dit soort fouten. Leerlingen geven deze verkeerde antwoorden, omdat zij de complexe relatie 'meer dan' niet begrijpen of althans anders begrijpen dan volwassenen. Zij vatten zinnen van het type 'persoon x heeft a dingen meer dan persoon y' als volgt op: 'persoon x heeft a dingen' én 'persoon x heeft meer dingen dan persoon y'. Indien deze interpretatie juist is, dan hoeft het ons geenszins te verwonderen dat deze leerlingen '6' antwoorden op vraagstukje 3. Immers, in de voorstelling die zij van het vraagstukje gemaakt hebben, moet het antwoord op de vraag (nl. 'hoeveel appels heeft An?') niet gezocht of berekend worden, want het staat a.h.w. letterlijk in de opgave, - of beter gezegd, in de opgavetekst zoals zij die begrepen hebben (nl. 'An heeft zes appels'). Op analoge wijze kan het foutief antwoord '8' op opgave 4 verklaard worden.

Nog meer steun voor deze interpretatie vonden wij tijdens het interview met Eva, die het vraagstukje 3 ook met '6' beantwoordde. Vanuit de hypothese over de oorzaak van de fout week de interviewer enigszins af van het normale verloop van het individuele interview en bood haar de volgende opgave aan: 'Piet heeft 6 appels. An heeft 3 appels meer dan Piet. Hoeveel appels heeft An?'. Als de gestelde hypothese klopt, dan kan voorspeld worden dat in dit geval de interne probleemrepresentatie van het meisje twee tegenstrijdige informatie-elementen zal bevatten, nl. 1. dat An 3 appels heeft én 2. dat die 3 appels meer zijn dan de 6 van Piet. Eva reageerde precies zoals vanuit de hypothese te verwachten viel. Nadat zij het vraagstukje gehoord had, riep zij uit: 'Dat kan toch niet! Want An heeft er maar drie'.

Uit de hier gerapporteerde gegevens kunnen wij concluderen dat het recent onderwijspsychologisch onderzoek heel wat materiaal heeft opgeleverd dat voor de practicus rechtstreeks van nut kan zijn. Wij denken hier niet alleen aan de procesmatige beschrijvingen van de wijze waarop allerhande fouten op rekenopgaven tot stand komen, maar evenzeer aan de technieken die door de onderwijspsychologen gebruikt worden om daarachter te komen, inzonderheid het individueel interview.

Een belangrijke implicatie van de bevindingen

gen omtrent de systematiek van de fouten van leerlingen is ook dat het kunnen opsporen en identificeren van begrijpelijke en regelmatige patronen in ogenschijnlijk bizarre en lukraak tot stand gekomen (reeksen) antwoorden, een complexe vaardigheid is, die van cruciale betekenis is wil de leerkracht op een verantwoorde wijze terugkoppeling geven aan een leerling en/of remediërend onderwijs opzetten. Vele leerkrachten krijgen deze vaardigheid nooit of – na veel ervaring – pas laat in het leven. Eén van de redenen daarvoor is dat aan deze vaardigheid in het kader van de lerarenopleiding onvoldoende aandacht wordt besteed. In de toekomst zou dat verholpen moeten worden. In dit verband zou de (micro)-computer nuttig kunnen aangewend worden. Brown & Burton (1978) bijvoorbeeld ontwikkelden een computerprogramma, waarmee leerlingen met inadequate oplossingsstrategieën bij aftrekopgaven, alsook de onderwijs-situatie, waarin de leerkracht hun inadequate strategieën tracht te ontdekken en te interpreteren, gesimuleerd kunnen worden. Uit hun onderzoekingen is gebleken dat aspirant-leerkrachten, die slechts enkele uren met dit programma werkten, een grotere vaardigheid in het diagnosticeren van rekenfouten verworven hadden en – wat minstens even belangrijk is – een positievere houding tegenover leerlingen met rekenmoeilijkheden gekregen hadden.

5 De huidige rekendidactiek als oorzaak van fouten

In de voorafgaande paragraaf hebben wij aange- toond dat ook aan foutieve oplossingen op wiskundige problemen veelal begrijpelijke en systematische doch inadequate strategieën ten grondslag liggen. De vraag die zich nu opdringt is: waar komen dergelijke inadequate strategieën vandaan? Volgens Resnick (1980, p. 221) zijn ze – net zoals vele adequate oplossingsmethoden – als inventies te beschouwen: m.n. systematische doch in dit geval verkeerde procedures die de kinderen zelf ontwikkeld hebben. Meteen kunnen wij de vorige vraag verder specificeren, n.l. welke factoren bepalen of een leerling een adequate, nastrevenswaardige oplossingsmethode zal ontwikkelen, dan wel een min of meer ongewenste, inadequate strategie zal ontwerpen? Eveneens volgens Resnick is dit enerzijds afhankelijk van indivi-

duële verschillen in leervermogen tussen de leerlingen (1976, p. 78) en anderzijds van het gegeven onderwijs (1980).

Hierbij aansluitend kan erop gewezen worden dat verschillende onderzoekers die de oplossingsprocessen van jonge kinderen bij mathematische problemen bestudeerd hebben, alsook de ontwikkeling van deze processen onder invloed van het onderwijs, bepaalde misvattingen en foutieve procedures die zij bij deze kinderen ontdekt hebben, rechtstreeks in verband brengen met tekortkomingen of eenzijdigheden in de traditionele rekendidactiek.

Zo werd in meerdere studie vastgesteld, dat heel wat kinderen uit de aanvangsklassen van de basisschool moeilijkheden hebben met formule-opgaven, omdat zij een onvolwaardig of zelfs een verkeerd begrip van het is-gelijk-aanteken hebben (De Corte & Verschaffel, 1980b, p. 438; Barody & Ginsburg, 1982, p.1.). Barody & Ginsburg (1982, p.1) drukken het als volgt uit: de kinderen vatten het =-teken op als een 'operator symbol' en niet als een 'relational symbol'. Samen met deze onderzoekers menen wij dat deze misvatting het gevolg is van de wijze waarop het gelijkheidsteken aan de leerlingen bijgebracht werd, inzonderheid aan het formalistische, levensvreemd karakter en de stereotiepe opbouw van de opgaven aan de hand waarvan deze kinderen het begrip opgebouwd hebben.

Ook met betrekking tot redactie-opgaven wijzen verschillende onderzoekers op de aanwezigheid van inadequate strategieën, die volgens hen rechtstreeks in verband gebracht kunnen worden met specifieke kenmerken van het rekenonderwijs. Een typisch voorbeeld is de z.g. sleutelwoordstrategie (zie Neshar & Teubal, 1975; Wolters, 1978; De Corte & Verschaffel, 1982a). Deze strategie werd aangetroffen bij leerlingen die reeds enige tijd formeel rekenonderwijs achter de rug hadden en derhalve reeds expliciet instructie gekregen hadden in het leren oplossen van schoolvraagstukjes. De sleutelwoordstrategie komt hierop neer. In plaats van de opgave eerst grondig te analyseren en zich vervolgens te bezinnen op de relaties tussen de bekende en de onbekende elementen, wordt als volgt te werk gegaan: De leerling werpt een vluchtige, oppervlakkige blik op de opgavetekst, stelt daarna een bewerking op met de getallen uit de tekst en berekent de uitkomst ervan. Of er een optelling dan wel een aftrekking gekozen wordt, hangt af van het

sleutelwoord dat in de opgavetekst voorkomt. Wanneer woordjes als 'samen', 'meer' of 'bij' daar deel van uitmaken, wordt door de leerling een som met de twee gegeven getallen gemaakt. Komen daarentegen woorden als 'minder', 'af' en 'verliezen' voor, dan wordt voor een aftrekking gekozen en wordt het verschil tussen het grootste en het kleinste getal als antwoord op het vraagstuk gegeven. Deze sleutelwoordstrategie is nu vanuit het standpunt van de leerling een erg 'economische' werkwijze om tal van traditionele schoolvraagstukjes op te lossen. Tot wat dit kan leiden bekijken we even voor de onderstaande opgaven 5 en 6.

Opgave 5

Piet heeft drie appels.
An heeft zes appels.
Hoeveel appels hebben
Piet en An samen?

Opgave 6

Piet heeft drie appels.
An heeft ook wat appels.
Piet en An hebben samen negen appels.
Hoeveel appels heeft
An?

Bij opgave 5 bijvoorbeeld gaat men als volgt te werk: Men zoekt in de tekst de twee getallen, nl. 3 en 6, en men voert er de rekenoperatie mee uit die geassocieerd is met het sleutelwoord uit het vraagstukje; 'samen' dus optellen. Aldus verkrijgt men het correcte antwoord op het vraagstuk: $3 + 6 = 9$.

Leerlingen die deze eenvoudige sleutelwoordstrategie toepassen raken evenwel in de knoei wanneer men ze minder vertrouwde, complexere redactie-opgaven zoals opgave 6 aanbiedt. Die opgave wordt dan opgelost door eerst de twee getallen te zoeken, nl. 3 en 9, en vervolgens, steunend op het sleutelwoord 'samen', daarmee een rekensom te maken: $3 + 9 =$. De uitkomst daarvan wordt als antwoord op het vraagstukje gegeven: 12. In dit geval leidt de strategie dus tot een foutieve oplossing.

Volgens alle vermelde onderzoekers kan een dergelijke inadequate, oppervlakkige strategie enkel ontstaan en gedijen, wanneer de leerlingen in het aanvankelijke rekenonderwijs met een beperkt aantal soorten, stereotiep geformuleerde, levensvreemde redactie-opgaven geconfronteerd worden. Dit standpunt wordt onrechtstreeks gesteund door de bevinding dat men de sleutelwoordstrategie (en de fouten waartoe zij leidt) niet aantreft bij kinderen die het eerste leerjaar nog moeten aanvatten (zie

Carpenter & Moser, 1982; De Corte & Verschaffel, 1982c).

In het perspectief van de onderwijspraktijk ligt de volgende conclusie voor de hand. De keuze van de leertaken en opgaven en de wijze waarop de leerkracht ze aan de leerlingen aanbiedt, hebben een beslissende invloed op de conceptuele en procedurele kennis die de kinderen ontwikkelen en opbouwen. Pseudo-begrippen en oppervlakkige procedures danken vaak hun ontstaan aan onduidelijke, misleidende omschrijvingen en/of aan een eenzijdig, eng en stereotiep opgavenaanbod vanwege de leerkracht. Door gevarieerde problemen aan te bieden (bijvoorbeeld: ongewone formule-opgaven met overvloedige getalgegevens) kan het tot stand komen van dergelijke inadequate inventies voorkomen worden.

6 Het wiskundig denken kan bevorderd worden d.m.v. aangepast onderwijs

Tot voor kort gold als één van de belangrijkste kritieken op de 'information-processing approach' dat ze weliswaar een gedetailleerde beschrijving oplevert van tal van oplossingsprocessen bij diverse taken, maar dat zij nauwelijks in staat is duidelijke en verantwoorde richtlijnen te verschaffen om het onderwijs te optimaliseren. Stilaan komt daarin verandering, niet alleen vanwege het feit dat onderwijspsychologen met schoolrelevante taken werken, maar ook doordat in het kader van de informatieverwerkingsbenadering het verichten van onderwijsexperimenten ('teaching experiments') meer en meer als een valide onderzoeksstrategie erkend wordt (De Corte, 1980, p. 265). Met dergelijke construerende studies streeft men zowel een theoretisch als een praktisch doel na. Indien het gegeven experimenteel onderwijs, gebaseerd op een theorie of een model van het optimaal oplossingsproces, gunstige resultaten oplevert, in die zin dat de betreffende leerlingen achteraf beter problemen kunnen oplossen dan voordien, dan wordt dit beschouwd als een indicatie voor de realiteit van de hypothetische processen uit de theorie. De principes die aan de basis liggen van zo'n effectief experimenteel programma kunnen dan tevens richtinggevend zijn om de onderwijspraktijk op het betreffende domein te verbeteren.

Ter illustratie kan hier verwezen worden naar een onderzoek van Pellegrino & Schadler (1976; zie ook De Corte 1980, p. 266), waarin het hypothetische oplossingsmodel van Resnick & Glaser (1976) bij z.g. inventieproblemen getoetst werd. In deze studie slaagden Pellegrino & Schadler erin doelmanalyse – één van de componenten uit genoemd model – te stimuleren bij leerlingen van het vijfde leerjaar.

Andere voorbeelden van onderwijsexperimenten die rechtstreeks relevant zijn voor het domein van het (aanvankelijk) rekenen zijn: het onderzoek van Barody & Ginsburg (1982), waarin getracht wordt leerlingen een volwaardig begrip van het is-gelijk-aan-teken bij te brengen; een studie van De Corte & Somers (1981), waarin het schatten als een heuristiek wordt aangeleerd; een experiment van Lindvall, Tamburino & Robinson (1982), waarin het effect nagegaan wordt van het aanleren van specifieke probleemoplossingsstrategieën op de vaardigheid in het oplossen van aanvankelijke redactie-opgaven; een studie van De Corte & Verschaffel (1980b), waarin een experimenteel programma voor het leren oplossen van aanvankelijke formule-opgaven bij 6 à 8-jarige kinderen toegepast werd. Op de laatstgenoemde twee studies gaan we hieronder kort in.

Uitgangspunt van de studie van Lindvall, Tamburino & Robinson (1982) is de theoretische vraag in hoeverre het typisch is voor competente probleemoplossers, dat zij eerst een globale, kwalitatieve representatie van de opgave opbouwen alvorens de vereiste wiskundige operaties te selecteren en uit te voeren. Door de onderzoekers werd een experimentele leergang van 22 lessen ontwikkeld en toegepast bij een groep eersteklassertjes. Aan de kinderen werd geleerd redactie-opgaven te analyseren door de essentiële componenten en hun onderlinge relaties te schematiseren of te modelleren. Uit de analyse van de resultaten op de voor-, de na- en de transfertoets bleek: '1 that primary grade children can master the modeling ability; 2 that having this ability increases a student's performance in problem solution, and 3 that this ability has some transfer value' (Lindvall, Tamburino & Robinson, 1982, p. 10). Deze bevindingen zijn niet enkel van theoretisch belang. Zij wijzen tevens op de potentiële waarde van de leergang en het materiaal dat erin gebruikt werd voor de aanvankelijke rekendidactiek.

Het door ons uitgevoerde onderwijsexperiment met aanvankelijke formule-opgaven volgde op een constaterend onderzoek, waaruit bleek dat jonge basisschoolleerlingen heel wat fouten maken op minder vertrouwde opgavetypes (zoals $. = a \pm b$; $. \pm a = b$ en $a \pm b = c \pm .$). Wij onderstelden dat deze fouten niet het noodzakelijk gevolg waren van het ontwikkelingsstadium waarin de onderzochte kinderen zich bevonden, maar integendeel toe te schrijven waren aan belangrijke tekortkomingen in het rekenonderwijs. Meer concreet ontbrak het deze kinderen – in vergelijking met competente probleemoplossers – aan de volgende kenniselementen: 1. een volwaardig en operationeel begrip van het is-gelijk-aan-teken; 2. een schema waarmee zij de relatie tussen de bekende en de onbekende kwantiteiten uit de formule-opgave op een zinvolle wijze konden uitdrukken (zoals het deel-g geheel-schema); en 3. de vaardigheid om de juistheid van een gegeven antwoord te controleren. Er werd een experimentele leergang opgesteld, gericht op de uitbreiding en de verbetering van het arsenaal beschikbare denkinhouden en -technieken bij de onderzochte kinderen in de voorvermelde zin. Deze leergang werd doorgevoerd in een tweede leerjaar. Een kwalitatieve en kwantitatieve analyse van de resultaten van de leerlingen uit de experimentele en de controlegroep op de voortoets en diverse natoetsen, wees op een duidelijk, blijvend en niet-specifiek effect van de leergang op de probleemoplossingsvaardigheden van de leerlingen. Deze resultaten leveren derhalve steun aan de hypothetische visie op inadequaat en adequaat oplossingsgedrag bij aanvankelijke formule-opgaven die aan het experimenteel programma ten grondslag ligt. Het onderzoek bevat evenwel tevens diverse principes en aanwijzingen die bruikbaar zijn in het kader van het aanvankelijk rekenonderwijs, inzonderheid ook in verband met het opzetten van remediëringsactiviteiten.

7 Besluit

Met deze bijdrage hebben wij geenszins beoogd om de problematische relatie tussen de wetenschappelijke (onderwijs)psychologie enerzijds en de praktijk van het onderwijs anderzijds volledig door te lichten. Ons terdege bewust van de beperktheden van deze aanpak,

hebben wij gepoogd op een exemplarische wijze aan te tonen dat recent onderwijspsychologisch onderzoek tal van inzichten en materiaal opgeleverd heeft die voor de onderwijspraktijk relevant en bruikbaar kunnen zijn. Voor het domein van het (aanvankelijk) rekenen hebben we aan de hand van onderzoek uitgevoerd in de Verenigde Staten en te Leuven achter-eenvolgens de volgende punten aan de orde gesteld: 1. de capaciteiten van jonge kinderen blijven vaak verborgen louter ten gevolge van de wijze waarop de opgaven aan de leerlingen aangeboden worden; 2. leerlingen lossen vaak problemen op door middel van procedures die niet als zodanig door de leerkracht onderwezen werden maar die ze zelf hebben ontworpen; 3. zoals correcte antwoorden komen ook fouten tot stand op een begrijpelijke en systematische wijze en deze systematiek kan achterhaald worden via kwalitatieve technieken zoals het individuele interview; 4. diverse onderzoekingen suggereren dat de traditionele rekendidactiek veelal de oorzaak is van het ontstaan en gedijen van inadequate oplossingsstrategieën bij de leerlingen en 5. onderwijs-experimenten tonen aan dat wijzigingen in die traditionele rekendidactiek een verbetering van de kwaliteit van het probleemoplossend denken bij de leerlingen tot gevolg heeft.

We besluiten deze bijdrage met een korte evaluatie van het soort studies waarnaar wij verwezen hebben vanuit het oogpunt van de praktijkrelevantie. Wij menen namelijk dat er een aantal problemen rijzen wanneer practici zich op de besproken onderwijspsychologische onderzoekingen en rapporten willen baseren om hun onderwijspraktijk te optimaliseren.

Een eerste probleem hangt samen met het feit dat de onderwijspsychologische studies die in het kader van de informatieverwerkingsbenadering tot stand gekomen zijn vooralsnog voornamelijk descriptief en constaterend van aard zijn. Dit contrasteert sterk met het psychologisch onderzoek in de Sovjetunie, waar construerende onderzoekingen veel frequenter voorkomen deels op ideologische gronden, deels vanuit de visie aldaar op de relatie tussen onderwijs en ontwikkeling (Van Parreren & Carpay, 1980; Vygotsky, 1978). Wij hebben vermeld dat op dit punt in het Westen recent wel een zekere verschuiving is opgetreden. Het materiaal uit de inmiddels verrichte studies is echter niet zo rechtstreeks in de praktijk bruik-

baar als met handboeken of curricula het geval is. De reden hiervoor is dat deze onderzoekers met hun onderwijsexperimenten in de eerste plaats een theoretische bedoeling hebben m.n. het toetsen van een hypothetisch leer- of oplossingsmodel. De bekommernis om een bijdrage te leveren tot de optimalisering van de onderwijspraktijk is slechts van secundair belang. Dit verklaart waarom de meeste Westerse studies in vergelijking met die uit de Sovjetunie: 1. een minder longitudinaal karakter hebben; 2. een veel beperkter inhoudelijk domein beslaan; 3. vaak opgesteld en uitgevoerd worden zonder intensieve medewerking van practici en vakspecialisten.

Een tweede probleem is hiermee meteen aan de orde gesteld. In het besproken speurwerk worden slechts beperkte facetten van het (aanvankelijk) rekenen onder de loep genomen, zowel wat het soort taken betreft als de invalshoek van de analyse betreft. Een dergelijke reductie lijkt in wetenschappelijk onderzoek welhaast onvermijdelijk. Maar de practicus kan zich zo'n beperkte en aspectuele benadering van het aanvankelijk rekenonderwijs en het kinderlijk denken niet permitteren. En hij staat er vooralsnog meestal alleen voor om de bevindingen en de suggesties uit de wetenschappelijke studies op hun praktische waarde te toetsen en ze te integreren tot een coherente en verantwoorde aanpak van het rekenonderricht als geheel.

Een derde probleem heeft te maken met de vorm waarin en de wijze waarop onderwijspsychologen rapport uitbrengen over hun activiteiten en bevindingen. De studies verschijnen in boeken en tijdschriften die haast uitsluitend onder collega's circuleren en zij zijn vaak opgesteld in een vakjargon dat door buitenstaanders slechts moeizaam verworven kan worden. In de rapporten wordt vaak precies aan die elementen die de practicus het meest interesseren (bijv. de opbouw van de toets of het experimentele programma) het minst aandacht besteed, terwijl voor hem minder relevante taken (bijv. de methodologie) uitvoerig behandeld worden. In dit verband achten wij het noodzakelijk dat onderwijspsychologen zich zouden inspannen om hun analyses van leer- en oplossingsprocessen bij schoolrelevante taken ook op een aangepaste wijze in praktijkgeoriënteerde publikaties naar voren te brengen.

Noten

1. De interviewer en de leerling worden resp. aangeduid met I en Ll.
2. De term 'bug' is afkomstig uit de computerwetenschappen waar hij gebruikt wordt om een fout in een computerprogramma aan te duiden (Brown & Burton, 1978, p. 161).

Literatuur

- Barody, A. J. & H. P. Ginsburg, *The effects of instruction on children's understanding of the 'equals' sign*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York, March 1982.
- Brown, J. S. & R. R. Burton, Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, 1978, 2, 155-192.
- Brown, J. S. & K. Van Lehn, Towards a generative theory of 'bugs'. In: T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds), *Addition and subtraction. A cognitive perspective*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum, 1982, p. 117-135.
- Carpenter, T. P., *Cognitive development research and mathematics education* (Theoretical paper nr. 73). Wisconsin, Wisconsin Research & Development Center for Individualized Schooling, 1979.
- Carpenter, T. P. & J. M. Moser, The development of addition and subtraction problem solving skills. In: T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum, 1982, p. 9-24.
- Case, R., Piaget and beyond: toward a developmentally based theory and technology of instruction. In: R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology. Vol. 1*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum, 1978, p. 167-228.
- Corte E. De, Cognitieve psychologie en onderzoek van onderwijsleerprocessen in de Verenigde Staten. In: *Gedrag, dynamische relatie en betekeniswereld. Liber Amicorum Prof. Dr. J. (R.) Nutin*. Leuven: Universitaire Pers Leuven, 1980, p. 255-283.
- Corte, E. De & R. Somers, Het schatten als heuristiek bij het oplossen van rekenopgaven. *Pedagogisch Tijdschrift/Forum voor Opvoedkunde*, 1981, 6, 351-361.
- Corte, E. De & L. Verschaffel, Kwalitatief-psychologische analyse van het oplossen van aanvankelijke rekenopgaven bij 6 à 8-jarige basisschoolleerlingen. *Pedagogische Studiën*, 1980a, 57, 383-396.
- Corte, E. De & L. Verschaffel, Een exploratief onderzoeksexperiment met aanvankelijke rekenopgaven bij 6 à 8-jarige kinderen. *Pedagogische Studiën*, 1980b, 57, 433-448.
- Corte, E. De & L. Verschaffel, Children's solution processes in elementary arithmetic problems: analysis and improvement. *Journal of Educational Psychology*, 1981, 73, 765-779.
- Corte, E. De & L. Verschaffel, Oplossingsprocessen van eersteklassers bij eenvoudige redactie-opgaven. In: E. De Corte (Ed.), *Onderzoek van onderwijsleerprocessen: Stromingen en actuele onderzoeksthema's. Bijdragen tot de Onderwijsresearchdagen 1981*. (SVO-reeks) 's Gravenhage: Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs, 1982a, p. 177-193.
- Corte, E. De & L. Verschaffel, *Representatieproblemen van jonge kinderen bij aanvankelijke redactie-opgaven*. Voordracht gehouden op het Belgisch-Nederlands Symposium over Onderzoek van Onderwijsleerprocessen, Leuven, 3 en 4 juni 1982b.
- Corte, E. De & L. Verschaffel, Eersteklassers en het spel der schoolvraagstukken. *Willem Bartjens*, 1981-82, 1, 112-117. (1982c)
- Corte, E. De & L. Verschaffel, Leren fouten diagnosticeren met behulp van de microcomputer. *Willem Bartjens*, 1982/1983, 2, 36-42. (1982d)
- Donaldson, M., *Children's minds*. Glasgow: William Collins, 1979 (2de druk).
- Gelman, R. & C. R. Gallistel, *The child's understanding of number*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1978.
- Ginsburg, H., Young children's informal knowledge of mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1975, 1, nr. 3, 63-156.
- Ginsburg, H., The psychology of arithmetic thinking. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1977, 1, nr. 4, 1-89.
- Glaser, R., Toward a psychology of instruction. In: R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology Vol. 1*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum, 1978, p. 1-12.
- Groen, G. J. & J. M. Parkman, A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review*, 1972, 79, 329-343.
- Groen, G. J. & M. Poll, Subtraction and the solution of open sentence problems. *Journal of Experimental Child Psychology*, 1973, 16, 292-302.
- Lindvall, C. M., J. L. Tamburino & L. Robinson, *An exploratory investigation of the effect of teaching primary grade children to use specific problem solving strategies in solving simple arithmetic story problems*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York, March 1982.
- Nesher, P. & E. Teubal, Verbal cues as an interfering factor in verbal problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 1974, 6, 41-51.
- Parreren, C. F. van & J. A. M. Carpay, *Sovjetpsychologen over onderwijs en cognitieve ontwikkeling*. (Leerpsychologie en onderwijs, 2.) Groningen: Wolters-Noordhoff, 1980 (tweede grondig bewerkte druk).
- Pellegrino, J. W. & M. Schadler, *Maximizing performance in a problem-solving task*. (Unpublished manuscript.) Pittsburg, Learning Research & Development Center, University of Pittsburgh, 1976.

- Resnick, L. B., Task analysis in instructional design: Some cases from mathematics. In: D. Klahr (Ed.), *Cognition and instruction*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum, 1976, p. 51-80.
- Resnick, L. B., The role of invention in the development of mathematical competence. In: R. Kluwe & H. Spade (Eds), *Developmental models of thinking*. New York: Academic Press, 1980, p. 213-244.
- Resnick, L. B. & R. Glaser, Problem solving and intelligence. In: L. B. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum, 1967, p. 205-230.
- Riley, M., J. Greeno & J. Heller, Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In: H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press, 1983.
- Shavelson, R. J., Teaching mathematics. Contributions of cognitive research. *Educational Psychologist*, 1981, 16, 23-44.
- Vygotsky, L. S., Mind in society. In: M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner & E. Souberman (Eds), *The development of higher psychological processes*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1978.
- Wolters, M. A. D., *Van rekenen naar algebra. Een ontwikkelingspsychologische analyse*. (Doctoraatsproefschrift). Utrecht: Rijksuniversiteit Utrecht, 1978.
- Woods, S. S., L. B. Resnick & G. J. Groen, An experimental test of five process models for subtraction. *Journal of Educational Psychology*, 1975, 67, 17-21.
- Curricula vitae*
- E. De Corte (1941), doctor in de pedagogische wetenschappen (1970), gewoon hoogleraar aan de K.U. Leuven in het Departement Pedagogische Wetenschappen, Afdeling Didactiek en Psychopedagogiek met als voornaamste onderwijsopdrachten pedagogische psychologie (bij pedagogiek- en psychologiestudenten) en didactiek (in de lerarenopleiding).
- Adres: Pedagogisch Instituut, Vesaliusstraat 2, B-3000 Leuven.
- L. Verschaffel (1957) behaalde in 1979 het diploma van licentiaat in de pedagogische wetenschappen aan de K.U. Leuven; sedertdien aspirant-navorsers van het Belgisch Nationaal Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek; bereidt aan de Afdeling Didactiek en Psychopedagogiek een doctoraat voor over (leren) probleemoplossend denken bij kinderen.
- Adres: Pedagogisch Instituut, Vesaliusstraat 2, B-3000 Leuven.
- Manuscript aanvaard 23-11-'82*