

Het PME (Psychology of Mathematics Education) Congres Antwerpen 1982*

Een impressie

Inleiding

Van 19 t/m 24 juli 1982 werd in Antwerpen op de campus van de U.I.A. (Universitaire Instelling Antwerpen) en de R.U.C.A. (Rijks Universitair Centrum Antwerpen) het zesde PME-congres gehouden. Evenals in voorgaande jaren overschreed het aantal deelnemers de honderd ruimschoots en kwamen zij uit meer dan een dozijn verschillende landen. Toch bedroeg het aantal deelnemers beduidend minder dan in 1981 toen een grote, Amerikaanse delegatie van onderzoekers present was (Wolters en Kemme, 1982). Nu echter was het aantal ingediende papers groter (resp. 60 en 84) evenals het aantal thema's

Door deze grote aantallen en de organisatie van de presentaties in telkens vier parallelsessies kunnen we niet meer geven dan een impressie. Daarbij zullen we soms genoodzaakt zijn te verwijzen naar de 'Proceedings', die ook nu weer vooraf beschikbaar waren (Vermandel (ed.), 1982). Ook de PME 1981 zullen we in onze beschouwingen betrekken. Enkele belangrijke aspecten van die conferentie waren:

- het streven naar een cognitieve theorie voor het wiskunde leren. Men plaatste accenten bij:
- de fasering in begripsvormingsprocessen, het inachtnemen van (spontane) noties die lerenden reeds van bepaalde wiskundige begrippen, operaties of structuren (kunnen)

* Met dank aan H. ter Heege, J. ter Pelle, E. van Rossum, A. van Streun en M. Wolters voor hun kritische kanttekeningen bij het verslag, waaraan deze kroniek mede werd ontleend.

hebben. De kwestie van de mathematisch-didactische analyse (kwesties als conceptuele samenhang en conceptuele complexiteit). Ook dit keer bevatte de conferentie elementen hiervan (Bell, 1982; Vergnaud, 1982);

- raadpleging van de historie van de wiskunde vooral ook met het oog op historische leerprocessen die de ontwikkeling van de wiskunde markeerden (Cornu, 1982);
- op het punt van de ontwikkeling van de kwalitatieve methoden van onderzoek werden eveneens vorderingen geboekt en gerapporteerd. Bijvoorbeeld de methode van 'mutual observation' waarin de proefpersoon als mede-observator bijdraagt aan een eerste validering van geobserveerde data (Streefland, 1982).

Er waren vier plenaire lezingen, die betrekking hadden op de PME: verleden, heden en toekomst (Skemp), wiskunde als menselijke creatie (Papy), het functioneren van de hersenen bij problemsolving en beschrijvingsmogelijkheden daarvoor (Kuijk) en over creatief denken in de wiskunde (Hilton).

De presentaties in de parallelsessies hadden betrekking op thema's als concept formation, problem-solving, language, proof and verification of truth, methods of teaching, etc.

Achter deze meer algemene kaders ging een veelheid van onderwerpen uit de wiskunde schuil, zoals limiet, functie, raaklijn, variabele, lineaire vergelijkingen, verhoudingen, tellen en getal, percentage, etc.

Bij een aanzienlijk deel van het gepresenteerde onderzoek werd de didactische component veronachtzaamd, impliciet gelaten of deze ontbrak zelfs volledig, zodat de relevantie ervan voor de onderwijspraktijk betwijfeld moet worden. De indruk kon gemakkelijk postvatten dat diverse onderzoekers gevlucht zijn in algemene theorieën en dat dus niet zozeer de verbetering van het wiskundeonderwijs (PME) als wel het opdoen van ervaring met de gevolgde onderzoeksmethoden hun hoofddoel was. Een dergelijke vlucht in methoden draagt ons inziens automatisch bij tot vergroting van de theorie-praktijk-kloof.

Het is daarom, dat in deze impressie de visiekwestie centraal zal staan, dat wil zeggen de visie op wiskunde-onderwijs die men bij de presentatie van onderzoek op dit gebied ons inziens *dient* te expliciteren, al was het alleen maar omdat er op dit punt geen eensgezindheid bestaat. Als leidraad voor onze impressie kiezen wij de plenaire lezing van prof. dr. Peter Hilton, getiteld: 'Creative thought in Mathematics'. We zullen daarbij zowel op Hiltons lezing zelf ingaan als op de bijdragen van anderen aan de conferentie.

Creative thought in Mathematics

Wat is wiskunde?

Hilton typeerde wiskunde als *dynamisch proces*, als een *activiteit*. En de taal van de wiskunde? Is die niet heel specifiek? Is wiskunde in feite geen bijzondere taal? Weliswaar sleept wiskunde als dynamisch proces een wiskundetaalontwikkeling met zich mee, maar deze brengt niet de essentie van de wiskunde als activiteit tot uitdrukking. De wiskundetaal is slechts 'a key aspect of the technics of mathematics'.

Interessant in verband met de wiskundetaal was de bijdrage van onze landgenoot Nederpelt (1982). Hij ging in op de signaalfunctie en -waarde van wiskundige taalelementen. Een psychologisch belangrijke kwestie, die Nederpelt belichtte, waren de conflicten die kunnen ontstaan tussen de betekenis van termen binnen een wiskundige en een niet-wiskundige context, of in verschillende wiskundige contexten. Dergelijke conflicten hebben dikwijls iets persoonlijks omdat ze voortkomen uit verschillende betekenissen, die het individu aan zekere terminologie binnen verschillende contexten toekent.

Het rekenen met (de ontwikkeling van) individuele noties, dient binnen een totaalvisie op wiskunde en wiskunde-onderwijs zeker mee te spelen. Het vormt een belangrijk onderdeel van een mathematisch-didactische analyse, die zich richt op macro-uitlijning en micro-uitwerking van het curriculum, omdat geobserveerde leerprocessen tot het te analyseren materiaal behoren.

Enkele kenmerken van wiskunde als dynamisch proces

Hilton ging vervolgens in op een aantal ken-

merken van de wiskundige activiteit. Hij typeerde achtereenvolgens:

- *abstraheren* als het modelleren van de realiteit, wat ook binnen de wiskunde zelf gebeurt (voortschrijdende abstractie) met het doel: 'to get higher keys of modelling';
- *generaliseren* als het werpen van nieuw licht op een speciaal geval teneinde dit onder te brengen in een wijder theoretisch verband. Tegenover de generalisatie staat de specialisatie. Hij lichtte een en ander toe met voorbeelden uit de historische ontwikkeling van de groepentheorie (voor geïnteresseerden, die dit na willen gaan: het betrof onder andere de stellingen van Fermat en Lagrange)¹;
- *unificeren*: het op dezelfde wiskundige noemer zetten. Bijvoorbeeld een axiomastelsel zoeken voor een complex van meetkundige verschijnselen. Dit kenmerk van de wiskundige bedrijvigheid 'has to do with the deeper immanent features of mathematics', aldus betoogde Hilton. Er is een zekere overlapping met generaliseren.

De wiskundige werkwijze veronderstelt een diepgaande analyse van het werk dat anderen reeds deden. Dit inspireerde tot nieuwe ontwikkelingen in de wiskunde. Lange perioden van 'deep thought' gaan vooraf aan een 'flash of inspiration'. Zonder dat harde, langdurige denkwerk kom je zeker niet tot nieuwe, respectievelijk verdiepte inzichten.

De beroepswiskundige heeft kennelijk zo'n lange termijn van investering, zo'n langlopend leerproces nodig om tot nieuwe of diepere inzichten te komen. Zou dat voor de leerlingen in het onderwijs niet evenzeer gelden? Ook met hen hebben we immers de bedoeling ze tot nieuwe of diepere inzichten omtrent bepaalde zaken te brengen?²

Hilton lichtte een en ander weer toe aan de ontwikkeling van de groepentheorie. Toen van de commutatieve groepen 'alles' bekend was, stimuleerde dit onderzoek van de nilpotente groepen. Kennis van de eindige groepen bevorderde het onderzoek van de compacte groepen. Dimensieproblemen in topologische groepen werden opnieuw gesteld in groepen van hogere dimensie (Poincaré).

De lezer(es) vraagt wellicht naar de zin van een dergelijke opsomming van voorbeelden uit de hogere wiskunde. De moraal is natuurlijk: het een brengt het ander voort.

Laten we een parallel trekken met de on-

derwijskundige en onderwijspsychologische kwestie van de leerstofsequentering. Terwijl vakdidactieken voor wis-, natuur- en scheikunde aarzelend van de grond beginnen te komen en nog nauwelijks als afzonderlijke wetenschappelijke disciplines erkend zijn (en die status (wellicht) ook nog niet verdienen), is er desondanks een vrij ruim bestand aan algemene literatuur voorhanden omtrent de macro-uitlijning van een curriculum (leerstofsequentering, sequenteringsdimensies, e.d.).

In de voortschrijding van de wiskunde als wetenschap worden (en werden) algemene cognitieve operaties als abstraheren, generaliseren en unificeren voltrokken aan wat a posteriori speciale gevallen van abstractere meer algemene structuren blijken te zijn.

In onderwijskunde en onderwijspsychologie meent men het buiten de eventuele sequentieringstheorieën van de vakdidactieken te kunnen stellen en los daarvan algemene 'theorieën' te kunnen postuleren. Dit nu zet de zaken op zijn kop. Als abstraheren etc. algemeen menselijke cognitieve operaties zijn, dan is het streven naar een algemene theorie van leerstofuitlijning tot mislukking gedoemd, omdat het materiaal genegeerd wordt, waarop de genoemde operaties voltrokken kunnen worden om tot zo'n theorie te komen.

In een bepaalde vernieuwingsstroom van het wiskundeonderwijs en ook in veel onderzoeken heeft men de neiging het harde voordenkwerk voor de leerlingen of proefpersonen over te slaan en maar plompverloren met iets te beginnen, dat historisch gezien een langdurig voorafgaand abstractieproces vergde³. Onderzoek dat zó wordt opgezet heeft weinig betekenis voor de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs en evenmin voor de ontwikkeling van een psychologische theorie voor het wiskunde leren.

Hilton hield zijn gehoor voor, dat veel van wat op elementair niveau aan wiskunde-onderwijs en -onderzoek gedaan wordt, niet gedaan zou moeten worden. Waar we mee bezig zijn is 'conservators' te produceren die anderhalf jaar na hun opleiding daaraan al niets meer hebben, vanwege de produktgerichtheid. Het onderwijs (en onderzoek) moet ingesteld zijn op verandering en de leerlingen leren daarmee om te springen.

Verandering als studie-object, gestimuleerd door voorafgaande studie van structuren (in verandering) brengt binnen de wiskunde

mensen op creatieve gedachten. Leerlingen en studenten dienen deze voortdurende veranderingen eveneens te ervaren volgens Hilton. Of dit nu bij groepstheoretische problemen is of bij de overgang van natuurlijke getallen naar breuken, of van het traditionele rekenen naar het gebruik van de rekenmachine en de zakcomputer, dat doet er niet toe.

De problemen verschillen, maar de werkwijze is steeds hetzelfde: systematische bewustwording van de dynamiek in wat reeds bekend is, inspireert tot het poneren van nieuwe problemen. Wiskunde is een proces, niet een aaneenschakeling van trucs. Het meest essentiële in het dynamisch proces is het zelf (kunnen) stellen van nieuwe problemen⁴.

Problem solving

Hilton waarschuwd in dit verband voor een gevaar in de problem solving-mode, namelijk het institutionaliseren van het feit dat het 'problem' steeds vooraf gegeven is, dat nog slechts 'gesolved' behoeft te worden door deze of gene.

Alle gepresenteerde onderzoeken over problem solving gingen inderdaad uit van de situatie: problem → solver → solution, waarbij de 'solver' in zijn oplossingsproces geobserveerd wordt.

De geboden problemen droegen steeds een geïsoleerd karakter. Een visie op het verband met het curriculum op welk niveau dan ook ontbrak. Wat wij bedoelen is problem solving inherent aan een op mathematisch-didactische gronden uitgelijnd curriculum of een belangrijke deelleergang daarbinnen⁵. Dan heeft men kans, dat leerlingen zelf problemen gaan stellen⁶.

De Duitser Meissner (1982) stelde zich in dit verband bescheiden op. Hij startte vanuit het niet weten. Wel legde hij de leerlingen de problemen voor – bij gebrek aan een beter begin – en registreerde hun oplossingsgedrag als eerste stap op weg naar het krijgen van enige noties omtrent problem solving. Deze erkenning van het noodzakelijke eigen leerproces ontbreekt nogal eens bij onderzoekers. Men zou kunnen tegenwerpen dat het zelf stellen van problemen door leerlingen tijdens hun leerprocessen in het onderwijs een utopie is. Laat dat zo zijn, maar daarmee is een opleiding tot 'conservator', zoals Hilton het noemde, nog niet gerechtvaardigd.

Tussenstand

Wiskunde als activiteit kenmerkt zich door voortschrijdende abstractie, door generalisatie en unificatie. Centraal staat het probleemoplossen waarbij problemen de uitlijning over langere termijn markeren. In het langlopende leerproces moet soms veel zwaar en hard werk gedaan worden, veel energie geïnvesteerd, die pas (veel) later soms uitkeert, met rente terugbetaalt in de vorm van nieuwe, eigen vondsten, niveauperhogingen, etc. Wiskunde als geheel van systemen, a posteriori geordend, vertoont een axiomatiche opbouw.

Het was verfrissend – en van psychologisch belang! – om van een wiskundige van formaat die Hilton is, te vernemen dat het voltrekken van wiskunde als dynamisch proces grof gezegd, meer te karakteriseren is met het bedrijven van empirische wetenschap.

Wiskunde Onderwijs

Onderzoek naar de psychologie van het wiskunde leren

De psychologie van het wiskunde leren is belangrijk, maar ook uitermate moeilijk, stelde Hilton. Men moet niet alleen psycholoog zijn, maar ook een diep inzicht hebben in de wiskunde als dynamisch proces. Het gaat er immers om de wezenskenmerken van wiskundige leerprocessen te achterhalen en te begrijpen.

Voor een elementair wiskundeprogramma betekent dit – zo bleek tijdens de discussie – dat men niet moet denken in afzonderlijke onderwerpen, doch veel meer vanuit de samenhang van verschijnselen. Het traditionele rekenen zou afgedaan moeten hebben, al was het alleen maar omdat de gesuggereerde precisie niet deugt. De waarde van het rekenen is – wat Hilton betreft – al decennia geleden tot beneden nul gereduceerd.

Voor Hilton blijft er dus voor psychologisch onderzoek naar het leren van wiskunde maar één visie overeind, namelijk de opvatting van wiskunde als activiteit, als dynamisch proces.

Hiervan zijn de meeste deelnemers en presentatoren aan de conferentie echter nog mijlenver verwijderd.

We zouden aan de gehele conferentie onrecht doen, wanneer we niet ook positieve geluiden lieten horen. Als tendens valt aan te merken de toenemende mate, waarin men rekening houdt

met de opvattingen, de noties van kinderen, waarmee ze in leerprocessen stappen en voortgaan⁷.

Jammer is echter, dat dit nog zo weinig gebeurt vanuit een visie op het wiskunde-onderwijs als geheel. Grondige, mathematisch-didactische analyse van het gebied waaruit men de taken put, in overeenstemming met deze visie, blijft achterwege, waardoor men voorbij gaat aan de bronnen van herkomst van die kinderlijke noties, de oorsprong van hun subjectieve begrippen. De gekozen inhoud wordt hierdoor geïsoleerd, men beschouwt wiskunde niet als dynamisch proces, en overaccentueert dikwijls de methoden, ook al zijn ze dan wat zachter van aard⁸.

De samenhang met het wiskunde-onderwijs als geheel van dergelijk onderzoek zal men tevergeefs zoeken. Het ontbreken van enige bezinning op de plaats van de inhoud in het onderzoek in het wijdere verband van de macro-uitlijning van het curriculum wordt dan tevens de voornaamste oorzaak voor het scheppen van de theorie-praktijk kloof.

Besluit

Samenvattend kunnen we stellen, dat voor het wiskunde-onderwijs en de mathematisch-didactisch theorievorming relevant onderzoek ons inziens impliceert respectievelijk dient te impliceren:

- een totaalvisie op wiskunde en wiskunde-onderwijs;
 - kennis van de historie en de ontwikkeling van de wiskunde als wetenschap;
 - kennis van de psychologische en leertheoretische componenten;
- en
- van de vakdidactische component in relatie met de onderwijspraktijk, dat wil zeggen het mathematisch-didactische analyseren van taken, met het oog op de macro-structurele samenhang met het curriculum.

*F. J. van den Brink
L. Streefland*

Noten

1. Van Hilton was geen schriftelijke bijdrage beschikbaar.

2. Illustratief hiervoor was de bijdrage van Fischbein en Kedem (1982) (veel leerlingen blijken geen notie te hebben van de betekenis van een formeel bewijs in de wiskunde, waarom en hoe het moet worden geleverd) en van Vinner (1982).
3. Een voorbeeld hiervan bevat de bijdrage van Greer (1982). Op grond van louter willekeur wordt de groepsstructuur afgedwongen aan de 'groep' (rood, geel), waarbij – gespeend van elk gevoel voor realiteit – een menging van rood met rood ten behoeve van het gehoorzamen aan de wiskundige structuur, als geel wordt geïnterpreteerd. Dit is schijnwiskunde, afgedwongen aan valse concretisering.
4. Hilton gaf niet aan, hoe zijn visie in wiskundeonderwijs zou moeten worden vertaald. Een ander punt van kritiek dat men kan hebben is, dat zijn terminologie (abstraheren, generaliseren, unificeren) reeds bij Polya aangetroffen wordt.
5. Zie bijvoorbeeld Streefland (1982) of Van den Brink (1982).
6. Zie bijvoorbeeld Dekker, Ter Heege, Treffers, (z.j.).
7. Zie in dit verband De Corte, Verschaffel, Verschueren (1982).
8. Ter illustratie noemen we als extreem voorbeeld het onderzoek van Heink, Lehnert en Reitberger (1982), waarvan het hoofddoel exercitie met 'nommetric multidimensional scaling' lijkt te zijn geweest.

Literatuur

- Dekker, A. H. ter Heege en A. Treffers, *Cijferend vernenigvuldigen en delen volgens Wiskobas*. Publikatie nr 1 in de reeks: 'Onderzoek Wiskunde-Onderwijs'. Utrecht z.j. (uitgegeven in 1982).
- Streefland, L., *PME 5 Grenoble '81 Nieuwe Wis-krant*, 1982, 2, 38-42.

Wolters, M. A. D. en S. Kemme, *Kroniek. Het PME-congres 1981, Pedagogische Studiën*, 59 (3), 148-151.

- Uit: A. Vermandel (Ed.), 'Proceedings of the sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education' Antwerpen, 1982, werden de volgende artikelen geraadpleegd:
- Bell, A., *Teaching theories in Mathematics*, Vol. I, 207-214.
- Brink, F. J. van den, *Children's counting*. Vol. I, 174-180.
- Cornu, B., *Etude d'une sequence didactique à propos de la notion de limite*. Vol. I, 8-12.
- Corte, E. de, L. Verschaffel en J. Verschueren, *First graders' solution processes in elementary problems*. Vol. I, 91-97.
- Fischbein, E. en J. Kedem, *Proof and certitude in the development of mathematical thinking*. Vol. I, 128-132.
- Greer, B., *Recent studies in Structural Learning*. Vol. I, 97-103.
- Heink, G., U. Lehnert en W. Reitberger, *Dimensions of difficulty in solving geometrical problems*. Vol. I, 74-80.
- Meissner, H., *How do students proceed in problem-solving*. Vol. I, 80-85.
- Nederpelt, R., *The signal value of words in mathematical phrasing*. Vol. I, 108-112.
- Streefland, L., *The role of rough estimation in learning ratio and proportion, an exploratory research*. Vol. I, 193-200.
- Vergnaud, G., *Cognitive Psychology and Didactics: Signified/Signifier and Problems of Reference*. Vol. II, 70-76.
- Vinner, S., *Conflicts between definitions and intuitions – the case of the tangent*. Vol. I, 24-29.

Manuscript aanvaard 26-4-'83