Cijferen in het rekenonderwijs van toen en nu

A. TREFFERS
Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs & Onderwijs Computercentrum, R. U. Utrecht

Samenvatting

We beginnen onze beschouwing over het leren van de algoritmen voor de basisoperaties – hier kortweg cijferen te noemen – met een karakterisering van het aloude cijferonderwijs volgens Bartjens. Daarna schetsen we de algemene kenmerken van het traditionele cijferonderwijs zoals zich dat tot voor kort algemeen en tot heden voor een belangrijk deel in het rekenonderwijs op de basisschool manifesteerde. Als belangrijkste kenmerken worden genoemd: de 'logische' leerstofordening volgens het principe van de toenemende complicering, het direkt toewerken naar de eindvormen van de algoritmen per deelgeval, de korte inzichtelijke verklaring van de cijferhandelingen en het ontbreken van positiemateriaal in de vorm van blokken of een abacus. Voorts analyseren we de belangrijkste en meest significante Nederlandse leerboeken uit de periode 1920-1970 op het punt van het cijferen, en doen daarna hetzelfde met de rekendidactiekboeken. Er blijkt een grote discrepantie tussen de vakdidactische aanbevelingen en de vigerende onderwijspraktijk te bestaan. Vervolgens wordt het onderzoek op het gebied van het traditionele cijferen besproken. Tenslotte geven we het traditionele cijferonderwijs wat meer reliëf door het tegen de achtergrond van nieuwe ontwikkelingen van het wiskunde-onderwijs op de basisschool te beschouwen, en vatten onze bevindingen per saldo in tien punten samen.

1 *Historische aanloop*

Het cijferend rekenen op schrift kwam pas in de zestiende eeuw in zwang. Voor die tijd werden allerlei rekentafels gebruikt om berekeningen uit te voeren. De cijferalgoritmen voor de basisoperaties hadden toentertijd nog niet de thans gangbare standaardvormen gekregen. Met name van de vermenigvuldig- en deelalgoritmen bestonden in de late middeleeuwen diverse vormen (Menninger, 1958). In de beroemde 'Cijferinghe' van Willem Bartjens (1607) en de talloze bewerkingen van 'De vernieuwde Cijfferinge' treft men voorbeelden hiervan aan.

Met Bartjens is tevens de schrijver van het meest gebruikte rekenboek van de 17e en 18e eeuw genoemd[1]. Het rekenonderwijs volgens de methode Bartjens was sterk routine-matig gekleurd. Wat het cijferen aangaat, komt deze mechanistische aanpak in een volslagen 'blinde' methode van algoritmiseren tot uitdrukking: 'de verscheydene regelen der rekenkunst' worden zonder nadere verklaring verstrekt en ingeoefend.

Dat gaat dan voor het delen als volgt:

'Divisio, is delen, en leert hoe veel maal een getal is gehouden in een groter, te weten: of men begeerde te zien, hoe menigmaal 6 men hebben kan in 96, zo steld de 6 onder d'eerste letter of beeld, dat is onder 9, en zegt, hoe veel maal 6 in 9? Antw. eens: want eens 6 is 6, van 9 rest 3 die steld boven de 6, en zet weder 6 onder de twede letter, te weten onder 6, en zegt hoe veel maal 6 in 36? Antw. 6 maal: want 6 maal 6 is 36, die trekt van 36 rest 0, als by 't navolgende voorbeeld blykt.

1. Divideert 96 door 6.

$$\begin{array}{l}3\\9/6\\6\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}3\\9\\6\end{array}}\right\}\ \overset{\text{komt}}{1} \qquad\qquad \begin{array}{l}3\\9\ 6\\6\ 6\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}3\\9\\6\end{array}}\right\}\ \overset{\text{komt}}{16}$$

2. Divideert 5780 door 3.

$$\left.\begin{array}{l}2\quad 2/2\\5\ 7\ 8\ 0\\3\ 3\ 3\ 3\end{array}\right\}\ 1926$$

. . . .'

'11. Divideert 943 door 43 komt 21, en rest 40. Om dit te doen, zo stelt het getal, 't welk te delen is, in order, en voegt den deelder daar voor onder, beziet dan hoe veel maal 't eerste beeld begrepen is in zyn boven gestelde letter, dat is hoe veel maal 4 in 9? zo schryft 2 agter de streep, en zegt 2 maal 4 is 8, getrokken van 9, rest 1, die zet boven 9, en strykt 9 deur; en zegt 2 maal 3 is 6; van 14 getrokken, blyft 8, en strykt 14 en 3 mede deur: voorts stelt wederom nieuwe 43 tot divisoor, te weten 4 onder, en de 3 naast de deurgehaalde 3, werkende zo voorts tot het einde toe.

'11. Divideert 943 door 43.

```
             komt
   /4    )
 1 8/0   |
 9 4 3   }   21
 4 3 3   |
   4     )
```

. . . .' (Bartjens 1744, p. 6-7)

Vooral in het laatste voorbeeld komt het louter trucmatige van de algoritme duidelijk tot uiting.

Pas in de 19e eeuw begint schuchter een vernieuwing van het rekenonderwijs. Het zijn met name de ideeën van Pestalozzi, Herbart en Grube die het rekenonderwijs langzaam wijzigen. Bij het cijferen komt wat meer aandacht voor hoofdrekenen, soms zelfs zozeer dat het cijferen erdoor naar de achtergrond gedrongen wordt. Ook komt hier en daar meer nadruk op een inzichtelijke verklaring van de algoritmehandelingen. We zeggen 'hier en daar' omdat het rekenonderwijs in Nederland ook in de 19e eeuw in hoofdzaak mechanistisch van inslag blijft (Leen, 1961).

In het begin van deze eeuw krijgt de cijferdidactiek zijn bekende 'traditionele' gedaante van een min of meer inzichtelijk verklaarde introductie van de cijfer-algoritmen met daarbinnen een min of meer aanzienlijke plaats voor het hoofdrekenen. We bepalen ons in het volgende tot een kenschets van dat traditionele cijferen, al zij hier nadrukkelijk vermeld dat vanaf omstreeks 1960 verschillende alternatieven voor het leren cijferen ontwikkeld zijn welke thans vaste voet krijgen in het onderwijs. Aan het einde van dit artikel zullen we een korte impressie van deze alternatieven geven.

2 *Algemene kenmerken van het gangbare onderwijs in cijferen*

2.1 *Voortschrijdende complicering*

Het leren van algoritmen voor de basisoperaties – hier kortweg cijferen genoemd – vindt voornamelijk in de leerjaren 3, 4 en 5 van de basisschool plaats. In de meeste traditionele rekenprogramma's wordt in de middenbouw ongeveer de helft van de totaal beschikbare tijd voor rekenen aan het specifieke cijferen besteed, dus aan het maken van optel-, aftrek-, vermenigvuldig- en deelsommen 'onder elkaar' van het type:

```
3751      8157      7827      37 / 3071\
1834      4988       231
----- +   ----- −   ----- ×
```

Typerend voor de verschillende traditionele cijferleergangen is allereerst de ordening ervan naar rekenkundige complexiteit. Daarbij wordt verondersteld dat de moeilijkheidsgraad van de opgaven afhangt van:

- de grootte van de getallen;
- het aantal inwissel- of leenhandelingen dat bij de bewerkingen verricht moet worden;
- de verschillende posities die de nul kan innemen;
- de vereiste rekenvaardigheden welke aan een correcte uitvoering van de rekenoperaties ten grondslag liggen.

Met de genoemde variabelen kunnen, afhankelijk van de accentueringen die men wil aanbrengen, verschillende leergangen uitgezet worden. Al deze didactische lijnen hebben echter gemeen dat ze beginnen met kleine getallen waarmee bij het opereren geen of weinig inwissel- en leenhandelingen plaatsvinden, waarin geen nullen op 'tussenposities' voorkomen en waarvoor slechts eenvoudige basisvaardigheden vereist zijn, en dat ze eindigen met opgaven van grote getallen, veel inwissel- en leenhandelingen, met nullen op verschillende posities in de getallen en een ruim arsenaal aan benodigde basisvaardigheden.

2.2 *Standaard-algoritmen per geval*

Ten tweede valt bij de traditionele aanpak van het cijferen op, dat iedere stap in de steeds complexer wordende leergang definitief wordt afgewikkeld. Eerst behandelt de onderwijsgevende één bepaald type opgaven volledig en pas als dit soort sommen snel en volgens de standaard-algoritme door de leerlingen uitgevoerd kan worden, zet men de volgende stap in de leergang en zo verder tot tenslotte de kinderen de betreffende algoritme geheel beheersen, dus hem in principe correct kunnen uitvoeren voor alle mogelijke getallen. 'Correct' wil in dit verband dan zeggen dat zowel de procedurehandelingen als het 'technische' rekenwerk op een juiste wijze worden verricht.

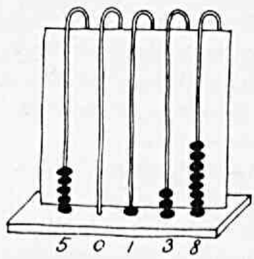
Tot zover is er nog geen sprake van een belangrijk onderscheid met de methode Bartjens, zij het dat de opbouw qua complicering en afwerking per geval in de nieuwe rekenmethoden wat meer is verfijnd. Maar dit is een verschil in nuance en niet in fundamenteel opzicht. Bij het volgende punt is er echter wel degelijk sprake van een principieel onderscheid, of liever gezegd van een aanzet daartoe.

2.3 *Korte inzichtelijke verklaring bij de introductie*
We doelen hier op de poging om bij de introductie van de leergang de procedurehandelingen voor het cijferen inzichtelijk te verklaren. Dit houdt in, dat enige aandacht besteed wordt aan de kenmerken van het positiesysteem als grondslag voor de schrijfwijze van getallen en als vormgever van de procedurehandelingen – iets wat in het aloude mechanistisch opgezette rekenonderwijs werd nagelaten. De onderwijsgevende maakt daarbij in z'n uitleg gebruik van inwisselmateriaal ontleend aan grootheden als geld, gewicht en lengtematen. In het geheel van het cijferonderwijs neemt het inzichtelijke werken echter slechts een ondergeschikte plaats in van, zeg, enkele lessen aan het begin van de leergang. We kunnen het ook als volgt formuleren: de inzichtelijke verklaring van het cijferen dient bij het traditionele rekenen in het algemeen meer als rechtvaardiging voor de onderwijsgevende dan dat het als richtsnoer voor de lerende kan dienen bij het uitvoeren van de cijferhandelingen. Vandaar dat we zojuist spraken van een áánzet tot een principiële verandering . . .

2.4 *Min of meer geïsoleerd cijferprogramma*
Het vierde kenmerk betreft de relatie tussen het cijferen en het oefenen van de basisvaardigheden, plastisch aangeduid als 'de tafels' van de vier hoofdbewerkingen. Kenmerkend nu voor het traditionele cijferprogramma is, dat de voortgezette oefening van de basisvaardigheden veelal geheel in het cijferprogramma opgenomen is. Weliswaar ligt de start van het oefenen van de tafels ruimschoots voor de aanvang van het cijferen, maar de voortgang en voltooiing van dit oefenen verloopt meestal volledig binnen het cijferprogramma. Dat wil zeggen: in de praktijk van het cijferonderwijs worden vanaf omstreeks het einde van het derde leerjaar de basisvaardigheden veelal niet meer apart geoefend en evenmin wordt dan nog systematisch nagegaan of de 'basis facts' wel volledig beheerst worden, hoewel er ook enkele methoden zijn waarin het hoofdrekenen ook na de eerste fase van het cijferprogramma een zeer belangrijke rol blijft spelen. Het cijferen krijgt er aldus vaak een functie bij, namelijk van het inoefenen en onderhouden van de basisvaardigheden, naast de eigenlijke functie van het inslijpen van de procedurehandelingen van het cijferen op zich.

2.5 *Afwezigheid van de abacus e.d.*
Tenslotte een kenmerk dat slechts in negatieve zin geformuleerd kan worden: het ontbreken van de abacus en ander 'positiemateriaal' in de vorm van blokken e.d. De afwezigheid van de abacus in enigerlei vorm is daarom zo opvallend, omdat dit rekenraam in de historische ontwikkeling van het rekenen juist van fundamentele betekenis geweest is en vooral ook omdat de didactische mogelijkheden ervan aanzienlijk lijken (Streefland, 1979).

Een voorbeeld van een abacus is de zogenaamde lusabacus, een rekenwerktuig met vijf staven, en op iedere staaf twintig kralen, verdeeld in twee groepjes van tien die van kleur verschillen (De Jong, 1977).

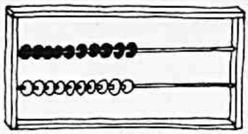


Figuur 1 *De lus-abacus*

De waarde van de kralen wordt bepaald door de positie van de staven: de rechterstaaf bevat de eenheden, links ervan staan de tientallen, dan volgen de honderdtallen enz. Het positiesysteem is in dit rekenraam als het ware gematerialiseerd, waardoor de kinderen in staat gesteld worden de inwissel- en leenhandelingen bij respectievelijk het optellen en aftrekken eerst handtastelijk en later mentaal uit te voeren.

Welnu, in plaats van de lusabacus werd in de vorige eeuw, vermoedelijk als gevolg van een verkeerde interpretatie van de Russische abacus, het telraam in West-Europa geïntroduceerd. Weliswaar lijkt een telraam oppervlakkig gezien wel wat op een abacus, maar het verschilt er qua structuur toch wezenlijk van, omdat het geen positiewaarde kent: alle kralen tellen voor eenheden.

Om die reden is het telraam niet te gebruiken bij het cijferen, al kan het uiteraard wel bij het



Figuur 2 *Het telraam*

ondersteunen van het optellen en aftrekken 'onder de 20' dienst doen.

Pas in de jaren zeventig wordt in Nederland de aandacht op de didactische mogelijkheden van de abacus gevestigd – het Montessori-onderwijs uitgezonderd, waarin de abacus al veel eerder een belangrijke functie bij het cijferonderwijs vervulde[2].

3 *Cijferonderwijs in een keur van traditionele rekenmethoden*

Allereerst worden wat nuanceringen van het zojuist beschreven algemene beeld geschetst. We doen dit aan de hand van drie invloedrijke methoden die samen de periode 1920-1970 bestrijken, te weten van:

- Bouman en Van Zelm (1918).
- Diels en Nauta (1936).
- Reynders en Snijders (1959).

Daarna worden twee methoden besproken die als uitersten fungeren op de schaal van 'blind' naar 'inzichtelijk' leren cijferen, namelijk:

- 'Naar aanleg en tempo' (Lugtmeijer en Boers, 1954).
- 'Boeiend Rekenen' (Wanders en Bohncke, 1960).

Gevoegd bij de eerder beschreven algemene karakteristiek geven deze 'lengte-doorsnede' in de tijd en 'dwarsdoorsnede' naar de mate van inzichtelijkheid tezamen een getrouw beeld van het totale spectrum van het traditionele cijferonderwijs.

Voor de goede orde vermelden we dat we dit beeld vooral zullen oproepen door het geven van voorbeelden. Om reden van overzichtelijkheid wordt de nadruk daarbij op de delingsalgoritme gelegd. En we mogen dit doen, omdat de vier basisalgoritmen veelal een consistent geheel vormen en volgens hetzelfde stramien aangeleerd worden. Dit betekent dat een lange staartdeling vrijwel altijd voorafgegaan wordt door een 'lang' vermenigvuldigalgoritme, of een 'korte' aftrekking door een 'korte' optelling. Vandaar dat een enkel voorbeeld een goed beeld van het geheel kan geven.

3.1 *Bouman en Van Zelm*

Tussen de wereldoorlogen werd het rekenonderwijs in Nederland grotendeels bepaald door 'Bouman en Van Zelm'. Deze methode kenmerkt zich door zijn eindeloze rijen vraagstukken, zijn grote reeks van zogenoemde denksommen, zijn onaanschouwelijkheid en zijn strakke methodische opbouw, ondersteund door een uitgebreide handleiding. Het laatstgenoemde komt bij het cijferen als volgt tot uitdrukking: de leergangen worden nauwkeurig getraceerd door een opeenvolgende bepaling van gevallen en deelgevallen naar de mate van toenemende complexiteit van opgaven, waarbij ieder nieuw geval omstandig in de didactische aanwijzingen voor de onderwijsgevende wordt verklaard.

Dit alles in overeenstemming met de vier algemene principes waarop de methode rust en waarvan de laatste luidt: 'In de rekenmethode wordt stelselmatig de gedachtengang omschreven die door het te behandelen geval wordt geëist[3].'

En dit alles ook conform het algemene beeld wat eerder van het traditionele cijferonderwijs geschetst werd, zij het dat de nadruk bij Bouman en Van Zelm wat het cijferen aangaat nadrukkelijk op het beredeneerde rekenen komt te liggen in plaats van op het werktuigelijke. 'De verklaringszucht raakt uit, het "machinale" komt in de mode' en daartegen verzetten de auteurs zich (Bouman en Van Zelm, 1918, p. 5).

Een voorbeeld van de specifieke werkwijze van Bouman en Van Zelm in hun 'rekenmethode voor de lagere school als proeve van toegepaste logica' luidt als volgt:

'Op het bord:

	75
	38
–	—

De kinderen schrijven:

~~10~~	1	1		
10	1	1		
10	1	1		
10	1	1		75
10	1	1		38
10	1		–	—
10	1			37
	1			
	1			
	1			

Een leerling uit zich b.v. als volgt:
Vijf en zeventig is 7 tientallen en 5 eenheden;
8 van de 5 gaat niet;
1 tiental is 10 eenheden;
8 van de 15 eenheden is 7 eenheden;
nu nog 3 tientallen van de 6 tientallen is 3 tientallen;
75 min 38 is dus 37.' (Bouman en Van Zelm, 1918, p. 149).

Eerst wordt bij de aftrekking '75–38' het getal 75 uitgesplitst in 7 tienen en 5 enen, dan wordt geprobeerd 3 tienen en 8 enen van de getallenstapel te halen door middel van wegstrepen, wat voor de 8 enen niet lukt. Daarna wordt vervolgens 1 tien ingewisseld, de operatie voltooid, de uitkomst genoteerd en de handeling, desgevraagd, verwoord. Een dergelijke werkwijze met getallen wordt bij 'Bouman en Van Zelm' steeds ondersteund door het werken met de grootheden van geld en lengtematen.

Vermenigvuldigen en delen worden in nauwe relatie behandeld. Het delen wordt gesplitst in:

- de verhoudingsdeling: bijvoorbeeld '9 op 7857';
- de verdelingsdeling: bijvoorbeeld '7857 : 873'.

'De leerlingen moeten in de 1e opgave denken:
9 op 78 = 8×, 9 op 7800 = 800× enz. In plaats van 800 kunnen de kinderen schrijven 8 . . ., om door middel van stippen de plaatsen van tientallen en eenheden aan te duiden.

Uitwerking:

```
9 op  7857  =  873 ×   9
      72             873
      --             ---×
       65             27
       63            63 .
       --           72 . .
        27          ------
        27          7857
        --
```

Uitwerking:

```
7857 :873   =    9
7857           873
               ---×
                27
               63 .
              72 . .
              ------
              7857
```

Bij de (eerste) som zegt een leerling: 7857 gedeeld door 873, dan is elk deel 9. Er zijn 873 delen: 873 × 9 is 7857.' (Bouman en Van Zelm, 1918, p. 340-341).

In het gehele cijferprogramma houdt 'Bouman en Van Zelm' de grote aandacht voor de positiewaarde van de getallen en de consequenties ervan voor het cijferen nauwgezet vast, wat tot uiting komt in de aangegeven methodiek van het opsplitsen van de getallen en in het werken met geschikte positie-grootheden. Maar dat gebeurt dan wel steeds op dezelfde wijze en op hetzelfde niveau van schematisering, dus zonder de abacus te gebruiken en zonder verkortingen in de splitsingen aan te brengen welke we in het moderne reken-wiskundeonderwijs tegenkomen.

Opmerkelijk is tenslotte dat het cijferen in een 'kale' rekenkundiggetalsmatige context wordt aangeleerd, dus los van reële probleemsituaties, en ook losstaand van het flexibel rekenen (hoofd- en eigenschapsrekenen). Dit laatste houdt in dat bijvoorbeeld een opgave als 99 × 83 niet gestructureerd via '100 × 83 minus 1 × 83' wordt uitgerekend, of 873 × 9 via 9 × 873.

Kortom: 'Bouman en Van Zelm' kenmerkt zich door:

- de genoemde algemene kenmerken van het traditionele cijferonderwijs, met daarbinnen
- een relatief grote nadruk op het positiesysteem,
- een betrekkelijk uitgebreide en veelvuldig herhaalde inzichtelijke verklaring bij ieder nieuw deelgeval,
- en de nogal geïsoleerde positie die het cijferen inneemt ten opzichte van het hoofdrekenen, het eigenschapsrekenen en het maken van toepassingen.

3.2 *Diels en Nauta*

Vanaf het einde van de jaren dertig taande de invloed van 'Bouman en Van Zelm'. Het rekenonderwijs onderging vanaf die tijd nogal wat wijzigingen: het aanvankelijke rekenonderwijs veranderde, de oefenvormen werden verfijnd, de leerstofinhouden vereenvoudigd en allengs verdwenen de grote vormsommen. 'Diels en Nauta' gaf als eerste aan die veranderingen gestalte.

Het cijferonderwijs bleef echter het algemene beeld van de stap-voor-stap-methodiek volgens toenemende complicering vertonen. Toch geeft ook 'Fundamenteel Rekenen' van Diels en Nauta (1936) weer een specifieke uitwerking aan deze methodiek. De grondslag van het cijferen wordt hierin namelijk nadrukkelijk bij het hoofdrekenen gelegd[4]. Eerst opereert men met betrekkelijk kleine getallen en pas bij opgaven waar het hoofdrekenen niet meer toereikend is, komt het cijferend rekenen 'onder elkaar' aan bod. Het gevolg van deze nadruk op het hoofdrekenen is dat vrijwel geen aandacht besteed wordt aan een inzichtelijke verklaring van de cijferalgoritmen. De begripsmatige grondslag is daarvóór immers reeds bij het hoofdrekenen gelegd, zo luidt de motivering van Diels en Nauta (1939). Evenals bij 'Bouman en Van Zelm' wordt ter ondersteuning van het positiebegrip uitgebreide aandacht besteed aan het rekenen met de grootheden van geld- en lengtematen.

Al met al kenmerkt 'Diels en Nauta' zich dus door:

- de genoemde algemene kenmerken voor het traditionele cijferen;
- en de grote nadruk op het hoofdrekenen voorafgaande aan 't cijferen.

3.3 *Reynders en Snijders*

Vanaf het einde van de jaren vijftig deed ook het denkpsychologisch georiënteerde rekenonderwijs zijn invloed gelden: er kwam meer aandacht voor het inzichtelijk rekenen, het hanteren van algemene oplossingsmethoden en het gebruiken van ordeningsmiddelen als getallenlijn, honderdveld en verhoudingsblok. Ook werd meer dan tot dan toe getracht aan te knopen bij levensechte rekensituaties. 'Functioneel Rekenen' van Reynders en Snijders (1959) kan hier als voorbeeld gelden. Opmerkelijk is echter dat er ten aanzien van het cijferen ook in de laatstgenoemde methode niets verandert.

Zo wordt de deel-algoritme als volgt in het leerlingenboekje van deel 6 toegelicht:

'85 : 7 = ?	85 : 7 = 12
	<u>7</u>
70 : 7 = 10	15
<u>15 : 7 = 2 r 1</u>	<u>14</u>
85 : 7 = 12 r 1	1

Maak elk sommetje op twee manieren als in het voorbeeld:

85 : 4	72 : 2	72 : 5
85 : 5	72 : 3	72 : 6
85 : 6	72 : 4	72 : 7
85 : 7	72 : 8	72 : 9'

(Reynders en Snijders, deel 6, 1965/5, p. 56)

Drie fragmenten uit de daarbij behorende toelichting aan de onderwijsgevende:

'Ofschoon deze delingen zo eenvoudig zijn, dat ze bij voorkeur uit het hoofd dienen te worden uitgerekend, laten we ze hier als staartdeling maken. We doen dat om de techniek van het staartdelen aan te leren.'

'... Een uitgewerkt voorbeeld:

2343 : 7 = 334
<u>21</u>
 24
 <u>21</u>
  33
  <u>28</u>
   5

Wij zeggen:

a. 23 : 7 = 3 (keer), schrijven 3 op.
b. 3 × 7 = 21 (21 opschrijven).
c. Aftrekken. Blijft 2.
d. 4 bijhalen; (streepje of stip onder die 4)
e. 24 : 7 = 3 (keer) (3 opschrijven)
f. 3 × 7 = 21 (21 opschrijven)
g. Verder als c, d enz.'

'Het is voor de kinderen in het begin een moeilijke techniek door de vele wisselende activiteiten, die er aan te pas komen, zoals boven blijkt. Daarom is het nodig bij het aanleren dit op het bord met de klas enige keren uit te voeren! Pas zeer geleidelijk en na veel oefenen gaat de techniek van de staartdeling tot het kùnnen van de kinderen behoren!' (Reynders en Snijders, deel 6, 1965, p. 56a).

Ziehier de kenmerken van de traditionele cijferdidactiek in optima forma bij een op zichzelf toch zo'n vernieuwde rekenmethode als 'Functioneel Rekenen'.

3.4 *Varianten*

Al met al stellen we vast, dat de cijferdidactiek gedurende de periode 1920-1970 niet wezenlijk veranderde. Bij deze vaststelling moeten echter enkele aantekeningen over twee wat afwijkende benaderingswijzen geplaatst worden.

Ten eerste is er een afwijking 'naar beneden', dus naar de sterk mechanistische aanpak van het algoritmiseren. Zoals zojuist besproken, wordt in de meeste rekenmethoden nog wel een korte introductie van begripsmatige aard gegeven, maar er zijn ook wel methoden waarin zo'n verklaring geheel ontbreekt. Een voorbeeld daarvan is 'Naar aanleg en tempo' (Lugtmeijer en Boers, 1954). De cijfer-handelingen worden hier à la Bartjens zonder een inzichtelijke verklaring voorgeschreven.

Ten tweede is er ook een duidelijke afwijking 'naar boven', dus naar een inzichtelijke fundering van het algoritmiseren, namelijk 'Boeiend Rekenen' van Wanders en Bohncke (1960), dat in tegenstelling tot 'Naar aanleg en tempo' enig is in zijn soort.

Met 'Boeiend Rekenen' hebben we tevens een tegen-voorbeeld van het traditionele rekenen:

- hier geen stap-voor-stap-methodiek volgens het principe van de toenemende complicering;
- geen snel en direct toewerken naar de standaardvormen en de algoritmen;
- geen begripsmatige verklaring per geval;
- maar een cijferdidactiek die gericht is op een 'groei' naar de eindalgoritme via een procedure waarin de berekening verkort wordt;
- waarin vanaf het begin gerekend wordt met grotere getallen;
- en waarbij de cijferhandelingen op verschillende niveaus van schematisering verricht worden.

We geven een voorbeeld van de werkwijze van Wanders en Bohncke door middel van een deling:

4100 : 15	
1500	100 ×
– ——	
2600	
1500	100 ×
– ——	
1100	
750	50 ×
– ——	
350	
300	20 ×
– ——	
50	
45	3 ×
– ——	——
5 r	273 ×

Wie kan het vlugger? Maar ook goed!' (Wanders en Bohncke, deel 8, 1970/6, p. 3).

Merk op dat met relatief grote getallen wordt gewerkt, dat nog niet direct de standaardvorm van de staartdeling verschijnt, en dat er verschillende mogelijkheden tot verkorting open gelaten worden.

Herhaaldelijk krijgen de onderwijsgevenden de aanwijzing om de kinderen op hun eigen niveau te laten werken. Maar op een gegeven ogenblik schrijven de auteurs: 'Langzaamaan gaan we van de leerlingen zoveel mogelijk de klassieke bewerkingen vragen. Er is echter geen bezwaar tegen om de zwakke leerlingen de oude werkwijze te laten behouden. Ze zijn wat omslachtiger maar leiden tot de goede uitkomst.' (Wanders en Bohncke, deel 8, 1970/6, p. 52).

Duidelijk is dat hier de grenzen van de traditionele cijferdidactiek overschreden worden: niet de voortschrijdende complicering, maar veeleer de progressieve schematisering en verkorting bepaalt de leergang. 'Boeiend Rekenen' is aldus de uitzondering die de regel van de traditionele cijferdidactiek moet bevestigen!

De praktijk van dit cijferonderwijs bleef gedurende de periode 1920-1970 vrijwel onveranderd – een praktijk die we omschreven als cijferen volgens de methodiek van de voortschrijdende complicering op basis van een min of meer inzichtelijke verklaring van de cijferhandelingen.

4 *Cijferen vakdidactisch beschouwd*

In hoeverre vindt het traditionele cijferen zijn weerspiegeling in de rekendidactiekboeken? Of beter: in hoeverre weerspiegelen de traditionele cijfermethoden de werkwijze die in de boeken over rekendidactiek worden aanbevolen?

Bij het beantwoorden van deze vraag dienen we te bedenken dat er in Nederland tot 1953 geen specifieke rekendidactiekboeken bestonden. Het waren toentertijd vooral rekenkundeboeken die het vakdidactische denken probeerden te richten. Daarbij werd echter meer de theorie van het rekenen dan de praktijk van het rekenonderwijs tot uitgangspunt genomen (Goffree, 1979). Daarnaast werden in de opleiding van onderwijsgevenden vooral ook handleidingen en toelichtingen van methoden in didactische beschouwing genomen.

Pas toen in 1952 de wet op het kweekschoolonderwijs werd aangenomen, veranderde het een en ander: de aloude rekenkunde werd vervangen door het vak rekendidactiek. Aldus geschiedde. En vervolgens verschenen in de periode tot 1970 de volgende didactiekboeken voor rekenen: Turkstra, H. en J. K. Timmer: Rekendidactiek (1953); Van Gelder, L.: Grondslagen van de rekendidactiek (1959); Meijer, J. H.: Theorie en praktijk (1963); Woestenenk, P.: Rekendidactiek (1965); Goffree, F., G. A. A. Hiddink en J. Dijkshoorn: Rekenen en didactiek (1966).

We zullen deze vakdidactische boekenreeks straks op het aspect van de cijferdidactiek analyseren. Teneinde echter de periode tot 1953 te overbruggen zal allereerst het invloedrijke 'Neubau des Rechenunterrichts' van Kühnel (1925/5) onder dit opzicht beschouwd worden.

4.1. *Opvattingen van Kühnel*

Welnu, terugkerend naar de eerder gestelde vragen, blijkt dat het traditionele cijferonderwijs in het geheel niet bij de opvattingen van Kühnel aansluit. Integendeel! Kühnel blijkt een fervent tegenstander te zijn van deze cijfermethodiek welke gericht is op het zo direct mogelijk aanleren van de standaardalgoritmen.

Schrijvend over het cijferen volgens de standaardmethode ('Das Normalverfahren') stelt Kühnel:

'Das Normalverfahren sagt: So wird es gemacht, so ist es richtig! Damit verhindert es geradezu, in den Geist mathematischer Bildung einzudringen. Mit der festen Form wird der Geist in Fesseln geschlagen und zwar gerade dort, wo er sowohl in die Tiefe dringen, als auch den Ueberblick gewinnen sollte.' (Kühnel, 1925/5, p.2).

'Ehe wir noch weitere Beispiele heranziehen, müssen wir kurz auf die Hauptsache eingehen. Sie besteht darin, dass das Lösungsverfahren von den Kindern selbst gefunden wird, und zwar nicht unter gewissenhafter Führung', nicht in "streng logischer Entwicklung", sondern frei, in freiem Versuch. Dabei werden Fehler und Umwege selbstverständlich nicht ausbleiben.' (Kühnel, 1925/5, p.4).

'Ein solch bildender Umweg ist es auch wenn man die Division einmal anders ausführen lässt als in der üblichen Form, etwa so:

5694 : 3, da passt sehr fein

600 : 3 = 200	und
90 : 3 = 30,	sind noch die 5000 und die 4 zu teilen:
3000 : 3 = 1000,	bleiben 2004, davon nehmen wir
1800 : 3 = 600,	bleiben noch 204, davon
180 : 3 = 60,	bleiben
24 : 3 = 8,	

5694 : 3 = 1898

Verteilt ist alles, aber wir hätten es kürzer haben können. Viel Schuld an einer mechanischen und damit verständnislosen Aneignung der Formen hat auch das Weglassen der Nullen bei der Division.'

'Insbisondere halten wir abgekürzte Multiplikation und abgekürzte Division für völlig entbehrlich. (Kühnel, 1925/5, p.12)

Overigens merken we op, dat ook in de rekenkunde-boeken die in Nederland in omloop waren, dergelijke uitgebreide notatiewijzen van de cijferalgoritmen wel degelijk behandeld werden, zonder dat daarbij overigens op de didactische mogelijkheden voor het cijferonderwijs op de lagere school gewezen werd (Jansen en Van den Brink, 1945/5, p.75). Goffree zei het al: de praktijk van het rekenonderwijs werd in de rekenkunde niet tot uitgangspunt gekozen.

4.2 *Gangbare vakdidactische opvattingen*

Maar met de komst van de eerdergenoemde boeken over rekendidactiek veranderde dit – althans wat het cijferen aangaat. Nu is het opmerkelijk te constateren, dat de opvattingen over het cijferen in al deze didactiekboeken gelijkluidend zijn en globaal overeenstemmen met die van Kühnel.

We volstaan met één illustratief voorbeeld uit 'Rekendidactiek' van Woestenenk (1962, p.8-9):

'Lesgang: Inleiding met een concreet geval: "Een klos touw van 75 m, hoeveel springtouwen van 4 m kan ik daar van afhalen?" (Een verhoudingsdeling dus). Eén kind werkt op het bord, de anderen in een werkschrift:

"Welke som is dat?" (75 : 4.)

Uit de klas mag ik verwachten: "Het gaat eerst 10 × enz."

Op het bord: 75 : 4 = 10.

"Wat stelt die 10 nu voor?" (10 touwen).

"Wat moet ik nu doen?" Het gesprek leiden tot 75 – 40.

"Waarom 40?" (10 × 4;.

"Waar zullen we die 40 opschrijven?" (Onder de 75 want daar moeten we die 40 van aftrekken).

Zo komt op het bord

```
 75 : 4 = 10
 40
--
 35
```

"Wat stelt die 10 ook weer voor?" "En die 35?" (35 m).

"Wat moeten we nù nog doen?" (35 : 4 enz.)

Tenslotte staat er op het bord

```
 75 : 4 = 10
 40        8
--        — +
 35       18
 32
--
  3
 75 : 4 = 18 rest 3.
```

We vragen weer naar de betekenis van die 18 en die 3, dan laten we het antwoord zeggen: 18 touwen, 3 m over.'

Evenals bij Kühnel wordt hier gewezen op het belang om reële problemen tot uitgangspunt van de cijferleergangen te nemen en niet direct op de standaardnotatie aan te sturen, maar juist notatiewijzen te gebruiken die het denkproces ondersteunen en die dan op den duur verkort kunnen worden tot de standaardprocedure – dit alles dus in tegenstelling tot de gangbare cijferdidactiek zoals die in de leerboeken gestalte krijgt. In de andere genoemde didactiekboeken is het niet anders: ook daarin vindt men soortgelijke kanttekeningen bij lessen over cijferen. Wat dit cijferen aangaat is er dus een grote mate van overeenstemming in de vakdidactiek.

4.3 *Wertheimer versus Thorndike*

Het onderscheid tussen de zojuist geschetste vakdidactische ideeën over het leren cijferen en de eerder beschreven praktijk voor het cijferonderwijs komt duidelijk tot uitdrukking in het verschil tussen de gestaltpsychologische opvattingen van Wertheimer en de associationistische ideeën van Thorndike.

Thorndike legt in 'The psychology of arithmetic' de nadruk bij het cijferen op de basisvaardigheid ('ordinary bonds') die als het ware de basiselementen van de cijferhandelingen vormen, en op de opbouw van de leergang naar de mate van complexiteit ('organization and operation of bonds'), terwijl Wertheimer in 'Productive Thinking' de noodzaak van een inzichtelijke aanpak ('understanding') beklemtoont. Dat wil zeggen: Thorndike wijst vooral op het memoriseren van de tafels, de subtiele opbouw naar opklimmende moeilijkheid van geval-naar-geval en de eindhandelingsstructuur van de betreffende algoritmen; Wertheimer daarentegen accentueert het begrijpen van de betekenis van de operatie in toepassingssituaties, het kunnen toepassen van fundamentele rekenregels zoals bijvoorbeeld de distributieve eigenschap ($3 \times 14 = 3 \times (10 + 4) = 3 \times 10 + 3 \times 4$), het gebruik van visualiseringsmiddelen en het belang van 'tussenvormen' voorafgaande aan de eindalgoritme in standaardvorm.

De genoemde verschillen komen sprekend in de volgende fragmenten van Wertheimers 'Productive Thinking' naar voren:

'When confrontated for the first time with such questions as 24×3 one child proceeded like this: "I can't do this all at once; but you see, this is 4×3 and 20×3."

$$24 \times 3 \quad \begin{array}{c} 4 \times 3 \\ + \\ 20 \times 3 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{r} 12 \\ + \\ 60 \\ \hline 72 \end{array}$$

And he proceeded similary when he was first confronted with a threeplace number as one of the multipliers. Or, if confronted with complicated tasks, like 27×34, sometimes a child will proceed this way:

$$\begin{array}{l} 20 \times 30 + 20 \times 4 \\ \;\;7 \times 30 + \;\;7 \times 4 \end{array}$$

One faces a different task when one tries to get the child to use the short cut, which demand, "you must not do it in the old way; you must write the product (say, of 27×3) directly".' (Wertheimer, 1966, p. 162)

'I should think that the good teacher will start with the first procedure, despite the fact that the child will not use this particular technique. To learn the shortcut-method without understanding how it comes about may arm the child with routine skills, but it omits the development of thinking (and if the trick of the procedure is forgotten, the pupil is lost; not so with the other method).' (Wertheimer, 1966, p.163)

'In any case the best procedure seems to me to be *not to teach* the pupil the shortcut method without real understanding on his part, but to let him do the task, to let him find the necessary steps, but in a reasonable way, by proceeding from structurally easy tasks to structurally more difficult ones – which does not mean that the tasks given also need to be easy in other respects. The process of thinking in such cases of course makes use of learned things. But the procedure is governed not by applying blindly what has been learned, as in the foolish cases of p.192 of Thorndike's book. The ideal seems to me to be to have individual teaching, fitting the procedure to the individual. And it looks as though this might produce an astounding saving of time.' (Wertheimer, 1966, p.164)

Hoewel de grondgedachte van Wertheimer en van de eerdergenoemde vakdidactici omtrent het cijferen niets aan duidelijkheid te wensen overlaten, heeft dit zoals we zagen niet tot gevolg gehad dat ze ook concreet gestalte kregen in de rekenmethoden. Dit blijkt eens te meer uit een vergelijking van de cijferprogramma's van Diels en Nauta die zich uitdrukkelijk beroepen op de opvattingen van Thorndike, en van Reijnders en Snijders die zich sterk verwant weten met de ideeën van Wertheimer. Gelet op de uiteenlopende oriëntaties zou men hier wat het cijferen betreft nogal diepgaande verschillen verwachten. En wat blijkt? Er is geen essentieel onderscheid waar te nemen, tenminste niet wat de mate van inzichtelijkheid aangaat: beide methoden zijn op het punt van het leren cijferen 'traditioneel' in de zin van 'overwegend mechanistisch van inslag'.

Het is dan ook de vraag wat de oorzaak is van de discrepantie tussen de vakdidactische opvattingen zoals verwoord in boeken over rekendidactiek en in handleidingen bij methoden, en de praktische uitwerkingen zoals die gerealiseerd zijn in de methoden die zich uitdrukkelijk op deze opvattingen beroepen. Hoe komt het dat het cijferen in het rekenonderwijs zijn traditionele gedaante bewaard heeft ondanks de heftige aanvallen van vakdidactische en denkpsychologische zijde?

4.4 *Oorzaken discrepantie vakdidactische theorie en onderwijspraktijk*

In de bovenstaande titel ligt de aanname besloten dat de praktijk van het cijferonderwijs meer bepaald wordt door de leergangen zoals die in de leerboeken geschetst worden, dan door de vakdidactische opvattingen welke in de boeken over (wiskunde-)didactiek neergelegd zijn.

Naar onze mening zijn er verschillende zwaarwegende argumenten om speciaal bij het cijferen deze sterk richtinggevende functie aan de leerboeken toe te kennen. Eén van de belangrijkste redenen daarvan is wel, dat men als onderwijsgevende feitelijk wel gedwongen is de methode in grote trekken door de lange leergang van het cijferen te volgen, wil men niet volledig verdwalen. Denk alleen eens aan het oefenmateriaal, de gigantische sommenbatterij waarover de leerlingen moeten kunnen beschikken. Daar komt nog bij dat het cijferen over de leerjaren heengrijpt, zodat het nodig is om met het schoolteam als geheel aan een nieuwe opzet van het cijferen te werken. En wat misschien wel het zwaarst weegt: als men het cijferprogramma uit een bepaalde methode bewerkt of sterk verandert, dan zijn ook allerlei andere onderdelen uit de methode die met het cijferen samenhangen niet zonder meer te gebruiken. Kortom, men zet zodoende de hele methode in feite op de helling, terwijl de voordelen van een andere aanpak niet direct voor het grijpen liggen.

Want wat houdt die alternatieve vakdidactisch georiënteerde werkwijze in?

Zoals we zagen, zijn de basisprincipes daarvan de volgende:

- niet direct per deelgeval toewerken naar de standaardvormen maar de kinderen gelegenheid geven zelf verkortingen in de algoritme aan te brengen;
- uitgaan van concrete toepassingssituaties;
- gebruik maken van positiemateriaal en schema's;
- de leergang aanpassen aan iedere leerling op zich (individualiseren) zodat het kind de verschillende fasen en niveaus inzichtelijk en in eigen tempo kan doorlopen (Wertheimer, 1966, p.164).

Maar dan rijst onmiddellijk de vraag hoe een leergang die op deze algemene principes gegrond is er dan concreet uit zal moeten zien, want daarover geven de genoemde vakdidactische en psychologische werken verder geen uitsluitsel. De opmerkingen over het cijferen zijn daar immers meer gesteld in de vorm van kanttekeningen bij lessen ten behoeve van de opleiding van onderwijsgevenden, dan dat ze de onderwijsgevende concrete richtlijnen verschaffen voor het cijferonderwijs van les tot les in de cijferleergang als geheel.

Welke niveaus zijn er grofweg in het leren cijferen te onderscheiden?

Hoe moet het gedifferentieerde cijferonderwijs praktisch georganiseerd worden en wat is de functie van een leerboek hierbij?

Wat zijn de resultaten van zo'n alternatieve aanpak in verhouding tot de traditionele cijferdidactiek?

Op geen enkele van dit soort vragen vindt men in de vakdidactische onderwijsliteratuur van de periode vóór 1970 ook maar een aanzet tot een concreet antwoord![5]

Kortom, als men de stap-voor-stap-methodiek van de traditionele leergang volgens het principe van de toenemende complicering wil verlaten en het cijferonderwijs openbreken, dan staat men als onderwijsgevende in feite met lege handen.

Samengevat is de kloof tussen de gevraagde ideale didactiek van het cijferen en de beschikbare traditionele cijferdidactiek als neergelegd in de leerboeken dermate groot, dat deze in de praktijk van het onderwijs moeilijk te overbruggen is – juist ook omdat het bij het cijferen om langlopende leerprocessen gaat waarbij de steun van een leerboek moeilijk ontbeerd kan worden, terwijl nu net de flexibele leergang zo moeilijk in een methode is vast te leggen, mirabile dictu.

Anders gezegd, de consequenties van de gepropageerde opvattingen waren door de vakdidactici zèlf nog onvoldoende doordacht . . . en beproefd.

5 *Onderzoek*

Zoals gezegd, bestaat het totale onderzoeksrepertoire van de vakdidactisch gerichte cijferleergangen in de periode 1920-1970 uit niet veel meer dan wat verslagen van leergesprekken, anecdotes, een serie voorbeeldlessen, een reeks basisprincipes en algemene aanbevelingen.

Voor het traditioneel bepaalde cijferen ligt dit echter anders: op dit terrein is wel heel wat onderzoek verricht. Echter niet in Nederland waar het onderzoek zich voornamelijk bepaalde tot getalbegrip, verhoudingen, breuken, redactie-vraagstukken, aanvankelijk algebraonderwijs (letterrekenen, vergelijkingen) en aanvankelijk meetkundeonderwijs. We zullen ons wat het onderzoek betreft dus op het buitenland moeten richten. Dit is op zich geen bezwaar, omdat het cijferonderwijs in de Westerse wereld een betrekkelijk uniform beeld vertoont, wat het mogelijk maakt om de resultaten van het onderhavige onderzoek ook globaal op het Nederlandse cijferonderwijs te betrekken.

We zullen in deze paragraaf een indruk geven van de aard en de resultaten van dit onderzoek aan de hand van het klassieke werk van Schonell en Schonell (1957), getiteld: 'Diagnosis and remedial teaching in arithmetic', waarin vooral ook aandacht aan het leren cijferen wordt besteed. We hebben 'Schonell en Schonell' niet alleen gekozen om de eigen waarde, maar ook omdat daarmee het totale onderzoek op het terrein van het cijferen gekarakteriseerd kan worden.

5.1 *Leerstofordening*

'The Schonell Diagnostic Arithmetic Tests' bevat twaalf tests, waarvan zes betrekking hebben op de cijferalgoritmen. De toetsen zijn geconstrueerd 'for the purpose of gauging levels of attainment and for locating individual difficulties in addition, substraction, multiplication, division (short and long) and simple mental problems.' (Schonell en Schonell, 1957, p.82).

De leerstofordening naar toenemende complexiteit komt in de tests heel nauwkeurig tot uitdrukking: 'The steps have been graded in order of difficulty . . .' (Schonell en Schonell, 1957, p.81).

Voor optellen, aftrekken en vermenigvuldigen worden ieder 14 deelgevallen onderscheiden en voor delen in totaal 23.

Schonell en Schonell geven geen uitgebreide toelichting op deze leerstofordening, maar uit de voorbeelden die zij aandragen kan men eenvoudig vaststellen dat de globale ordeningscriteria overeenkomen met de eerder genoemden, te weten: de grootte van de getallen, het aantal inwissel- of leenhandelingen, de verschillende posities die de nul inneemt, en de vereiste rekenvaardigheden. Aangezien hier echter sprake is van meerdere 'dimensies' die gecombineerd moeten worden, kan men verschillende lineaire ordeningen maken die aan de genoemde criteria voldoen. Bijgevolg zou men verwachten dat de door Schonell en Schonell gemaakte keuze enigermate beredeneerd en gemotiveerd zou plaatsvinden, zodat antwoord gegeven kan worden op vragen als: Waarom is de grootte van de getallen bij het optellen op zich van minder gewicht bij het bepalen van de moeilijkheidsgraad dan het aantal inwisselingen? Waarom is het aftrekken van nul zo moeilijk ingeschat als 10e stap in de leergang? Wat is de reden van de plaatsing van een opgave als 90×90 als 10e stap in de leergang van het vermenigvuldigen? Maar dit is niet het geval: de ordening wordt niet toegelicht.

En over de meer fundamentele kwestie of de genoemde dimensies in feite wel bepalend zijn voor de moeilijkheidsgraad van de opgaven wordt uiteraard in het geheel niet gerept. We zeggen 'uiteraard', omdat de leerstofordening in grote lijnen 'logisch' voortspruit uit de aard van de betreffende algoritmen – althans dat is de opvatting welke aan het traditionele cijferonderwijs ten grondslag ligt.

Het is echter de vraag of deze globale ordening van de leergangen cijferen voor de verschillende basisoperaties wel zo vanzelfsprekend is als zij wellicht op het eerste gezicht lijkt.

We bedoelen met onze twijfel omtrent de leerstelligheid van de 'logische' leerstofordening te zeggen, dat het niet vanzelf spreekt dat bijvoorbeeld voor het optellen de eerste stap in de leergang een eenvoudige opgave zou moeten zijn die volgens de standaardalgoritme opgelost wordt en de laatste stap een ingewikkelde som bestaande uit grote getallen en meerdere termen.

Zou het niet ook kunnen dat bijvoorbeeld in het begin van een leergang ook reeds relatief complexe opgaven gemaakt worden, maar dat deze dan nog niet direct op standaardniveau doch op een lager niveau van schematisering verwerkt worden, en dat de globale ordening in deze leergang meer door de mate van schematisering dan door de complexiteit van de opgaven bepaald wordt?

Op deze vraag komen we later nog terug. Voor dit moment is slechts van belang vast te stellen, dat de traditionele leerstofordening gepostuleerd werd als een proeve van logica, of beter, als vrucht van beproefd logisch denken, welke geen nader onderzoek behoefde.

5.2 *Cijfermethodieken*

Wat wel uitgebreid onderzocht werd, was de meest efficiënte standaardmethodiek om de verschillende basisalgoritmen aan te leren: 'During the past twenty-five years there has been an immense amount of research into methods in arithmetic, some of it conclusive, some of it merely suggestive, and a appreciable proportion of it almost useless because of the specificity of the experimental situation or the inadequacy of the statistical measures used.' (Schonell en Schonell, 1957, p.46).

Het gaat hierbij bijvoorbeeld voor het optellen om de kwestie van:

a) optellen van boven naar beneden, of
b) optellen van beneden naar boven.

Bij het aftrekken wedijveren:

a) de ons bekende leenmethode

5
61
39
– —

b) de minder bekende overdrachtsmethode

6 1
4 3 9
– —

(Het gaat bij beide operaties om standaard- of eindvormen van de algoritmen – zoals dat bij het traditionele rekenen gebruikelijk is).

Ook voor het vermenigvuldigen en delen zijn verschillende alternatieve procedures – deels van historische oorsprong – object van onderzoek geweest, doch deze worden door Schonell en Schonell niet verder besproken.

Een globaal overzicht van de tientallen, zo niet honderden onderzoeken die op dit terrein gedaan zijn, treft men aan in Glennon en Callahan (1968) en in Suydam en Dessart (1976).

We zullen hier niet nader op de vaak zeer tegenstrijdige resultaten van deze onderzoeken ingaan, maar slechts vaststellen, dat de cijfermethodieken die in het traditionele onderwijs gangbaar zijn, niet evident beter of minder effectief lijken te zijn dan allerlei varianten ervan – tenminste als men de methodieken louter als procedures op zich beschouwt. Graaft men dieper, zoals bijvoorbeeld Brownell en Moser (1949) in hun bekende onderzoek omtrent het cijferend aftrekken gedaan hebben, dan stuit men op een veel belangrijker aspect van goed en efficiënt cijferonderwijs dan de methodiek op zich, en dat is de kwaliteit van het onderwijs i.c. het betekenisvolle ('meaningful') leren van de cijferprocedures ofwel de inzichtelijke grondslag van de methodiek in tegenstelling tot de blinde mechanistische ('mechanical') aanpak ervan.

Ook Schonell en Schonell constateren dit tekort aan inzichtelijkheid en betekenisvolheid van het cijferen, maar bij hen en andere onderzoekers uit de periode tot omstreeks 1960, vindt men geen concrete aanwijzingen voor een fundamenteel andere aanpak van het leren cijferen – net zo min als bij de eerder besproken (andere) vakdidactici.

We zullen deze vaststelling nog wat nader uitwerken, nadat eerst de knelpunten in de traditionele cijferleergangen besproken zijn.

5.3 *Knelpunten*

Het eindresultaat van het traditionele cijferonderwijs is dat het overgrote deel van de kinderen (80 à 90%) aan het einde van de basisschool de vier standaardalgoritmen beheerst, zij het dat dit percentage voor lastige deelsommen nogal wat lager ligt: voor het optellen komt die beheersing in de buurt van de 90% van de leerlingen, aftrekken 80%, vermenigvuldigen 70% en delen omstreeks 60% – zo luidt onze ruwe schatting[6].

Toch verloopt de leergang cijferen niet zonder hindernissen. Schonell en Schonell (1947, p.129 e.v.) signaleren vier obstakels:

- onvoldoende beheersing van de basisvaardigheden betreffende de zogenaamde tafels;
- onvoldoende snelheid bij het uitvoeren van de cijferbehandelingen;
- het zich vastzetten van specifieken fouten, zoals bijvoorbeeld het rekenen met nullen en bepaalde memoriseerfouten;
- onvoldoende kennis van de cijferprocedures: onthouden, lenen, onder elkaar plaatsen van getallen, aanhalen e.d.

Kort gezegd, liggen de tekorten bij het cijferen dus zowel in de basisvaardigheden als in de procedurebehandelingen. Over de precieze aard van de procedurefouten – om ons hiertoe maar te beperken – is een grote mate van overeenstemming tussen de onderzoekers. (Zie bijvoorbeeld: Brueckner, 1935; Grossnickle, 1939; Cox, 1975a, 1975b). Het werk van Schonell en Schonell levert in dit opzicht dan ook geen opzienbarend nieuwe resultaten op.

Op vrijwel geen gebied van het traditionele rekenonderwijs in de Westerse wereld is zulk uitgebreid onderzoek verricht als op dat van het cijferen en zijn de knelpunten zo exact gelokaliseerd. (Zie voor een overzicht Suydam en Dessart, 1976 en Radatz, 1980).

We nemen als meest eenvoudige voorbeeld het optellen 'onder elkaar'. Uit onderzoeken op dit terrein blijkt dat als belangrijkste procedureknelpunt het 'onthouden' (inwisselen) wordt aangemerkt. Daarbij dient echter nog onderscheid gemaakt te worden tussen het onthouden van het getal één dat zich bij korte optellingen voordoet en het inwisselen van meer dan één bij langere optellingen, wat zich als aparte moeilijkheid aandient. Voorts is bekend dat de nul extra problemen oplevert. Ook optellingen, waarbij open plaatsen in de kolommen voorkomen – dus bij getallen met een ongelijk aantal cijfers – vormen een knelpunt. En tenslotte is geconstateerd, dat wel het inwisselen op zich bepalend is voor de moeilijkheidsgraad, maar niet het àántal inwisselingen (men moet daarbij uiteraard afzien van de grotere kans op vergissingen, want het gaat hier immers om het juist verrichten van de procedurehandelingen). Hetzelfde geldt voor de grootte van de getallen.

Dit wat de opbrengst van het klassieke onderzoek over het cijferend optellen betreft, zoals dat onder meer bij Schonell en Schonell (1957) staat opgetekend.

Voor de volledigheid is nog vermeldenswaard dat Friend onlangs (1979) een nieuw knelpunt aan de genoemde reeks heeft toegevoegd. Zij ontdekte namelijk dat opgaven van het type:

```
312      3
 21    204
 40     12
——+    ——+
```

opmerkelijk meer moeilijkheden geven dan die van het type

```
512    533
902     12
  2    510
  4    813
——+    ——+
```

Bij nader onderzoek blijkt het onderscheid tussen deze typen te bestaan in het getal als 'éénling' in een kolom, en wel die 'singleton' waaraan geen inwisselgetal wordt toegevoegd, zoals dat bij het eerste type het geval is. De kinderen hebben kennelijk het idee dat er voor het optellen per kolom tenminste twee getallen nodig zijn: 'the child does not conceive the join of a single set, or the sum of a single number.' (Friend, 1979, p.34-35). Vandaar dat de kinderen soms de 'éénling' negeren of er op een andere wijze toch een getal aan toevoegen.

Het is duidelijk dat dergelijk onderzoek naar knelpunten, dat overigens ook voor het cijferend aftrekken, vermenigvuldigen en delen in ruime mate verricht is, een belangrijke ondersteuning voor de inrichting van het traditionele cijferonderwijs kan bieden – tenminste in de zin van het diagnostiseren van cijferfouten en het samenstellen van leergangen. Maar worden er ook bepaalde consequenties voor remediërend werk uit getrokken?

5.4 *Kenmerken van remediërend werk*

Wij herinneren aan de titel van de leidraad: 'Diagnosis and remedial teaching in arithmetic'. En we vragen ons af welke remediërende suggesties dit boek biedt ter voorkoming van de specifieke procedurefouten van het cijferen of ter behandeling ervan.

Welnu, Schonell en Schonell geven een grote hoeveelheid aanwijzingen voor het onderwijzen van de basisoperaties en het oefenen en memoriseren van de basisfeiten (tafels), die tevens suggesties voor remediërend werk zijn. Maar over de tweede foutenbron van het cijferen, namelijk die van de specifieke procedurehandelingen wordt vrijwel niet in remediërende zin gesproken.

Naar aanleiding van 'Insufficient understanding of the four processes' merken de auteurs op: 'These are pupils who have developed an effective working accuracy in the fundamental number combinations and their extensions but who break down at a particular point in the process of subtraction or division or multiplication (addition is usually mastered). The are on the whole the easiest group to help. The fact that they have not yet mastered the idea of "borrowing" in substraction, or of trial divisors in long division, or of compound multiplication is not very serious, provided there is facility with the basic number combinations, which in fact constitute the major part of the calculation. What these pupils obviously need is remedial work with sets of examples on each step of difficulty in the process.' (Schonell en Schonell, 1975, p.171-172).

Kortom, de procedureproblemen bij het cijferen dienen volgens de genoemde auteurs opgelost te worden door ze per geval te verklaren en te oefenen – dat is de eenvoudige remedie, die ook steeds in de andere onderzoeken wordt aanbevolen.

Welnu, deze aanbeveling past geheel in het kader van het traditionele cijferonderwijs. Aldus leidt het onderhavige onderzoek tot een verfijning van de traditionele leergangen. Maar de kern van het bestaande cijferonderwijs blijft erin onaangetast: de remediërende werkwijze is geënt op de bestaande leerstofordening van de progressieve complicering, er wordt slechts gedacht vanuit de eindvorm van de betreffende algoritmen en er wordt geen gebruik gemaakt van positiemateriaal in de vorm van blokken of een abacus, en de remedie tegen ingeslepen fouten bestaat binnen dit raam vooral uit een nadere verklaring van de procedurebehandeling per 'knellend' deelgeval, maar dan wel een verklaring gesteld op een relatief hoog niveau van schematisering met getalsymbolen.

We lichten tot slot de gevolgtrekking nog eens toe aan de hand van twee citaten uit het werk van Cox, dat als de meest bekende nieuwe loot van deze traditionele onderzoeksstam kan gelden: 'The various errors fell under the general categories of misconceptions regarding the nature of number, the nature of the operation, the function of place value, and the function of renaming. It is important to note that in almost every case, the number facts were correct, but the process involved in using the algorithms was wrong.' (Cox, 1975a, p.219).

Diagnose: het merendeel van de systematische fouten bij het cijferen zijn procedurefouten.

Wat is de remedie daartegen? Cox: 'Unfortunately research tells us little regarding the most appropriate methods for handling specific errors. Therefore once systematic errors have been detected, classroom teachers must continue to use their own judgement in selecting remedial activities.' (Cox, 1975b, p.156).

Duidelijker kan de machteloosheid ten aanzien van de procedurefouten bij het cijferen welhaast niet uitgedrukt worden en daarmee de grenzen van de traditionele cijferdidactiek bepaald worden. Dit geldt, zoals gezegd, voor vrijwel alle onderzoeken in de Westerse wereld. En we hebben geen aanwijzingen dat dit wat het cijferen aangaat in het Oosteuropese onderzoek anders is geweest (Menchinskaja en Moro, 1965; Stahl, 1973).

5.5 *Slotsom*

Dit alles neemt echter niet weg dat het zojuist besproken constaterend onderzoek een belangrijke bijdrage leverde en levert tot een betere uitlijning van traditionele cijferleergangen en een beter inzicht in de aard van de fouten die de kinderen zoal bij het cijferen maken.

Het is echter evenzeer juist dat het op geen enkele wijze tegemoet komt aan de bezwaren die er van vakdidactische zijde ingebracht worden. Maar zoals we eerder opmerkten: de vakdidactische opvattingen zèlf bleven beperkt tot algemene aanbevelingen en leidden vooralsnog niet tot de ontwikkeling van een alternatieve leergang cijferen bestemd voor algemeen gebruik. En voor zover dit incidenteel wel gebeurde (Montessori, Boeiend Rekenen, Hutton e.a.) werd er geen diepgaand onderzoek naar de effectiviteit van die andere aanpak verricht[7].

Pas vanaf omstreeks 1960 – en in Nederland nog wat later – toen de vernieuwing van het rekenonderwijs welke algemeen met de term 'wiskunde-onderwijs op de basisschool' wordt aangeduid, langzaamaan concrete gestalte begon te krijgen, ontstonden er fundamenteel nieuwe inzichten en concretiseringen omtrent het leren cijferen welke tot voorwerp van onderzoek gemaakt werden.

6 *Overzicht en uitzicht*

Het is hier niet de plaats om uitgebreid op deze nieuwe ontwikkelingen in te gaan. Wel willen we ze kort in algemene zin aanduiden om daarmee de kenmerken van het traditionele cijferonderwijs nog wat meer reliëf te geven en ook om enig zicht te bieden op de ontwikkelingen die zich in de jaren zestig en zeventig met betrekking tot het cijferen hebben voorgedaan. En het is mogelijk daarop een redelijk duidelijk uitzicht te bieden, omdat de nieuwe ontwikkelingslijnen zich al in het traditionele cijferonderwijs lieten aanduiden.

We noemden daaromtrent in het voorgaande reeds als belangrijke aanzetten:
- het gebruik van positiëmateriaal;
- en het 'losbreken' van de eindvorm van de algoritmen, waardoor het zelf aanbrengen van verkortingen mogelijk gemaakt wordt.

Vanuit deze kenmerken kan men het traditionele cijferonderwijs in 'negatieve' zin karakteriseren als

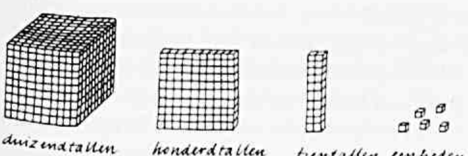
– niet materieel en onaanschouwelijk van aard;
– sterk gericht door de eindvormen van de standaardalgoritmen,
– met als 'logisch' gevolg een onaantastbare leerstofordening volgens het principe van de toenemende complicering.

Maar met deze vaststelling blijven we wel erg aan de oppervlakte van de essentiële verschillen.

6.1 *Cijferen op verschillend niveau*

Om hierop een wat indringender kijk te geven, beschrijven we hoe een eenvoudige opteloppgave als '57 + 28' op verschillende niveaus cijferend opgelost kan worden (Treffers 1980):

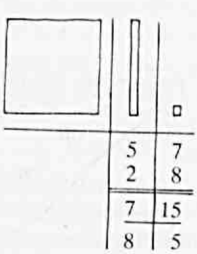
1. De berekening geschiedt met inwisselmateriaal (Dienesblokken of Multibase Arithmetic Blocks genoemd) dat bestaat uit eenheidsblokjes, staafjes van tien eenheden, vierkanten van tien staven, en kuben van tien vierkanten:



Figuur 3 *MAB-blokken*

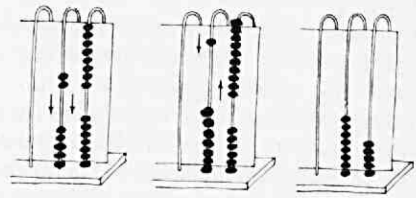
De betreffende optelhandeling kan met behulp van dit materiaal als volgt verlopen: 57 wordt gelegd met 5 tienstaven en 7 eenheidsblokjes, 28 met 2 tienen en 8 eenheden; vervolgens worden de blokjes en staven bijeengevoegd, waarna 10 van de 15 blokjes ingewisseld worden voor een staaf, zodat de uitkomst van de operatie bestaat uit 15 – 10 = 5 eenheden en 7 + 1 = 8 tientallen.

Notatiewijze:



Figuur 4 *Positieschema*

2. De getallen worden op een abacus gezet en de uitkomst kan eenvoudig afgelezen worden nadat de rituele inwisselingen verricht zijn:



57 + 28 85

Notatie:
5 7
2 8
———
7 15
8 5

Figuur 5 *Optellen op de abacus*

3. Er wordt geen inwisselmateriaal of abacus gebruikt, maar de notatiewijze met positiestrepen verwijst nog wel naar deze materialen. Ook wordt hier nog niet direct ingewisseld:
5 7
2 8
———
7 15
8 5

4. De algoritme wordt op de standaardmanier uitgevoerd – dus met direct inwisselen, al dan niet door het inwisselgetal erbij te plaatsen:
1
5 7 5 7
2 8 of 2 8
—— ——
8 5 8 5

De bovenstaande fasering in vier stappen is uiteraard slechts één van de mogelijkheden: er kunnen fasen tussengevoegd of weggelaten worden en ook de notatiewijzen kunnen variëren – dat terzijde.

Welnu, een dergelijke getrapte benadering van de standaardalgoritme is typerend voor de andere aanpak van het leren cijferen zoals die veelal in het wiskundeonderwijs op de basisschool gerealiseerd wordt.

Kenmerkend voor deze nieuwe cijferdidactiek zijn, zoals gezegd: de poging om een inzichtelijke grondslag voor de cijferprocedures te leggen, het doelgerichte materiaalgebruik, de toenemende schematisering en het toelaten van oplossingen en notaties die niet op de standaardmanier volgens de conventionele algoritme plaatsvinden.

6.2 *Uitzicht op drie nieuwe cijferdidactieken*
Nu kan de zojuist geschetste aanpak nog op verschillende wijzen uitgewerkt worden.

Allereerst is daar de werkwijze zoals die sedert omstreeks 1970 in het wiskundeonderwijs op de basisschool gebruikelijk is. Hierin vindt de gefaseerde benadering van de standaardalgoritmen via blokken, abacus en positieschema steeds weer bij ieder nieuw deelgeval plaats. Dus indien als vervolg op opgaven van '57 + 28' nu twee getallen van drie cijfers opgeteld moeten worden, dan start de deelleergang opnieuw met inwisselmateriaal en bijbehorend schema, en eindigt via verschillende tussenstappen bij de standaardalgoritme voor dit specifieke geval. Voor het aftrekken, vermenigvuldigen en delen geldt mutatis mutandis dezelfde gefaseerde aanpak per deelgeval. We kunnen deze aanpak typeren als die van de progressieve schematisering op micro-niveau (per deelgeval). Op macro-niveau, dus wat de grote lijn van de leergang betreft, blijft echter ordening naar toenemende complicering het dominerende 'traditionele' principe.

In de jaren zeventig is door de Wiskobasgroep van het IOWO nog een andere aanpak ontwikkeld. Deze is als het ware het spiegelbeeld van de vorige: kenmerkend voor het werk op micro-niveau is nu de toenemende complicering, terwijl zich op macro-niveau de progressie in de schematisering voltrekt. Dit houdt concreet in dat reeds in een vroeg stadium met relatief grote getallen gecijferd wordt, maar dat de berekeningen op een aangepast niveau van schematisering plaatsvinden. Zo wordt bijvoorbeeld voor optellen in vrijwel dezelfde tijdsperiode met getallen van twee, drie, vier of meer cijfers gewerkt. De oplossingen worden dan echter wel steeds met behulp van positie-materiaal gevonden en niet volgens de abstracte en verkorte uitvoering van de standaard-algoritme. In de loop van de leergang wordt naar een hoger oplossingsniveau van schematisering gestreefd. Terwijl in de eerstgenoemde aanpak de grote lijn van de leergang vooral bepaald wordt door de toenemende complicering van de opgaven, is het in de tweede richting dus de progressieve schematisering die in grote trekken de gang van het leren aangeeft.

Tenslotte is er recent een beweging in het reken-wiskunde-onderwijs te signaleren die afschaffing van het aanleren van de standaard-algoritmen bepleit en daarvoor in de plaats 'primitieve' algoritmen wil stellen die op basis van flexibel hoofd- en eigenschapsrekenen door de kinderen zelf geconstrueerd zijn (Plunkett, 1979).

Kort gezegd, voert men hier als belangrijkste

Richtingen	*Micro-niveau*	*Macro-niveau*
1) Cijferonderwijs in het traditionele rekenonderwijs	Op symbolisch niveau direct toewerken naar de standaard-vorm van de algoritme	Toenemende complicering van de opgaven
2) Cijferen in het wiskundeonderwijs op de basisschool	Via toenemende schematisering (blokken, abacus, positieschema's) per deelgeval toewerken naar de standaard-vorm	Toenemende complicering van de opgaven
3) Cijferen volgens Wiskobas	Toenemende complicering van de opgaven op één niveau van schematisering	Toenemende schematisering van de oplossingswijzen leidend naar de standaard-vorm
4) Niet-standaardrichting	Via toenemende schematisering per deelgeval toewerken naar een zelf te bepalen eindvorm	Toenemende complicering van de opgaven, maar dan wel tot een relatief laag niveau van complicering. Frequent gebruik van zakrekenmachine

Figuur 6 *Vier cijferdidactieken*

motief aan, dat het leren van de basisalgoritmen betrekkelijk veel tijd in beslag neemt – te veel tijd omdat men zich met relatief kleine getallen eenvoudig met handig rekenen kan redden en vooral ook omdat we tegenwoordig voor grote getallen een zakrekenmachientje of een zakcomputer ter beschikking hebben. Men zou deze niet-standaard-richting als een moderne exponent van de in de historie bij voortduring werkzame hoofd-reken-beweging kunnen beschouwen.

Geplaatst tegen de achtergrond van het traditionele cijferonderwijs zien de drie nieuwe cijferdidactieken er als volgt uit:

Het is hier niet op de plaats om op de praktische implicaties en de theoretische achtergronden van deze nieuwe cijferdidactieken in te gaan. Het gaat ons er in deze zeer globale aanduiding van andere benaderingswijzen van het cijferen slechts om aan te geven, dat er wel degelijk mogelijkheden zijn om het cijferen fundamenteel anders aan te pakken. En nog wel met middelen die voor een belangrijk deel in de historische ontwikkeling van het cijferen verankerd liggen (Streefland, 1979, 1980). Ook proberen de nieuwe cijferdidactieken een brug te slaan over de hier gesignaleerde kloof tussen het vigerende traditionele cijferonderwijs en de vakdidactische en leertheoretische opvattingen daaromtrent. Met dit alles wil echter niet gezegd zijn dat alle nieuwe pogingen in alle opzichten geslaagd zouden zijn – zeker niet, maar dat is een kwestie waarover we het later zullen hebben.

6.3 *Overzicht*

Het geheel van het cijferen binnen het traditionele rekenonderwijs overziend, concluderen we:

1. de leerstofordening vindt plaats volgens het principe van de progressieve complicering, leidend tot een stap-voor-stap-methodiek van deelgeval naar deelgeval;
2. er wordt direct toegewerkt naar de eindvormen van de algoritmen, van waaruit overigens ook de leerstofstructurering gestalte krijgt;
3. er wordt geen positiemateriaal en er worden geen aanschouwelijke schema's gebruikt;
4. de inzichtelijke grondslag bestaat uit het dunne vlies van de 'verklaring-vooraf' van de procedurehandelingen met daarbij slechts een oppervlakkige aanduiding van de kenmerken van het positiesysteem;
5. er bestaat een grote kloof tussen toentertijd heersende vakdidactische, leertheoretische en psychologische opvattingen aan de ene kant en de onderwijspraktische uitvoering van het cijferen anderzijds;
6. de vakdidactisch georiënteerde ideeën in de periode tot 1960 à 1970 worden niet uitgewerkt in concreet beschikbare leergangen, laat staan dat de houdbaarheid ervan met onderzoeksgegevens gestaafd wordt;
7. de veelheid van onderzoeken op het gebied van het cijferen beperkt zich tot onderzoek naar de meest effectieve cijfermethodieken van eindalgoritmen in standaardvormen, en richt zich vooral ook op knelpunten in de bestaande cijferleergangen, waarbij de traditionele leerstofordening echter geen onderwerp van onderzoek is, met als gevolg dat ook de remediërende aanbevelingen geheel binnen het kader van het bestaande cijferonderwijs gesteld blijven;
8. met de komst van het wiskunde-onderwijs op de basisschool wordt een nieuwe impuls aan de cijferdidactiek gegeven, waarvan echter de vraag, of dit tot een verbetering c.q. grotere effectiviteit van het cijferonderwijs leidt, vooralsnog opengelaten is;
9. in ieder geval kan van het traditionele cijferonderwijs in algemene zin gezegd worden dat het overgrote deel van de kinderen de basisalgoritmen correct leert uitvoeren via het doorlopen van leergangen die globaal één vierde deel van de totale tijd voor het rekenonderwijs op de basisschool in beslag nemen;

0. de kinderen leren dan wel niet precies meer rekenen volgens Bartjens, maar vele traditionele cijferleergangen komen toch in de kern sterk overeen met de mechanistische aanpak van onze nationale rekenmeester.

De samenhang tussen deze tien punten kan tot slot niet beter aangegeven worden dan met de zinsnede waarmee Bartjens 'Cijfferinge' opent: . . .'aldus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Waar of de negen duidelyk zyn, ende de laatste (die men nul ofte niet noemt) wanneer ze alleen staat, van haar zelve niets beduidende, maar gesteld zynde agter eenige van de andere beelden, doet dezelve thienvoudig vermeerderen.' (Bartjens, 1744, p.1).

Noten

1. Vrijwel ieder land heeft zo zijn 'Bartjens' als spreekwoordelijke rekenmeester. De uitdrukking 'volgens Bartjens' kan aldus omgezet worden in 'Nach Adam Riese' (Duitsland), 'd'après Barrème" (Frankrijk), 'according to Cocker' (U.K.), 'according to Gunter' (U.S.A.) ... (Kruizinga, 1940).
2. De aversie tegen positiemateriaal zoals Montessori gebruikt of op zijn minst een zekere terughoudendheid dienaangaande, komt bijvoorbeeld tot uitdrukking in Diels (1929) en Jonges (1956). Voorts wordt het rekenonderwijs tussen de twee wereldoorlogen gekarakteriseerd door z'n onaanschouwelijkheid, wat wel het meest pregnant tot uitdrukking komt in het werk van Bouman en Van Zelm (1918). Hoewel dit in de jaren vijftig veranderde voor het rekenonderwijs in zijn algemeenheid, blijft in het cijferonderwijs wat dit betreft alles bij het oude.
3. Men vindt de algemene principes aan het eind van ieder onderwijzersboekje bij ieder deeltje opgesomd. Bouman en Van Zelm maakten voor die tijd uitzonderlijk veel werk van de handleidingen voor de onderwijsgevenden. Een afzonderlijke bundeling ervan biedt Bouman en Van Zelm (1918).
4. Diels en Nauta hebben zich sterk laten inspireren door 'The Psychology of arithmetic' van Thorndike (1922), die ook het hoofdrekenen hoog in zijn vaandel droeg. In de Sovjet Unie wordt volgens Menchinskaja en Moro (1965) evenzeer grote nadruk op het hoofdrekenen gelegd. Trouwens ook in de historie van het rekenonderwijs heeft men herhaaldelijk het belang van het hoofdrekenen onderstreept (Leen, 1961). En zeer recent wordt er onder invloed van de opkomst van de zakrekenmachine opnieuw een grote plaats aan toegekend (Plunkett, 1979).
5. Ook het besproken leerboek 'Boeiend Rekenen' (Wanders en Bohncke, 1970/6) kan niet als zodanig dienst doen. Bij alle waardering die men voor deze poging kan hebben, moet gezegd worden dat de cijferleergang onvoldoende gestructureerd is. Dat wil zeggen, er staan te weinig aanwijzingen over de niveaus in die de leerlingen doorlopen.
6. We beschikken voor Nederland niet over exacte gegevens over de prestaties van het cijferen. In de V.S. worden tegenwoordig om de vijf jaar zo'n 70.000 leerlingen op hun rekenvaardigheid onderzocht (Carpenter et al, 1975, 1980). Wij schatten de gegevens voor Nederland op grond van buitenlandse onderzoeksgegevens uit tal van andere onderzoeken (Nieuwenhuis, 1948; Schonell en Schonell, 1957; Cox, 1975a, 1975b; Bright, 1978). Internationaal blijken de gegevens sterk overeen te komen.
7. Er zijn niet veel praktijkverslagen bekend van onderwijsgevenden die een alternatieve cijferaanpak gerealiseerd hebben, maar er zijn er wel degelijk enkele. Zie bijvoorbeeld Capps (1962), MacDonald (1977) en Hutton (1977). Hoewel de jaartallen anders suggereren, hebben deze verslagen soms betrekking op het traditionele cijferen van wat oudere datum. Ze kunnen niet als 'hard' constaterend onderzoek aangemerkt worden in de zin van dat van Schonell en Schonell e.a., doch veeleer als kwalitatief construerend onderzoek.

Literatuur

Bartjens, W., *De verniewde cijfferinge.* Leeuwarden: Ferwerda, 1744.

Bouman, P.J. & J.C. van Zelm, *De rekenkundige denkbaarheden in logischen samenhang met – als proeve van toegepaste logica – een rekenmethode voor de lagere school.* Amsterdam: Versluys, 1918.

Bright, G.W., Assessing the Development of Computation Skills. In: M.N. Suyman & R.E. Reys (Ed.), *Developing Computational Skills.* Reston: NCTM, 1978.

Brownell, W.A. en H.E. Moser, *Meaningful vs Mechanical Learning. A Study in Grade III Subtraction.* Durham: Duke University Press, 1949.

Brueckner, L.J., Diagnosis in Arithmetic. In: *34th NSSE Yearbook.* Bloomington, 1935, 269-302.

Capps, L.R., Making division meaningful and logical. *The Arithmetic Teacher,* 1962, *9,* 198-204.

Carpenter, T.P. & T.G. Coburn & R.E. Reys & J.W. Wilson, Results and Implications of the NAEP Mathematics Assessment: Elementary School. *The Arithmetic Teacher,* 1975, *22,* 438-450.

Carpenter, T.P. & H. Kepner & M.K. Corbitt & M.M. Lindquist & R.E. Reys, Results and Implications on the second NAEP Mathematics Assessments: Elementary School. *The Arithmetic Teacher,* 1980, *27,* 10-47.

Cox, L.S., Systematic errors in the four vertical algorithms in normal and handicapped populations. *Journal for Research in Mathematics Education,* 1975a, 202-221.

Cox, L.S., Diagnosing and remediating systematic errors in addition and subtration. *The Arithmetic Teacher,* 1975b, 151-158.

Diels, P.A., Het goed recht der methode. *Paedagogische Studiën,* 1929, *10,* 32-39.

Diels, P.A. en J. Nauta, *Fundamenteel rekenen.* Groningen: Wolters, 1936.

Diels, P.A. en J. Nauta, *Richtlijnen voor het rekenonderwijs op de lagere school.* Groningen: Wolters, 1939.

Friend, J.E., Column addition skills. *The journal of Children's Mathematical Behavior,* 1979, *2,* 29-38.

Gelder, L. van, *Grondslagen van de rekendidactiek.* Groningen: Wolters, 1959.

Glennon, V.J. & L.C. Callahan, *Elementary School Mathematics: A Guide to current Research.* Washington DC: NEA, 1968.

Goffree, F., *Leren onderwijzen met Wiskobas. Ontwikkelingsonderzoek wiskunde en didaktiek op de pedagogische akademie.* Utrecht: IOWO, 1979.
Goffree, F. & A.A. Hiddink & J.M. Dijkshoorn, *Rekenen en Didactiek.* Groningen: Wolters, 1966.
Grossnickle, F.E., Constancy of error in learning division with a two-figure divisor. *Journal of Educational Research,* 1939, 33, 189-196.
Hutton, J., Memoirs of a Maths Teacher 4. Logical Reasoning. *Mathematics Teaching,* 1977, *81,* 8-12.
Jansen, P. en G.W. van den Brink, *Beknopte theorie der rekenkunde.* Groningen: Wolters, 1945/5.
Jong, R. de (Red.), *De abakus.* Utrecht: IOWO, 1977.
Jonges, J., Enkele opmerkingen over het vak rekenen in de lagere school. *Paedagogische Studiën,* 1956, *33,* 353-368.
Kruizinga, J.H., Wie was Willem Bartjens? *Paedagogische Studiën,* 1940, *21,* 257-271.
Kühnel, J., *Neubau des Rechnenunterricht II Bd.* Leipzig: Klinkhardt, 1925/5.
Leen, A., *De ontwikkeling van het rekenonderwijs op de lagere school in de 19de en het begin van de 20ste eeuw.* Groningen: Wolters, 1961.
Lugtmeijer, H.J. en J. Boers, *Naar aanleg en tempo.* Zutphen: Thieme, 1954.
MacDonald, T.H., A general concept internalisation model exemplified by the long division algorithm. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 1977, *8,* 157-166.
Menchinskaja, N.A. en M.J. Moro, Teaching Arithmetic in the elementary school, 1965. In: J.R. Hooten (Ed.), *Soviet Studies in the psychology of learning and teaching mathematics,* 1975, *14,* 73-89.
Menninger, K., *Zahlwort und Ziffer.* Göttingen: Vandenhoeck en Ruprecht, 1958.
Meijer, J.H., *Theorie en praktijk.* Zutphen: Thieme, 1963.
Nieuwenhuis, H., Hoe staat het met ons rekenonderwijs? *Paedagogische Studiën,* 1948, *25,* 363-380.
Plunkett, S., Decomposition and all that rot. *Mathematics in School,* 1979, *8,* 2-6.
Radatz, H., Students' Errors in the Mathematical Learning Process: a Survey. *For the Learning of Mathematics,* 1980, *1,* 16-21.
Reynders, J.M. en J. Snijders, *Functioneel rekenen.* Amsterdam: Versluys, deel VI, 1965/5.
Schonell, F.J. en F.E. Schonell, *Diagnosis and remedial teaching in arithmetic.* Edinburgh: Oliver & Boyd, 1957.
Stahl, R., Die Entwicklung geistiger Fähigkeiten im Mathematikunterricht. In: J. Lompscher (Ed.), *Theoretische und experimentelle geistiger Fähigkeiten.* Berlin: Volkseigener Verlag, 1972.
Streefland, L., Historisch perspektief. In: A. Treffers (Ed.), *Cijferend vermenigvuldigen en delen (1),* Utrecht: IOWO, 1979, 131-154.
Streefland, L., Over het uitlijnen van (reken)leerstof. In: IOWO-team, *De achterkant van de Möbiusband.* Utrecht: IOWO, 1980, 84-92.
Suydam, M.N. en D.J. Dessart, *Classroom ideas from Research on Computational Skills.* Reston: NCTM, 1976.
Thorndike, E.L., *The psychology of arithmetic.* New York: MacMillan, 1922.
Treffers, A. (Ed.), *Cijferend vermenigvuldigen en delen (1).* Utrecht: IOWO, 1979.
Treffers, A., Sorry Cito: over ondeugdelijke leerdoelgerichte toetsen. In: IOWO-team (Red.), *De achterkant van de Möbiusband.* Utrecht: IOWO, 1980.
Turkstra, H. & J.K. Timmer, *Rekendidactiek.* Groningen: Wolters, 1953.
Wanders, W.E. en S. Bohncke, *Boeiend rekenen.* 's-Hertogenbosch: Malmberg, deel 8, 1970/6.
Wertheimer, M., *Productive Thinking.* New York: Harper, 1945.
Wertheimer, M., *Productive Thinking (enlarged version).* London: Associated Book Publishers, 1966.
Woestenenk, P., *Rekendidactiek.* Zwolle: Tjeenk Willink, 1965.

Curriculum vitae

A. Treffers studeerde wiskunde en onderwijskunde, was eerst werkzaam in het voortgezette onderwijs, vervolgens in de periode 1971-1981 medewerker van het Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO), en is vanaf 1 januari 1981 verbonden aan de vakgroep Onderzoek Wiskunde Onderwijs en Onderwijs Computercentrum (OW & OC, subfaculteit wiskunde, Rijksuniversiteit Utrecht).

Hij promoveerde in 1978 op het proefschrift 'Wiskobas doelgericht', over de inhoud en beschrijvingswijze van de doelstellingen van het wiskundeonderwijs op de basisschool volgens Wiskobas.

Adres: Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs & Computercentrum Rijksuniversiteit Utrecht
Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht.

Manuscript aanvaard 9-6-'81.