Heuristisch wiskunde-onderwijs*

A. VAN STREUN
Mathematisch Instituut Rijksuniversiteit Groningen

Samenvatting

In dit artikel wordt gepleit voor wiskunde-onderwijs waarin leerlingen algemene denkmethoden en werkwijzen verwerven voor het oplossen van (wiskundige) problemen. Uitgaande van het onderzoek naar cognitieve aspecten van oplossingsprocessen, gekoppeld aan eigen observaties in tientallen scholen voor voortgezet onderwijs, worden een aantal kernbegrippen voor een didactiek van heuristisch wiskunde-onderwijs beschreven.

Ingegaan wordt op de functie van kennis en vaardigheden bij het oplossen van problemen, op de organisatie van het geheugen, op cognitieve schema's, op de betekenis die begrippen en operaties voor de oplosser hebben en op de mentale voorstelling van een probleemsituatie. De probleemanalyse wordt met een aantal voorbeelden toegelicht en vergeleken met een gangbare aanpak van problemen in het onderwijs. De relatie tussen heuristieken en algoritmen en de rol van beide in heuristisch wiskunde-onderwijs komt aan de orde, evenals een mogelijke onderwijsstrategie voor het onderwijzen van algemene denkmethoden.

1 *Inleiding*

1.1 *Heuristisch wiskunde-onderwijs*

Eén van de belangrijkste en interessantste didactische vragen in het wiskunde-onderwijs is de vraag naar de transfer van de door de leerlingen beheerste kennis en vaardigheden. Dat is de vraag naar de mate waarin het leerlingen lukt hun kennis en vaardigheden te gebruiken in andere situaties, dan die van de context waarin ze geleerd zijn. Die andere situatie kan zowel in de wiskunde zelf voorkomen, als in één van de vele vakgebieden waarin wiskundige methoden worden gebruikt of in het dagelijks leven buiten de onderwijs- of beroepssituatie.

Wat is de oorzaak van het zo vaak vastgestelde verschijnsel, dat relatief weinig leerlingen er in slagen de verworven wiskundige kennis en vaardigheden te gebruiken in probleemsituaties, die afwijken van het voor hen vertrouwde type? Heeft dat misschien ook iets te maken met de wijze, waarop die begrippen en routines zijn onderwezen en geleerd? Is het wiskunde-onderwijs zó in te richten, dat leerlingen beter leren problemen in een onbekende context op te lossen? Zowel voor het optimaliseren van het wiskunde-onderwijs, als voor het functioneren van de verworven wiskundige kennis en vaardigheden in toepassingen, zijn dit kernvragen.

Het *'heuristisch'* wiskunde-onderwijs, zoals dat in dit artikel wordt besproken, heeft tot doel het leren van wiskundige theorie samen te laten gaan met het bevorderen van de bekwaamheid van leerlingen in het oplossen van problemen of het aanpakken van probleemsituaties. Het belangrijkste kenmerk van die problemen of probleemsituaties is, dat ze voor de leerlingen relatief nieuw zijn; niet direct standaard volgens al geleerde procedures oplosbaar. Die problemen worden niet alleen in de verwerkingsfase van het leerproces aangeboden, maar zij zijn veelal zelf het uitgangspunt voor het leren van nieuwe wiskundige begrippen en procedures. In heuristisch wiskunde-onderwijs wordt veel aandacht besteed aan het *expliciet* onderwijzen van algemene denkmethoden bij de probleemanalyse en het oplossen van problemen. Specifieke algoritmische oplossingsmethoden worden alleen onderwezen, als er ook een duidelijk aanwijsbaar leerdoel op langere termijn mee wordt nagestreefd.

Een voorbeeld, ter verduidelijking, ontleend

* De auteur is veel dank verschuldigd aan de leden van de werkgroep voor de didactiek van de wiskunde, die eerdere versies van dit artikel grondig met hem hebben doorgesproken. Met name aan Ir. J. Buitink, Drs. S. Kemme, Prof. dr. W. Schaafsma, J.J. Sloff.

aan de leerstof van klas 3 a.v.o.-v.w.o. De leerlingen hebben kortgeleden de sinusregel en de cosinusregel geleerd en moeten nu het volgende vraagstuk maken. Opgave: Van een driehoek ABC is gegeven dat $a = 3\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{3}$ en $\beta = 45°$.
Te berekenen γ.

Eén van de sterk op het *algoritmiseren* gerichte schoolboekenseries schrijft de leerlingen de volgende oplossingsmethode voor: Gegeven zijn twee zijden en een niet ingesloten hoek, dus geval ZZH. Dat los je op door de sinusregel toe te passen.

Op korte termijn heeft dit algoritmisch voorschrift zeker succes, want de leerlingen behoeven alleen maar het 'geval' op te zoeken en de er bij gememoriseerde 'regel' toe te passen. Een koppeling tussen 'geval' en 'regel' die tot het aanstaande proefwerk wel is te onthouden. En niet veel langer.

In *heuristisch* wiskunde-onderwijs zijn dergelijke problemen een geschikte aanleiding voor het (opnieuw) onder de aandacht brengen van de *probleemanalyse*, als onderdeel van een algemene oplossingsmethode. B.v. als volgt:
'Maak eens een tekening.'
'Wat weet je van die driehoek?'
'Welke eigenschappen ken je?'

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \text{ en}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

'Wat wordt er gevraagd?'
'Welk element van die driehoek kun je wel berekenen?'
'Helpt dat?'
'Oh ja, er is nog een eigenschap, namelijk dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is.'

Op deze manier wordt de oplossing een voorbeeld van een *algemene* denkmethode, wat de transfer naar andere problemen in de hand werkt. Van de analyse van de *gegeven situatie* wordt overgestapt naar het *doel, het gevraagde*, terwijl al *bekende eigenschappen* van de driehoek er bij worden betrokken om het verschil tussen het gegeven en het gevraagde te overbruggen. In de klassesituatie kan deze werkwijze *expliciet* naar voren worden gebracht. In de uitwerking op het bord en in de schriften kan die analyse een neerslag vinden, door b.v. de gegevens, het gevraagde en de eigenschappen in drie kolommen te noteren en in te kleuren.

1.2 *Analyse van oplossingsprocessen*

Het onderzoek naar het verloop van oplossingsprocessen heeft al een lange historie. Selz heeft uit zijn experimentele gegevens een theorie over de grondoperaties van het denken opgebouwd (Selz, 1922). Duncker bestudeerde en rapporteerde over oplossingsprocessen, voornamelijk bij wiskundige problemen (Duncker, 1935). A. D. de Groot heeft in zijn analyse van het denken en de 'intuïtie' van de schaker de oplossingsprocessen van experts (grootmeesters en meesters) in een op Selz voortbouwend theoretisch kader beschreven (De Groot, 1946). In meer recent onderzoek zijn veel bevindingen van Duncker over de probleemanalyse bevestigd (Pushkin, 1972, 1975 en Kuljutkin, 1975).

In het begin van de zestiger jaren is o.a. het werk van Herbert Simon op het gebied van het menselijk denken in de Verenigde Staten een sterke stimulans geweest voor de ontwikkeling van de informatie-procestheorie en de heroriëntering van de Amerikaanse cognitieve psychologie. In dit onderzoek wordt veel gebruik gemaakt van het 'expert-novice' paradigma. De wijze waarop deskundigen in een bepaald vakgebied problemen oplossen, wordt vergeleken met de aanpak van nieuwelingen. In de Sowjet-Unie heeft V. A. Krutetskii jarenlang met zijn medewerk(st)ers leerlingen van 8 tot 18 jaar geobserveerd om de kenmerken van de wiskundige bekwaamheden van de goede oplossers, vergeleken met de zwakke oplossers, op te sporen (Krutetskii, 1976).

De winst voor de didactiek van de wiskunde die uit dit longitudinaal onderzoek van Krutetskii en uit veel onderzoek in de hoek van de informatieprocestheorie is te behalen, vloeit vooral voort uit het feit dat de (klassieke) experimenten met puzzels en laboratoriumopgaven plaats maakten voor het analyseren van de manier waarop leerlingen en deskundigen problemen oplossen, die in onderwijssituaties voorkomen. Problemen, die niet alleen een beroep doen op *oplossingsstrategieën*, maar ook op beheersing van bepaalde *kennis en vaardigheden* uit een zeker vakgebied. Uit dergelijk onderzoek komen belangrijke gegevens naar voren over de in heuristisch wiskunde-onderwijs aan te leren werkwijzen en oplossingsmethoden. Dat zal nader worden toegelicht in dit artikel.

Duidelijk is wel, dat expert-gedrag niet zo maar tot doelstelling van heuristisch wiskunde-onderwijs kan worden uitgeroepen. Wat experts *op hun gebied* aan probleemoplossend gedrag laten zien, is een produkt van jarenlange ervaring. Voor de expert zijn vele denkstappen sterk verkort, hij denkt zelfs in verkorte structuren. De expert 'ziet' wat anderen bewust moeten afleiden, zijn 'intuïtie' of 'inspiratie' is niet los te denken van zijn vroegere ervaringen en verworven kennis. Het is voor de expert meestal niet goed mogelijk om zich de herkomst van zijn invallen bewust te maken. Uit de beschrijving en analyse van het oplossingsgedrag van de expert en uit het verschil met het oplossingsgedrag van de nieuweling valt niet rechtstreeks af te leiden, wat de onderwijsdoelen en de werkwijzen in heuristisch wiskunde-onderwijs moeten zijn. Daarvoor zijn de kwalitatieve verschillen tussen expert en nieuweling te groot.

1.3 *De kernbegrippen van een didactiek*

In dit artikel zal een verbinding worden gelegd tussen een aantal belangrijke gegevens uit het onderzoek naar karakteristieken van oplossingsprocessen èn de didactiek van het leren oplossen van wiskundige problemen in een onderwijssituatie. Het psychologische begrip *'mentale voorstelling van een probleemsituatie'* bewijst in die beschrijving van een didactiek van heuristisch wiskunde-onderwijs goede diensten. In het kort gezegd is die *'mentale voorstelling'* te definiëren als het probleem, zoals het zich aan die bepaalde oplosser voordoet. Met alle ideeën, associaties en anticipaties, die daarbij horen. Die mentale voorstelling zal aanvankelijk erg schraal zijn met storende associaties, maar zij kan zich tijdens het oplossingsgebeuren verder ontwikkelen en verrijken tot de oplossing is bereikt.

Bij de eerste inspectie, bij de probleemanalyse en tijdens het werken aan het probleem zal de voor dat speciale probleem *relevante kennis* moeten worden geactiveerd. Uit de analyses van oplossingsprocessen is gebleken, dat de wijze waarop de kennis van het vakgebied waar het probleem een beroep op doet in het *lange termijngeheugen* is georganiseerd en de daarmee samenhangende kwaliteit van de beheersing van die begrippen, feiten, stellingen, regels, van grote invloed is op het verloop van het oplossingsproces. Die kwaliteit heeft alles te maken met het gehele netwerk van begrippen, principes, regels en methoden op dat specifieke gebied, waar de probleemoplosser een beroep op moet doen. Het helpen opbouwen van een rijk netwerk of *schema* met behulp van onderwijs verdient veel aandacht. Een ander aspect van die kwaliteit is de *betekenis*, die de te gebruiken begrippen en operaties al dan niet voor de oplosser hebben. Voor de vorming van een *adequate mentale voorstelling* is die betekenis van invloed.

In heuristisch wiskunde-onderwijs zal de *probleemanalyse* uiteraard expliciet onderwerp van onderwijs zijn. Tijdens de *probleemanalyse* vormt zich de *aanvankelijke mentale voorstelling* van de probleemsituatie en wordt kennis uit het geheugen gemobiliseerd. Nuttige werkwijzen bij het analyseren van het probleem en bij de ontwikkeling van de mentale voorstelling in de richting van de oplossing worden *heuristieken* genoemd, terwijl *algoritmen* het probleem volgens een standaardprocedure tot een oplossing brengen. De onderlinge verhouding tussen algoritmen en heuristieken, met hun relatie tot de probleemanalyse, zal nader worden besproken.

De vaststelling dat een aantal duidelijk omschreven denkmethoden in heuristisch wiskunde-onderwijs dient te worden onderwezen, is één kant van de zaak. De *uitvoering* van dat onderwijs vraagt om een goed doordachte analyse van de wijze waarop die denkmethoden kunnen worden onderwezen en geleerd. Daarover meer in het slot van dit artikel. Nu eerst een tweetal voorbeelden om de genoemde begrippen te verhelderen.

Een fragment van een video-opname in een tweede klas atheneum. Een groep meisjes is bezig met het oplossen van eerste graads vergelijkingen. Het zijn Carla, Anneke en Liesbeth.

Carla: '$x + 6 = -4$
$$\begin{array}{r} 6 = \;\;6 \\ \hline x = 10 \end{array}$$
Zo, som 2.'

Anneke: 'Weet je wat ik zo gek vind? Moet je er 6 aftrekken en is dat nu -10? Als je 6 aftrekt . . .'

Carla: 'Ja, $-4-6$. Nee, dat wordt $+10$!'

Anneke: 'Volgens mij niet.'

Liesbeth: 'Ja, volgens mij wel. Dat doe je met die luciferstokjes.'

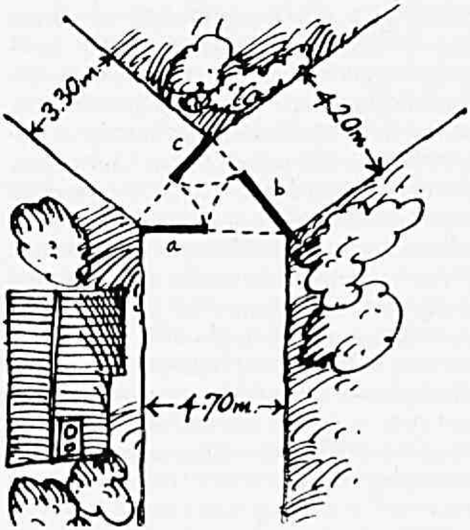
Anneke: 'Waar zijn de antwoorden?'
Liesbeth: '−10. Het klopt wel.'
Carla: 'Hoe weet je dat?'
Liesbeth: 'Bij de antwoorden!'
Anneke: 'Ja, dat vind ik ook.'
Carla: 'Hé, waar staat dat?'
Liesbeth: 'Som 2. Als je haakjes hebt, dan . . .'
Carla: 'Ja, met keer was dat. Met keer was dat met die luciferstokjes.'

Bij navraag bleek dat Liesbeth en Carla iets onthouden hadden van de regel dat $- \times - = +$, een regel die geïllustreerd was met het leggen van twee luciferstokjes in de vorm van een plusteken. Dat opereren met regels, die geen *betekenis* hebben voor de lerende is een bekend verschijnsel in het wiskunde-onderwijs. De vorming van een *adequate mentale voorstelling* van de opgave $-4-6$ (voor deze meisjes is deze opgave op dit moment een probleem) komt niet tot stand. Daarvoor is het weer oproepen van de *betekenis* van de negatieve getallen en van de operatie aftrekken noodzakelijk. Een *adequate mentale voorstelling* kan in dit voorbeeld het bekende beeld van de getallenlijn omvatten, met het kop-staart leggen van de vectoren -4 en -6. Of het denkmodel van de heksenketel, waar warme en koude blokjes in gedaan of uitgehaald worden, zodat het heksenbrouwsel telkens één graad in temperatuur stijgt of daalt (zie Moderne Wiskunde, deel 1, nieuwste versie). Of het denkmodel van schuld en bezit. Of dat van temperatuur of van hoogte. In heuristisch wiskunde-onderwijs zal niet snel worden gegrepen naar het weer opnieuw inslijpen van de regeltjes, dus naar de algoritmiek van het rekenen met negatieve getallen, zonder een bijbehorende betekenis, die de vorming van adequate mentale voorstellingen mogelijk maakt.

Nog een voorbeeld. Nu een opgave ontleend aan materiaal van het I.O.W.O. (zie Figuur 1).

De oplossing van dit probleem vraagt om een *probleemanalyse*. Een geroutineerd oplosser van redactievraagstukken zal na inspectie van de opgave al snel naar een oplossingsmethode grijpen, waarbij de lengte van één hek op x meter wordt gesteld (Of wellicht werkt hij met drie onbekenden, x, y, z). Een leerling uit de onderbouw van het voortgezet onderwijs staat – zoals zo vaak bij redactievraagstukken – voor grote problemen. Een *algoritme* is

Op elk van de drie hoeken van de driesprong heeft men een draaihek opgehangen aan een paal en wel zo dat de doortrekkende kudden vee telkens één weg afgesloten vinden. Zie de tekening. Hoe breed is elk van deze drie hekken?



Figuur 1 *Proberen met getallenvoorbeelden*

niet direct te gebruiken en de vorming van een goede mentale voorstelling van de probleemsituatie is moeilijk. Een *heuristiek*, namelijk het proberen met een getallenvoorbeeld, kan helpen. 'Neem maar eens een getal voor de lengte van hek a. Kun je nu de lengte van hek b berekenen? En van hek c? Is nu aan al de eisen van de situatie voldaan? Probeer nog eens een waarde voor de lengte van hek a.' Op het bord of in de groepjes leerlingen worden zo de pogingen verzameld in een tabel (zie Tabel 1)

Tabel 1 *De heuristiek van het getallenvoorbeeld*

hek a	hek b	hek c	b + c (= 4,20 m)
3,00 m	1,70 m	0,30 m	2,00 m
1,00 m	3,70 m	2,30 m	6,00 m
2,00 m	2,70 m	1,30 m	4,00 m
1,90 m	2,80 m	1,40 m	4,20 m
....	....	....	....
....	....	....	....

Terecht merken De Corte en Somers op, dat een dergelijke *heuristiek* (door hen 'schatten' van het antwoord genoemd) bij het oplossen van redactievraagstukken de *probleemanalyse* bevordert en het *controleren* van de oplossing achteraf stimuleert (De Corte en Somers, 1981).

De leerlingen kunnen een goede mentale voorstelling van de structuur van de probleemsituatie vormen, wat de eventuele overgang naar een formele oplossing door middel van een eerste graads vergelijking beter bereikbaar maakt. De structuur van die oplossing is immers dezelfde. Neem voor de lengte van hek a x m. Wat kun je dan zeggen van de lengten van b en c? Wat moet er bovendien nog gelden? Enz.

2 *De organisatie en de kwaliteit van de benodigde kennis en vaardigheden*

2.1 *Kennis en het oplossen van problemen*

Psychologische experimenten met schuifpuzzels, luciferstokjes, raadsels e.d. die geen voorkennis vereisen, missen een belangrijk element, dat wel verbonden is met het oplossen van problemen in het onderwijs. De sterke verwevenheid tussen de beheersing van de te gebruiken wiskundige begrippen en de te hanteren oplossingsstrategieën bleek o.a. uit het onderzoek naar de oplossingsprocessen van eerste jaars wiskundestudenten in Groningen (Doornbos en Van Streun, 1981). R. E. Mayer concludeert uit een aantal empirische experimenten dat juist in leerprocessen, die een creatief oplossen van problemen willen bevorderen, de leerlingen een rijk schema aan begrippen en relaties moeten verwerven (Mayer, 1974, 1977). Ook andere onderzoekers wijzen erop dat het vermogen om problemen op een bepaald gebied te kunnen oplossen sterk verbonden is met de kwaliteit en de organisatie in het geheugen van de benodigde kennis en vaardigheden uit dat gebied. Zie b.v. Greeno, 1980 of Elshout en Wielinga, 1978.

Voor een didactiek van heuristisch wiskunde-onderwijs zijn onderzoeksgegevens over het *geheugen*, over *cognitieve schema's*, over de *betekenis* van begrippen en operaties voor de oplosser en over de *mentale voorstelling* van een probleemsituatie van belang.

2.2 *Het geheugen*

In het *lange-termijn-geheugen* wordt de informatie gedurende lange tijd vastgehouden, waarbij de opgeslagen informatie langs verschillende ingangen bereikbaar blijft. Het korte-termijn-geheugen of *werkgeheugen* neemt nieuwe informatie op en kan deze in ongeveer 8 seconden overdragen aan het lange-termijn-geheugen. Informatie uit het lange-termijn-geheugen, die b.v. voor het oplossen van een probleem beschikbaar moet komen, wordt in het werkgeheugen actueel gemaakt.

Gezien de beperkte omvang van het werkgeheugen is het bij het aanpakken van een probleem van bijzonder belang welke informatie uit het lange-termijn-geheugen beschikbaar komt. Krutetskii vond dat één van de karakteristieke verschillen tussen leerlingen die zeer goede, gemiddelde of zeer zwakke prestaties leveren in het Russisch wiskunde-onderwijs te herleiden valt tot de werking van het geheugen (Krutetskii, 1976). Succes in de wiskunde berust niet op het onthouden van een groot aantal figuren, getallen, formules, eigenschappen en concrete feiten. Het 'wiskundig geheugen', zoals Krutetskii het noemt, van bekwame leerlingen heeft een '*gegeneraliseerd*' karakter en heeft betrekking op typen problemen, algemene oplossingsmethoden, redeneerwijzen, bewijsmethoden, logische samenhangen. Bekwame leerlingen kunnen informatie uit het lange-termijn-geheugen oproepen op verschillend niveau van *globaal* naar gedetailleerd. (Bv. de oppervlakteformule van een driehoek heeft iets te maken met twee zijden en een ingesloten hoek, zeer globaal, tot de gedetailleerde formule $\frac{1}{2}$ a b sin γ.)

Ook de waarnemingen van J. H. Larkin en T. Reif van oplossingsprocessen van experts (in de natuurkunde) suggereren soortgelijke karakteristieken van het oplossingsgedrag van deskundigen (Larkin en Reif, 1979). Experts benaderen het probleem *eerst globaal* en tamelijk vaag met woorden of plaatjes, waarna een proces van *opéénvolgende verfijningen* volgt. De kennis van de experts blijkt zo gestructureerd te zijn, dat zij dezelfde informatie telkens op verschillende niveaus van gedetailleerdheid, in snelle wisselwerking, kunnen hanteren.

Voor de *didactiek* van heuristisch wiskunde-onderwijs, lijkt het van belang om de leerlingen te leren het oplossen van problemen hiërarchisch te benaderen van globaal naar gedetailleerd. Daarmee corresponderend zullen de leerlingen ook moeten worden onderwezen in het beschrijven van hun kennis op verschillende niveaus van gedetailleerdheid. Soms blijken vage, verbale of visuele beschrijvingen bijzonder krachtige hulpmiddelen te zijn bij het maken van de essentiële vroege beslissing over de *richting* waarin de oplossing kan worden gezocht.

Een voorbeeld. Vier leerlingen uit 4 atheneum zijn onder begeleiding bezig met de volgende opgave uit de herhalingsparagraaf. De opgave luidt:

a. Teken de grafiek van de functie f van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ $x \rightarrow 2\sqrt{x}$.
b. Los de beide ongelijkheden $2\sqrt{x} > \frac{1}{2}x + 1$ en $2\sqrt{x} > \frac{1}{2}x + 3$ op, voor $x \in \mathbb{R}$.

Het eerste onderdeel is voor hen op dit moment standaard. Variaties op het tweede onderdeel zijn al voorgekomen, alleen niet in deze vorm. Syrike begint het tweede onderdeel onmiddellijk met het kwadrateren van de beide leden van de ongelijkheid $2\sqrt{x} > \frac{1}{2}x + 1 : 4x > \frac{1}{4}x^2 + x + 1$.

Begeleider: 'Is dat niet wat riskant, wat je daar gedaan hebt? Kan dat zo maar?'
Syrike: 'Ja, ik dacht van wel.'
Erik Jan: 'Dat is ons wel zo verteld.'

De vier leerlingen gaan verder en passen op de ongelijkheid $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 1 < 0$ de a,b,c formule toe en noteren tenslotte $x_{1,2} = 6 \pm 4\sqrt{2}$.

Erik Jan: 'Wat moet je nu verder doen?'

Er ontstaat een discussie over wat de oplossing $x_{1,2} = 6 \pm 4\sqrt{2}$ nu eigenlijk voorstelt. De voortgang stagneert. Een impasse.

De begeleider stelt een aantal vragen: 'Wat zijn we nu eigenlijk aan het doen? Je hebt in het eerste onderdeel al de grafiek van $x \rightarrow 2\sqrt{x}$ getekend. Kun je nu ook de grafieken van $x \rightarrow \frac{1}{2}x + 1$ en $x \rightarrow \frac{1}{2}x + 3$ schetsen? Kun je in de tekening aangeven, wat er nu met die ongelijkheden wordt gevraagd? Wat hebben jullie nu eigenlijk berekend?'

De schets van de probleemsituatie en de vertaling van de ongelijkheid naar de tekening helpt bij de vorming van een *globale mentale voorstelling* van wat er in de probleemsituatie aan de hand is. De gevonden waarden $x_{1,2} = 6 \pm 4\sqrt{2}$ worden nu herkend als x-coördinaten van de snijpunten van de grafieken en de oplossing van de ongelijkheid volgt snel. De gebruikte *heuristiek*, het schetsen van de probleemsituatie en het herformuleren van het probleem, helpt ook om bij tal van andere problemen tot een goede aanpak te komen. Zo'n heuristiek is onderwijsbaar en valt te leren. In de didactiek zal het belang van die aanvankelijke vorming van een globale mentale voorstelling worden benadrukt, omdat deze een *sturende* en *controlerende* functie in het verdere verloop van het oplossingsproces heeft.

2.3 *Cognitieve schema's*

De kennis van goede probleemoplossers op een bepaald vakgebied blijkt meer georganiseerd te zijn in *samenhangende* netwerken van begrippen, principes en regels dan in afzonderlijke onthouden principes of formules. Zo'n netwerk of *schema* wordt actief bij het werken aan een probleem, zodat alle van belang zijnde begrippen en methoden in het werkgeheugen beschikbaar komen. Deze kennis wordt *operationeel* gemaakt voor het toepassen bij het oplossen van problemen doordat de begrippen, stellingen en methoden in die schema's als het ware van een *index* zijn voorzien, zodat vanuit het probleem die informatie goed bereikbaar is. Ongeoefende, slechte, probleemoplossers beschikken niet over dergelijke schema's; zij pakken het probleem *'mechanisch'* aan en redeneren zonder inzicht in de gehele kennisstructuur.

Voor de didactiek ligt hier een bekend aanknopingspunt. In het Nederlandse wiskunde-onderwijs hebben de auteurs Bos en Lepoeter (geïnspireerd door het werk over oplossingsmethoden van Selz en van Kohnstamm) in hun meetkundeboeken de theorie na de deductieve opbouw opnieuw geordend, zodat deze operationeel van een 'index' werd voorzien ten behoeve van het oplossen van meetkundige problemen. Voor het berekenen en bewijzen in meetkundige vraagstukken werd zó stapsgewijs een samenhangend geheel van aanwijzingen opgebouwd. Als in een probleem moest worden bewezen, dat twee hoeken gelijk waren, kon de leerling teruggrijpen naar de algemene vraag: 'Hoe bewijst men dat twee hoeken gelijk zijn?' Het antwoord op die vraag vormde een soort index van alle mogelijkheden, die in de verschillende hoofdstukken èn boeken in de theorie en de vraagstukken waren voorgekomen. Bij déze vraag zag de *operationalisering* er als volgt uit:

a) Met congruentie.
b) Met de stelling: als twee driehoeken twee hoeken gelijk hebben, dan hebben ze ook de derde hoek gelijk.
c) Met gelijkvormigheid.

d) Met de stelling van de gelijkbenige driehoek.
e) Met bogen, ook als in de figuur geen cirkel voorkomt, maar deze erbij gedacht kan worden.

Ook Landa constateerde bij het meetkunde-onderwijs dat begrippen en stellingen niet gerelateerd waren aan werkwijzen en operaties, die bij het oplossen van problemen noodzakelijk zijn (Landa, 1976). In zijn onderwijsexperiment ontwierp hij naast een reeks aanwijzingen voor de leerlingen die betrekking hadden op de probleemanalyse en het gebruik van heuristieken, eveneens een operationalisering van de vlakke meetkunde, die een treffende gelijkenis vertoonde met de verzameling aanwijzingen van Bos en Lepoeter op dit terrein.

In de praktijk van het wiskunde-onderwijs botst het opbouwen van samenhangende schema's vaak met de training in specifieke technieken (algoritmen) en de opsplitsing van de leerstof in kleine eenheden. Docenten en auteurs van leerboeken hebben sterk de neiging om leermoeilijkheden te voorkomen, door complexe taken, ideeën of onderwerpen op te splitsen in reeksen van kleine, afzonderlijke leereenheden. Die elk afzonderlijk minder moeilijkheden voor de leerlingen opleveren, maar de *fragmentarische* aard van de organisatie van de wiskundige kennis in het geheugen van de leerlingen versterkt. Het succes op korte termijn legt de grondslag voor ernstiger moeilijkheden in de toekomst. In de bespreking van de relatie tussen heuristieken en algoritmen komt dit punt weer aan de orde. Op dit moment volstaat de opmerking, dat een kritische analyse van de leerstof nodig is op onderlinge samenhang, op voldoende integratiemomenten en op een duidelijke operationalisering voor het gebruik van de begrippen, eigenschappen en regels bij het oplossen van problemen.

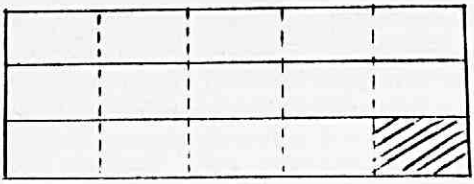
2.4 *Betekenis en mentale voorstelling*

Een bekend verschijnsel in het wiskunde-onderwijs is dat leerlingen wiskundige begrippen en operaties wel formeel kennen en er formeel mee opereren, maar dat die begrippen geen *betekenis* voor de lerende hebben. Leerlingen opereren klakkeloos met algebraïsche symbolen, de zogenoemde 'banketletteralgebra', wat opvalt als er iets mis gaat zoals bij $a^2 + a^2 = 2a^4$, $(x + 7) : x = 7$, $\sqrt{(a + b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ enz. Leerlingen werken met betekenisloze regels, zoals in §1.3 al is geïllustreerd (de luciferstokjes). Wat dan weer opvalt, als deze regels verkeerd worden toegepast, zoals in $-7 + 11 = -4$, want + en − geeft −. Leerlingen (en studenten) reproduceren abstracte definities, zonder er ook maar één voorbeeld van te kunnen geven. 'This *nonunderstanding performance* breaks down as soon as any stress is put on it. If students are given a problem in a slightly different form than they are used to, they won't be able to do it' (Davis, 1980). In de publikaties van het bekende 'Madison Project', waar R. B. Davis directeur van is, wordt uitgebreid gerapporteerd over de tekortkomingen van het gangbare wiskunde-onderwijs, dat vooral is gericht op het manipuleren met symbolen, terwijl de begripsvorming te weinig aandacht krijgt.

Dit *handelen zonder inzicht*, dat in nagenoeg elke wiskundeles valt op te merken, is voor de didactiek van het wiskunde-onderwijs een hoofdprobleem. In zijn plenaire toespraak voor I.C.M.E. IV in Berkeley over 'Major Problems of Mathematics Education' formuleerde Freudenthal het als volgt: 'How to keep open the sources of insight during the training process. How to stimulate retention of insight, in particular in the process of schematising?' (Freudenthal, 1981).

Voor het goed kunnen oplossen van problemen is het kunnen geven van een *inhoud*, een *betekenis* aan de formeel beheerste begrippen uit de voorgelegde problemen een voorwaarde voor de vorming van een adequate *mentale voorstelling* (Doornbos en Van Streun, 1981). Ook dat speelt in iedere wiskundeles. Waar doet de wiskundedocent een beroep op als voor een leerling de uitwerking van $3 : \frac{1}{5}$ een probleem blijkt te zijn? Op de *regel*? Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde? Of op een *betekenis* van het delen ('Hoeveel maal gaat $\frac{1}{5}$ in 3?'), gevolgd door het helpen bij de vorming van een adequate mentale voorstelling met gebruikmaking van een betekenis van de breuk $\frac{1}{5}$? Zie Figuur 2.

Een vergelijking tussen het hier gebruikte theoretische begrip '*mentale voorstelling*' en een aantal verwante begrippen is nu op zijn plaats. In dit artikel wordt onder 'mentale voorstelling' het geheel aan ideeën en visuele, abstracte, symbolische of numerieke 'beelden' verstaan, dat bij die bepaalde oplosser meer of



Figuur 2 *Een betekenis van* $3 : \frac{1}{5}$

minder bewust aanwezig is. Tijdens het werken aan het probleem kan die mentale voorstelling zich verder ontwikkelen, totdat de oplossing wordt 'gezien'. Het begrip 'mentale voorstelling' is verwant met het begrip '*interne representatie*', wat o.a. veel wordt gebruikt in de informatieprocestheorie. Een 'interne representatie' omvat het probleem in zijn gegeven vorm, gewenste eindresultaten, alle deducties uit de gegevens en tussentoestanden (McClintock, 1979). Er is ook een duidelijke verwantschap met het door De Groot gebruikte begrip '*totaalschema*', dat zich tijdens het oplossingsproces bij de oplosser ontwikkelt en waarin alle voor de oplosser wezenlijke doel- en probleemmomenten zijn opgenomen (De Groot, 1946). Dit 'totaalschema' bevat de gehele actuele probleemstructurering met alle anticipaties betreffende de oplosbaarheid en de moeilijkheid van het probleem, eventuele toepasselijke methoden e.d. Ook andere onderzoekers van oplossingsprocessen blijken voor de beschrijving van wat er in feite gebeurt bij het oplossen van problemen behoefte te hebben aan een analoog begrip. Zo spreekt David Tall over '*the concept image*', dat een leerling van een begrip heeft (Tall, Vinner, 1981). In de studie over het aanpakgedrag bij het oplossen van problemen in de wiskunde en de natuurkunde gaat H. Verstralen uitvoerig in op de relatie tussen taal en *betekenisveld*, aan het ontwikkelen van betekenis bij een taal zoals in de wiskunde en aan de vorming van een 'spraakloze voortzetting' van een probleemsituatie (Verstralen, 1980, 1981). Theoretisch geïnteresseerden kunnen in een artikel van P.N. Johnson-Laird over '*mental models*' beschouwingen vinden over de relatie met 'meaning' en 'propositional representations' (Johnson-Laird, 1980).

Mogelijke beïnvloeding van die mentale voorstellingen vraagt om de *koppeling* van stukken *leerstof* aan *denkmodellen* (zoals in §1.3 aangeduid voor negatieve getallen) en *paradigmatische voorbeelden*, die in de vorming van een mentale voorstelling door de leerling een sturende en controlerende rol kunnen vervullen. (Zie eveneens Di Sessa, 1979). Ook het leren vertalen naar een andere, b.v. visuele, representatie, kan de bekwaamheid in het oplossen van problemen versterken. Paige en Simon (1966) rapporteren dat leerlingen, die er in slaagden om bij ingeklede vergelijkingen een tekening te maken zekerder en sneller de juiste oplossing bereikten. Wel moeten de didacticus en de docent zich goed realiseren, dat er grote verschillen bestaan in de aard van de mentale voorstellingen van leerlingen. Krutetskii (1976) onderscheidt leerlingen naar het meetkundige type, het analytische type en het harmonische type. In zijn experimenten bleken de bekwame leerlingen grotendeels van het harmonische type te zijn, maar onder die bekwame leerlingen kwamen ook leerlingen van het meetkundige (sterk visueel gerichte) en van het analytische type voor. De docent en de didacticus doen er dan ook goed aan om een rijke variatie in denkmodellen of *metaforen* aan te bieden, opdat zoveel mogelijk leerlingen daar aanknopingspunten voor hun wijze van denken in kunnen vinden.

3 *De probleemanalyse*

3.1. *Een gangbare aanpak*

Tijdens de *probleemanalyse* – een centrale activiteit in het heuristisch denken – verkent de oplosser het probleem min of meer bewust. Het onderzoek van de gegevens (*situatie-analyse*) en van datgene wat gevraagd wordt (*doelanalyse*), leidt tot de vergelijking van de gegeven situatie en het doel (*conflictanalyse*). Een eerste mentale voorstelling van wat er aan de hand is in het probleem wordt gevormd.

Door het werken met leerlingen binnen en buiten de onderwijssituatie ben ik er van overtuigd geraakt dat de opmerkingen van Galperin over het leren creatief te denken de *gangbare probleemaanpak* goed karakteriseren (Galperin, 1979). Hij merkt op, dat de oplosser geneigd is direct naar de oplossing te zoeken en daarom wordt de oplossing niet gevonden. Eerst dient men zich, aldus Galperin, af te vragen wat er gegeven is en hoe de voorwaarden van het probleem zich tot elkaar verhouden. In ons onderzoek naar oplossingsprocessen van eerstejaars wiskundestudenten valt eveneens de afwezigheid van een systematische probleemanalyse vaak te signaleren. Terwijl het direct proberen van een oplossingsmethode vaak de verdere voortgang blokkeert, omdat steeds op dat eerste idee wordt teruggekomen (Doornbos en Van Streun, 1981). Vaags komt in zijn studie van het oplossen van technische problemen tot de conclusie dat slechte probleemoplossers achtereenvolgens oplossingsschema's voor heel specifieke problemen uitproberen, waarbij de toepassing van een algemenere denkmethode (zoals een bewuste probleemanalyse) bij hen wordt geblokkeerd door de training in specifieke technieken (Vaags, 1975). Een soortgelijke aanpak bij „zwakke" leerlingen beschrijft Krutetskii (1976).

Verscheidene auteurs zijn van mening dat deze gangbare aanpak van problemen sterk wordt bevorderd door het (wiskunde-)onderwijs en het onderwijssysteem met een sterke nadruk op feitenkennis, het correcte antwoord en het systeem van beloning en straf (Bruner, 1962). J. van Dormolen spreekt in dit verband van *beloning gerichtheid*, in de hand gewerkt door het maken van lange rijen gelijksoortige sommetjes, het beloond worden voor die prestatie en het ervaren dat op korte termijn met klakkeloos geleerde trucs succes kan worden geboekt (Van Dormolen, 1975). Ook N. Biermann, H. Bussmann en H. W. Niedworok (1977) zijn van mening dat het huidige (in hun geval Westduitse) wiskunde-onderwijs de leerlingen zo heeft gevormd, dat zij er bijna altijd op uit zijn zo snel mogelijk oplossingsmethoden voor heel specifieke typen opgaven te verwerven. Wat naar hun mening de ontwikkeling van het produktief vermogen weinig ruimte geeft en de onmacht bij niet onmiddellijk te plaatsen opgaven versterkt.

Een voorbeeld van dat vragen en zoeken naar de laatste truc uit de goocheldoos in een gewone klassesituatie. Klas 2 atheneum.
Op bord staat uitgewerkt:

$\sqrt{62} \cdot \sqrt{93} = \sqrt{31 \cdot 2} \cdot \sqrt{31 \cdot 3} = 31\sqrt{6}$
$\sqrt{8} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 2} \cdot \sqrt{4 \cdot 3} = 4\sqrt{6}$
$\sqrt{30} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{15 \cdot 2} \cdot \sqrt{15} = 15\sqrt{2}$

Een vinger van één van de betere leerlingen: 'Meneer, de factor, die er voor moet, die krijg je zeker door van de grootste de kleinste af te trekken.'

Een bijlessituatie. Een studente (Jeanette) helpt Rinse, die de overstap van mavo-1 naar havo-2 heeft gemaakt. Op de mavo was hij erg goed, maar nu gaat het slecht. Alleen rijtjes van dezelfde soort sommen lukken goed, tenminste als de eerste is voorgedaan.

J.: Wat is $(a + b)^2$?
R.: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. De haakjesmethode.
J.: Hoezo? Haakjesmethode?
R.: Nou, $(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3$.
J.: Ja, maar keer is toch een heel andere bewerking dan optellen?
R.: Oh. Dus de haakjesmethode mag alleen maar met keer.
J.: Je wilt de haken wegwerken. Schrijf het eens helemaal uit. Dan zie je wat er gebeurt. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$. Hoe reken je dat uit?
R.: Haakjesmethode.
J.: Hoe dan?
R.: Eerst $a \cdot a$, dan $a \cdot b$, dan $b \cdot a$ en dan nog $b \cdot b$.
J.: Dus wat heb je dan?
R.: $a^2 \cdot 2ab \cdot b^2$.
J.: Is dat wel goed?
R.: Ja toch, $a \cdot a = a^2$, $ab + ab = 2ab$ en $b \cdot b = b^2$?
J.: Jawel, maar je hebt overal · tussen staan.
R.: Is dat fout?
Enz., enz.

Vervolgens gaat Jeanette proberen om van voren af aan een meer adequate mentale voorstelling bij Rinse op te bouwen. In dit geval middels het schematiseren vanuit het denkmodel van oppervlakteberekening.
Zie Figuur 3.

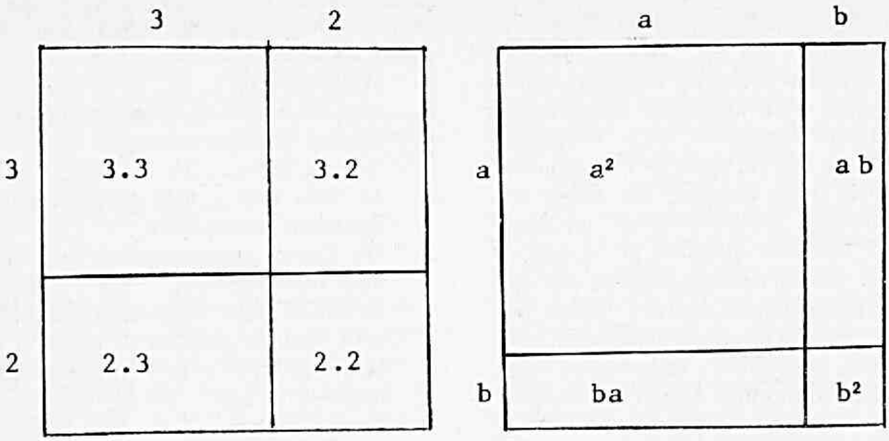
Het slotwoord van Rinse was: 'Nou, zo had ik het nog nooit bekeken. Met zo'n tekening. Nu zie je tenminste wat je doet.'

Christa, 4 atheneum, klaagde: 'Ik probeer altijd maar te onthouden, wat ik bij zo'n soort vraagstuk achtereenvolgens moet doen. Waarom dat moet, weet ik niet. Alleen zijn de vraagstukken op het proefwerk net even anders en dan weet ik het niet meer.'

De leerlingen, die in het Madisonproject werden geïnterviewd, verklaarden dat 'one does mathematics by following directions and not by being *clever*, nor by *thinking* about what one is doing' (Davis en McKnight, 1980).

3.2 *Een tweetal uitgewerkte voorbeelden*

Landa bespreekt ergens (Landa, 1972) een aantal voorbeelden van vragen, die het heuristisch denken bij de leerlingen al dan niet kunnen stimuleren. Het eerste voorbeeld wordt nu



$0 = 9 + 6 + 6 + 4$
$0 = (3 + 2)^2$

$0 = a^2 + ab + ba + b^2$
$0 = (a + b)^2$

x	a	b	
a	a^2	ab	
b	ba	b^2	

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

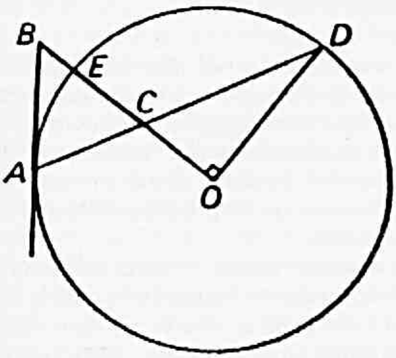
Figuur 3 *Een betekenis voor* $(a + b)^2$

verder uitgewerkt.
Zie voor de opgave Figuur 4.

Landa gaat er van uit dat de leerling alle mogelijke oplossingspogingen heeft ondernomen, allerlei hulplijnen heeft getrokken, maar niet in staat is geweest de oplossing te vinden. De leraar begint nu de leerling vragen te stellen om hem op de juiste weg te brengen en hem te leren in het algemeen zulk soort opgaven op te lossen. Landa geeft de volgende dialoog.

Leraar: Tot wat voor figuur behoren de lijnstukken AB en BC?
Leerling: Tot driehoek ABC.
(De eerste vraag heeft betrekking op de gegeven situatie, *situatie-analyse*.)
Leraar: Wanneer zijn de zijden AB en BC in de driehoek ABC gelijk?
Leerling: Als die driehoek gelijkbenig is.
Leraar: En wat moet je weten om te bewijzen, dat een driehoek gelijkbenig is?
Leerling: Dat hoek BAC gelijk is aan hoek BCA.
(Het doel, namelijk het bewijs dat AB = BC, wordt nu nader geanalyseerd en vervangen

In een cirkel met het middelpunt O is de koorde AD getrokken. Punt D is verbonden met O. Uit O is loodrecht op OD de straal OE getrokken en verlengd tot hij de raaklijn snijdt (in punt B) die de cirkel in punt A raakt. Te bewijzen: AB = BC'.



Figuur 4 *Een voorbeeld van Landa*

door een daar aan gelijkwaardige bewering. *Doelanalyse* met gebruikmaking van *relevante kennis*. Namelijk van de eigenschap dat een driehoek gelijkbenig is, als de basishoeken gelijk zijn.)

Leraar: Hoe kun je de gelijkheid van die hoeken bewijzen?

Leerling: Zwijgt.

(Het probleem is getransformeerd, maar nu is er behoefte aan kennis in *operationele* vorm. Zie het voorbeeld van Bos en Lepoeter in §2.3.)

Leraar: Kijk eens of je hier niet de stelling kunt gebruiken, dat twee grootheden gelijk zijn, als zij gelijk zijn aan een derde grootheid? Wat zou je in dit geval moeten bewijzen?

(Ook Bos en Lepoeter gaven in hun schoolboeken dergelijke *algemene oplossingsschema's*, zoals: Als a = c en b = c dan is a = b.)

Leerling: Dat hoek BAC gelijk is aan hoek DCO.

Hier eindigt de dialoog, zoals Landa die geeft, op een moment, dat het probleem nog lang niet is opgelost. De voornaamste moeilijkheid bestaat namelijk uit het trekken van een geschikte hulplijn. In de klas wordt bekeken hoe je het verschil tussen de gegevens (één kolom op het bord en in de schriften) en dat wat je bewijzen of berekenen moet (de tweede kolom) kunt verkleinen.

Conflictanalyse. Uit de analyse van het doel blijkt geen voortgang meer te verwachten. Daarom terug naar de gegevens. B.v. als volgt:

Leraar: Kijk nog eens naar de gegevens. Heb je die allemaal gebruikt?

Leerling: Ik weet het niet. Ik heb nog niets gebruikt.

Leraar: Kijk eens naar de tekening. Zijn alle gegevens daar in terug te vinden?

Leerling: Nee. AB is raaklijn. Daar hebben we een stelling over gehad.

Leraar: Ja?

Leerling: De raaklijn staat loodrecht op de straal naar het middelpunt.

Leraar: Ja. Kun je dat gebruiken?

Leerling: Ik trek die straal, dus AO.

De beslissende transformatie van het probleem is uitgevoerd. De oplossing volgt snel als in de tekening een geschikte notatie voor de hoeken, die samen 90° zijn, wordt ingevoerd. (B.v. hoek BAC is x° en hoek CAO is y° met $x° + y° = 90°$. Het invoeren van een geschikte notatie is overigens een heuristiek.)

De klassieke meetkundeproblemen, zoals deze opgave van Landa, lenen zich bijzonder goed voor het leren analyseren van een probleem. (Zie b.v. Polya, 1946.) Dat is één van de redenen waarom de bekende wiskundige R. Thom het verdwijnen van veel meetkundige leerstof sterk betreurt (Thom, 1971). Niet om de leerstof zelf, maar om de probleemaanpak en de algemene denkmethoden, die met behulp van die leerstof kunnen worden onderwezen. Maar ook bij sterk gealgoritmiseerde leerstof, zoals het oplossen van vergelijkingen, kan expliciet van de techniek van de probleemanalyse gebruik worden gemaakt. Een illustratie uit een videofragment van groepswerk in klas 2 atheneum. Het stencil geeft het volgende voorbeeld:

Los op: $2x + 8 = x + 1$ als $x \in Q$

Oplossing:
$$\begin{array}{rcl} 2x + 8 & = & x + 1 \\ x & & x \\ \hline \end{array} \; -$$

(eerst x aftrekken)
$$\begin{array}{rcl} x + 8 & = & 0 + 1 \\ 8 & & 8 \\ \hline \end{array} \; -$$

(nu 8 aftrekken)
$$x = -7$$
$$\text{o.v.} = \{-7\}$$

Vier meisjes Sita, Angela, Grieta en Dirkje zijn bezig met de volgende opgave:

Los op: $5 + 3p = 1 + 2p$

Een fragment:

Dirkje: 'Hoe kan dat nou?
$$\begin{array}{rcl} 5 + 3p & = & 1 + 2p \\ 1 & & 1 \\ \hline 4 + 3p & = & 2p \end{array} \; -$$
Het is toch moeilijker dan ik dacht.'

Angela: '$4 + 3p = 2p$ dus $4 + p = 0$'

Dirkje: 'Dan moet p helemaal min zijn.'

Sita: 'Ja . . .'

Even later.

Dirkje: 'Hé, $4 + p = 0$, hier trek je 2p af en daar trek je 2p af.'

Sita en Angela: 'Ja.'

Dirkje: 'Nou en dan . . .'

Angela begint opnieuw:
'$5 + 3p = 1 + 2p$
Hier moet je nul van maken. In deze getallen moet de p nul . . .'

Dirkje: 'Iets plus p is nul, dus $p = -6$, nee -4.'

Angela: '$3p = 2p - 4$
$p = -4$
Kijk links moet je altijd p hebben. Links moet je een open bewering van maken en rechts moet je getallen zien te krijgen.'

Dit is een illustratie van de stelling van H. A. Simon (1980) dat een zwak van veel onderwijs en veel leerboeken is, dat wel regels worden geleerd, maar dat er niet wordt aangegeven onder welke omstandigheden die regels met vrucht kunnen worden toegepast. Wat het doel is van het gebruik van die regels. Het voorbeeld in het stencil geeft wel aan, dat er afgetrokken mag/moet worden (de regel), maar formuleert niet expliciet, wat het doel is van het toepassen van die regel of wanneer die regel moet worden gebruikt. Dit groepje meisjes destilleert zelf uit het voorbeeld zo'n gebruiksaanwijzing. Namelijk dat er eerst van beide leden de eerste term na het gelijkteken moet worden afgetrokken. In het voorbeeld van het stencil is dat toevallig een x, in hun opgave een 1. Het is Angela, die *reflecteert* op de gevolgde oplossingsmethode en het probleem opnieuw gaat analyseren. Ze formuleert het *doel*, er moet zo iets uitkomen als $p = \ldots$. Daarom moet je de getallen uit het eerste lid zien weg te werken (door toepassing van de regel) en evenzo de termen met p uit het tweede lid. Niets anders dan de *algemene strategie* van het vergelijken van de gegeven situatie en het doel dat moet worden bereikt, met gebruikmaking van de beschikbare middelen. Even goed toepasbaar op b.v. een gecompliceerdere vergelijking als:
$3x - 4\,(x + 2\tfrac{1}{3}) = 9 - \tfrac{1}{2}x$.

3.3 *Karakteristieken van de probleemanalyse*

Zowel in het klassieke onderzoek van Duncker (1935) naar oplossingsprocessen, als in het recentere onderzoek van b.v. Pushkin (1975) en Kuljutkin (1975) zijn de drie al genoemde karakteristieken van de probleemanalyse te onderscheiden.

Bij de *situatie-analyse* vraagt de oplosser zich af of hij de gegeven begrippen en relaties kent en onderzoekt hij de directe gevolgen van de voorwaarden en de onderlinge samenhang van de gegevens. Deze inspectie van de situatie verloopt meestal ongericht, het gaat om het zoeken van benaderingswijzen, het ontdekken van eigenschappen van de probleemsituatie, het opsporen van voor de oplossing relevante verbanden. Vragen van de leraar zijn b.v.: Wat is gegeven? Kun je een tekening maken? Kun je een voorbeeld geven van een dergelijke situatie? Zie je een aantal directe gevolgen van de gegevens? Welke voorwaarden moeten vervuld zijn?

De juiste oplossingsideeën ontstaan vaak tijdens de *doelanalyse*, als de oplosser zich afvraagt, wat eigenlijk aangetoond of berekend moet worden. De aard van de doelanalyse is sterk afhankelijk van het type opgave. In bewijsproblemen is het doel al geformuleerd en kan vaak heel goed vanuit het doel terug worden geredeneerd. Vindproblemen, zoals het bepalen van de oplossing van een vergelijking of het berekenen van een lijnstuk vragen een ander soort activiteit bij de doelanalyse. En bij open problemen omvat de doelanalyse vaak het aftasten van een heel gebied van mogelijke doelen, die in overeenstemming zijn met de gegeven voorwaarden. Vragen van de leraar zijn b.v.: Wat moet er eigenlijk worden aangetoond? Wat moet er worden berekend? Ken je een bewering die gelijkwaardig is aan de te bewijzen bewering? Welke combinaties van voorwaarden zijn voldoende om het bewijs te leveren? Kun je het doel ook anders formuleren?

Al tijdens de situatie-analyse houdt de oplosser het doel van de opgave in de gaten en bij de doelanalyse de voorwaarden van het probleem. De *conflictanalyse* kenmerkt zich door het heen en weer switchen van de gegevens van de probleemsituatie naar het gevraagde. Nauw hiermee verwant is de werkwijze, die in de informatieprocestheorie '*means-ends analysis*' wordt genoemd. Er is een bepaalde situatie gegeven en een daar van verschillende situatie moet worden bereikt. Het verschil tussen die twee situaties wordt bepaald en het geheugen wordt afgezocht om een operator te vinden, die relevant is voor het reduceren van het verschil. Zo'n operator wordt toegepast, waarna het resultaat wordt onderzocht om te zien of het verschil tot stand is gebracht. Volgens H. A. Simon (1980) speelt de 'means-ends analysis' een centrale rol bij het oplossen van problemen en maken experts er veel gebruik van, als ze een nieuw gebied betreden en nieuwe dingen leren. Vragen van de leraar zijn b.v.: Formuleer het probleem nu eens in je eigen woorden? Waar zit de moeilijkheid? Welke eigenschappen of regels kunnen helpen? Kun je eerst een deel van het probleem oplossen? Welke voorwaarde zit je dwars? Wat gebeurt er als je die voorwaarde even buiten beschouwing laat?

4 *Heuristieken en algoritmen*

4.1 *De onderlinge relatie*

Behalve de denkmethode van de probleemanalyse worden *heuristieken* en *algoritmen* als denkmethoden genoemd. *Heuristieken* zijn werkwijzen, die *kunnen* helpen bij de probleemanalyse en bij de verdere ontwikkeling van het probleem, m.a.w. zij dragen bij aan de vorming en ontwikkeling van de mentale voorstelling van de probleemsituatie. In dit artikel zijn al een aantal voorbeelden van heuristieken aan de orde geweest, namelijk het onderzoeken van speciale gevallen (het proberen van getallenvoorbeelden bij redactievraagstukken) en het maken van een tekening (het schetsen van de grafieken bij de wortelongelijkheid, het visualiseren van $3 : \frac{1}{5}$). *Algoritmen* zijn methoden, die bij correcte toepassing het probleem *gegarandeerd* naar de oplossing leiden. Zij behoren in de wiskunde meestal tot de vakkennis van een bepaald deelgebied. Zoals al in de inleiding is opgemerkt, is het mogelijk om een groot deel van de schoolwiskunde in regels en algoritmen uiteen te rafelen en te onderwijzen. De waarschuwing van P. M. van Hiele (1973) tegen deze praktijk in het wiskunde-onderwijs heeft m.i. nog niets van zijn geldigheid verloren. 'De gevolgen van deze gerichtheid op het snel verwerven van algoritmen zijn ernstig. De eenzijdige *algoritmenbeheersing* maakt het noodzakelijk bij ieder veld nieuwe algoritmen te laten aanleren. (De leerlingen hebben immers niet geleerd, hoe zij zelf nieuwe algoritmen moeten ontwikkelen bij een gegeven nieuwe situatie!) *Geïsoleerde* algoritmen worden snel vergeten, omdat ze niet voldoende verankerd zijn in het geheugen. Door het leren aanvaarden van door anderen gevonden samenhangen of methoden komt men er toe deze in situaties toe te passen, waar zij niet gelden.'

In heuristisch wiskunde-onderwijs worden alleen die algoritmen onderwezen, die een leerdoel op *lange termijn* dienen. Algoritmen, die *vaak* van pas komen in de laatste fase van het oplossen van problemen. Leerlingen zullen het doel van zo'n algoritme moeten kennen en deze als specialisatie van een algemene denkmethode moeten kunnen ontdekken of als een verkorting van een al meermalen gebruikte oplossingsmethode. Het *ontdekken* van algoritmen kan heel goed *probleemgericht* gebeuren.

Een voorbeeld. In de derde klas van het voortgezet onderwijs wordt het zogenaamde 'kwadraat afsplitsen' onderwezen om daarmee de oplossing van een tweede graads vergelijking te bepalen. Dit 'kwadraat afsplitsen' wordt ook gebruikt om de top van een parabool uit de paraboolvergelijking te bepalen en het wordt b.v. ook gebruikt bij de bepaling van het middelpunt van een cirkel, waarvan de vergelijking gegeven is. Al met al een algoritme dat de moeite van het leren waard lijkt. Een probleemgerichte aanpak kan b.v. uitgaan van de volgende probleemstelling:

'Zoek de oplossingsverzameling van de volgende vergelijkingen: $x^2 - 16x + 64 = 0$; $x^2 = 16$; $(x - 1)^2 = 49$; $x^2 = 8x + 2$; $x^2 = 0$; $x^2 = -9$; $x^2 - 5x = 9$.'

In een gesprek met de klas zal de leraar vragen stellen zoals:

'Welke kon je oplossen? Waarom die andere niet? Wat is de moeilijkheid? Kun je die vergelijking ook zo veranderen, dat het een opgave wordt, die je wel kunt oplossen?'

De *probleemanalyse* en de heuristiek '*herleiden tot een eenvoudiger geval*' brengen zo de klas op het spoor van het algoritme.

In het recente onderzoek van De Leeuw en Van 't Riet naar 'setvorming' is onbedoeld (en nauwelijks gesignaleerd) een treffend voorbeeld te vinden van de bezwaren die kleven aan geïsoleerde training in algoritmen. Leerlingen van de brugklas kregen een training in algoritmen voor het voortzetten van rijen. De ene groep kreeg de twee algoritmen ieder afzonderlijk in blokvorm gepresenteerd, een tweede groep werd de algoritmen door elkaar heen geleerd, een derde controlegroep kreeg geen instructie in algoritmen. Deze laatste groep presteerde op de natest, met kritische en extinctieproblemen significant beter dan de twee eerste groepen. Omdat de samenstelling van de controlegroep op de gemeten factoren niet significant verschilde van de beide andere, ligt de conclusie m.i. voor de hand. Niet beïnvloed door een algoritmische instructie vatten *deze* leerlingen de opgaven op als problemen, waar ze zelf door enig denkwerk wel uit konden komen (De Leeuw, 1981 en Van 't Riet, De Leeuw, 1980).

Tot slot een citaat van Davis en McKnight (1980) over het leren van algoritmen:
'Many currently influential movements – "back to basics" and the growing use of computer-assisted instruction for "drill and practice" are two good examples – appear to disregard semantic knowledge (i.e. "*meaning*" and "*understanding*") and to focus on rote drill for "meaningless" algorithmic performance. If, as we believe, meaning is hard to teach succesfully, if meaning is something students are disclined to use, and at the same time meaning is *the only effective foundation for truly powerful algorithmic performance* these "back to basics" type movements can easily prove harmful. They seek to improve student performance by simplification, but *the simplification they seek may leave large numbers of students with impoverished cognitive resources that will handicap them in the long run.*'

4.2 *Voorbeelden van heuristieken*

Zoals al opgemerkt spelen heuristieken mee in de probleemanalyse en de ontwikkeling van het probleem. Toepassing van heuristieken helpt het logisch mogelijke '*zoekgebied*' te beperken en helpt bij de vorming van een *hypothese* betreffende het eindresultaat (in complexe problemen een tussenresultaat). L. L. Gurova (1972), Ju Kuljutkin (1975) en G. Polya (1946) stellen dat heuristieken van nut zijn bij het *zoeken* en *ontdekken* van oplossingsmethoden èn dat heuristieken methoden zijn om het aantal oplossingsmethoden *in te perken*. Een drietal heuristieken zijn al in de voorbeelden naar voren gekomen, namelijk:
Het onderzoeken van (getallen) voorbeelden.
Het tekenen van een plaatje, een grafiek.
Het herleiden tot een bekend geval.
Anderen zijn b.v.:
Het tijdelijk laten vallen van een bepaalde voorwaarde van het probleem.
Het opsplitsen van het probleem in deelproblemen.
Het onderzoeken van uiterste gevallen.
Het (onder)zoeken van analoge probleemsituaties.
Het (onder)zoeken van speciale gevallen.
Nog een illustratie, namelijk van de vierde heuristiek.

Een opgave in 4 havo: 'Bepaal de vergelijking van de cirkel, die de X-as en de Y-as raakt en door (8,1) gaat.' De leraar stelt voor om eerst maar eens een *schets* te maken. Kan het eigenlijk wel? Als het probleem moeilijk blijkt, dan kan een heuristiek helpen. *Laat eens één van de drie voorwaarden vallen.* Teken eens wat cirkels, die aan de overblijvende voorwaarden voldoen. Hebben die een gemeenschappelijke eigenschap (invariant)? Al zoekende komt zo de vergelijking van de cirkels, die de X-as en de Y-as raken in zicht nl.
$(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$. Substitutie van (8,1) geeft a.

5 *De ontwikkeling van het probleem*

Tijdens het oplossingsproces ontwikkelt de mentale voorstelling van de probleemsituatie zich verder. Tijdens het werken aan een oplossingsvoorstel vindt een verscherping en specialisering van de probleemstelling plaats. Op ieder ogenblik van het denkproces bestaat deze mentale voorstelling en vertoont een bepaalde ontwikkelingsstand, waar de oplosser zich niet altijd van bewust is. Navraag tijdens het oplossingsproces kan die *ontwikkelingsstand* van het probleem meer bewust en zichtbaar maken, hoewel navraag ook zelf weer de ontwikkeling van het probleem bij de oplosser kan beïnvloeden.

Pogingen van bekwame leerlingen om een (wiskundig) probleem op te lossen zijn veelal bewust georganiseerd volgens een bepaald *plan* en blijken vaak in de vorm van een mentaal experiment voor te komen. 'Als ik nu eens . . ., dan . . .'. Alleen op het laagste niveau zijn deze pogingen giswerk, waarbij de leerlingen zich niet realiseren, waarom pogingen worden ondernomen en wat het resultaat daarvan kan zijn. Het *plan* voor de komende operaties wordt min of meer bewust gevormd (resp. opgesteld) op basis van de informatie, die is verkregen bij de pogingen om de probleemsituatie te onderzoeken. Zwakkere leerlingen blijven ook bij moeilijke problemen proberen rechtstreeks door toepassing van een algoritme het probleem op te lossen. (Aldus Krutetskii, 1976).

Om de leerlingen te leren een doelmatig plan op te stellen, kan nog worden gewezen op de al besproken werkwijze, waarbij wordt begonnen met een *globale* beschrijving van het probleem, gevolgd door het achtereenvolgens *verfijnen* en *detailleren*; uiteraard naast het al genoemde bij de probleemanalyse en de heuristieken. Gedurende de loop van de oplossing is een *tussentijdse evaluatie* van de gekozen oplossingsmethode eveneens een kenmerk van goed oplossingsgedrag. De informatie van elke poging wordt vergeleken met andere informatie, waarbij wiskundige ervaringen uit het verleden ten grondslag liggen aan de keuze van de richting van het zoekproces.

6 *Het onderwijzen van denkmethoden*

In het kader van dit artikel kan niet worden ingegaan op de meest geschikte leerinhouden voor heuristisch wiskunde-onderwijs. Noch op de vraag welke problemen voor leerlingen interessant, motiverend of uitdagend zijn. In de publikaties van Freudenthal (1973, 1978), van WISKOBAS-medewerkers en van andere medewerkers van het I.O.W.O. zijn veel voorbeelden te vinden van leerinhouden en leermateriaal, die zich uitstekend lenen voor probleemgeoriënteerd wiskunde-onderwijs. Ook over het bevorderen van een gunstig affectief 'klimaat' in de klas en de meest gunstige afwisseling van klassediscussie, zelfstandig werken en werken in kleine groepen valt nog heel wat te zeggen. De belangrijkste vraag is evenwel die naar de wijze waarop de besproken denkmethoden kunnen worden onderwezen.

Polya beschouwde zijn schema van vragen en aanwijzingen, als een *adviesschema* voor de leraar, die telkens weer die denkmethoden voor de leerlingen zou moeten demonstreren. In de verwachting dat leerlingen deze zouden overnemen en zelf gaan gebruiken (Polya, 1946). In verschillende onderwijsexperimenten, gericht op het bevorderen van de bekwaamheid om problemen in een bepaald vakgebied op te lossen, spelen *handelingsvoorschriften* een rol van betekenis. Het geheel van denkmethoden, dat men wil onderwijzen, wordt nauwkeurig schriftelijk vastgelegd in het *handelingsvoorschrift* dat aan de leerlingen wordt gepresenteerd.

De *impliciete* overdracht van denkmethoden, waar Polya op doelde, staat een *bewust* gebruiken van die methoden door de leerlingen en de *transfer* naar andere gebieden in de weg. Het gevaar van een handelingsvoorschrift is evenwel dat het door leerlingen *klakkeloos*, als schabloon, wordt gevolgd. Terwijl het ook niet eenvoudig is om in een handelingsvoorschrift de verscheidenheid in de individuele benaderingen door leerlingen recht te doen.

In het onderzoeksproject 'Heuristisch wiskunde-onderwijs', een onderwijsexperiment gericht op het onderwijs in 4 atheneum en het schoolvak wiskunde-1, dat voorbereid wordt in de werkgroep voor didactiek van de wiskunde van het Mathematisch Instituut van de Rijksuniversiteit Groningen, is gekozen voor de volgende onderwijsstrategie. De bestaande leerstof (en de leerboeken) worden op de in hoofdstuk 2 genoemde aspecten doorgelicht en verrijkt met problemen, waarin iets *algemeens* ontdekt moet worden of problemen, die aanleiding kunnen zijn om *algemene denkmethoden* te leren. Aan de hand van die problemen kunnen de leerlingen van hun eigen *ervaringen* en van die van medeleerlingen *leren*, welke denkmethoden voor hen bruikbaar zijn. Het laten *verwoorden* van hun aanpak, hun werkwijzen, hun moeilijkheden en de door hen gevolgde oplossingsstrategieën heeft daarbij grote waarde. Door het *terugblikken* op de eigen oplossingsweg en die van anderen krijgen de leerlingen de kans om de oplossingsmethoden en de resultaten te wegen. Dit *reflecteren* op de eigen aanpak, op het eigen leren, op de eigen wiskundige activiteiten zal moeten leiden tot een zelf opgesteld, *individueel* bepaald, *handelingsvoorschrift*. De leraar, die in zijn docentenhandleiding een bespreking vindt van de problemen en de leerstof met het oog op het leren van denkmethoden, draagt in het leergesprek, in de klassediscussie, in de begeleiding van het groepswerk, bouwstenen aan voor zo'n privé-handelingsvoorschrift.

Literatuur

Biermann, N., H. Bussmann en H.W. Niedworok, *Schöpferisches Problemlösen im Mathematikunterricht*. München: Urban, Schwarzenber, 1977.

Bruner, J.S., *The process of education*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1960.

Corte, E. De en R. Somers, *Het schatten als heuristiek bij het oplossen van rekenopgaven: een constaterend en construerend onderzoek bij zesdeklassers van de basisşchool*. Leuven: Katholieke Universiteit, rapport no. 25, 1981.

Davis, R., *Communication Quarterly*, Winter 1980. The institute for Research on Teaching. Michigan State University, East Lansing.

Davis, R. en C. Mcknight, The influence of semantic content on algorithmic behaviour. *The Journal of Mathematical Behavior*, 1980, vol. 3, no. 1.

Doornbos, W.C. en A. van Streun, *Het oplossen van wiskundige problemen in het aanvangsonderwijs analyse voor wiskundestudenten*. Groningen: Mathematisch Instituut, rapport ZW-8016, 1981.

Dormolen, J. van, *Vaardigheden*. Utrecht: Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, 1975.

Duncker, K., *Zur Psychologie des produktiven Denkens*. Berlin: Springer, 1935.

Elshout, J.J. en B. Wielinga, Leren probleem oplossen. In: S.V.O. reeks nr. 12, *Strategieën in leer- en onderwijsprocessen*. Den Haag: Staatsuitgeverij, 1978.

Freudenthal, H., *Mathemătics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel, 1973.

Freudenthal, H., *Weeding and Sowing*. Dordrecht: D. Reidel, 1978.

Freudenthal, H., Major Problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 1981, 12.

Galperin, P.J., In: C.F. van Parreren en J.M.C. Nelissen (red.), *Met Oosteuropese psychologen in gesprek*. Groningen: Wolters-Noordhoff, 1979.

Greeno, J.G., Trends in the Theory of Knowledge for Problem Solving. In: D.T. Tuma en F. Reif, *Problem Solving and Education*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1980.

Groot, A.D. de, *Het denken van de schaker*. Amsterdam: Noord-Hollandse Uitgeversmaatschappij, 1946.

Gurova, L.L., Heuristic processes in Solution of descriptive logical problems. In: V.N. Puskin, *Problems of Heuristics*. Jerusalem: Keter Press, 1972.

Hiele, P.M., *Begrip en inzicht*. Purmerend: Muusses, 1973.

Johnson-Laird, P.N., Mental Models in Cognitive Science. *Cognitive Science*, 1980, 4.

Krutetskii, V.A., *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press, 1976.

Kuljutkin, Ju. N., Heuristische methoden in het oplossingsproces. In: C.F. van Parreren en W.A. van Loon-Vervoorn, *Denken*. Groningen: Tjeenk Willink, 1975.

Landa, L.N., Diagnostiek en geprogrammeerde instructie. In: C.F. van Parreren en J.A.M. Carpay, *Sovjetpsychologen aan het woord*. Groningen: Wolters-Noordhoff, 1972.

Landa, L.N., The Ability to Think – How Can It be Thaught? *Soviet Education*, March 1976, vol. XVIII, no. 5.

Larkin, J.H. en F. Reif, Understanding and Teaching Problem Solving in Physics. *European Journal of Science Education*, 1979, 1, 191-203.

De Leeuw, L., *Einstellung en Rigiditeit bij het hanteren van oplossingsmethoden; via constaterend naar construerend onderzoek*. Voordracht op de bijeenkomst van 14-5-1981 van de 'Stichting voor onderwijspsychologisch onderzoek' in Utrecht.

Mayer, R.E., Acquisition Processes and Resilience under varying testing conditions for structurally different problem-solving procedures. *Journal of Educational Psychology*, 1974, *66*, no. 5.

Mayer, R.E., The sequencing of instruction and the concept of assimilation-to-schema. *Instructional Science*, 1977, no. 6.

McClintock, C.E., Heuristic Processes as Task Variables. In: G.A. Goldin en C.E. McClintock, *Task Variables in Mathematical Problems Solving*. Columbus: ERIC, Ohio State University, 1979.

Mettes, C.T.W. en A. Pilot, *Over het leren oplossen van natuurwetenschappelijke problemen*. Enschede: CDO/AVC, T.H.T., no. 42, januari 1980.

Paige, J. en H.A. Simon, Cognitive processes in solving algebra word problems. In: B. Kleinmuntz, *Problem Solving: research, method and theory*. New York: John Wiley, 1966.

Pippig, G., *Zur Entwicklung mathematischer Fähigkeiten*. Berlin: Volk und Wissen, 1971.

Pólya, G., *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press, 1946.

Pushkin, V.N., Onderzoek van het denken als proces. In: C.F. van Parreren en W.A. van Loon-Vervoorn, *Denken*. Groningen: Tjeenk Willink, 1975.

Riet, S.P. van 't en L. de Leeuw, Setvorming en wiskunde-onderwijs. *Euclides*, 1980, *56*, no. 1.

Selz, O., *Zur Psychologie des produktiven Denkens und des Irrtums*. Bonn: F. Cohen Verlag, 1922.

Sessa, A.A. Di, On 'learnable' Representations of Knowledge: A Meaning For The Computational Metaphor. In: J. Lochhead en J. Clement, *Cognitive Process Instruction*. Philadelphia: Franklin Institute, 1979.

Simon, H.A., Problem Solving and Education. In:

T. D. Tuma en F. Reif, *Problem Solving and Education*, Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1980.
Tall, D. en S. Vinner, Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 1981, 12.
Thom, R., 'New Math an Educational failure'. *American Scientist*, 59, december 1971.
Vaags, D. W., *Over het oplossen van technische problemen*. Eindhoven: Technische Hogeschool, 1975.
Verstralen, H., *Taal en intuïtie bij leren en probleemoplossen*. Conceptrapport, Arnhem: Cito, 1980.
Verstralen, H., *Toetsconstructie voor aanpakgedrag bij probleemoplossen*. Arnhem: Cito, 1981.

Curriculum vitae

A. van Streun (geb. 1941) studeerde wiskunde aan de Rijksuniversiteit te Groningen en was gedurende 1964-1974 werkzaam als wiskundeleraar aan het Ichtus College te Drachten. Sinds 1974 is hij als wetenschappelijk hoofdmedewerker verbonden aan het Mathematisch Instituut te Groningen om onderwijs te geven en onderzoek te doen in de didactiek van de wiskunde. Het onderwijs wordt verzorgd in het kader van de universitaire lerarenopleiding, het onderzoek wordt uitgevoerd in het geheel van de uitvoering van het onderzoeksprogramma van de werkgroep (W.U.B. art. 18) voor het onderzoek in de didactiek van de wiskunde, waar hij voorzitter van is.

Adres: Mathematisch Instituut, Postbus 800, 9700 AV Groningen.

Manuscript aanvaard 12 januari 1982