Basisalgoritmen in het wiskunde-onderwijs op de basisschool*

A. TREFFERS
Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs & Onderwijs Computercentrum, R.U. Utrecht

Samenvatting

We beginnen onze beschouwing over het wiskundige cijferen met een schets van de algemene kenmerken. Het belangrijkste verschil met de traditionele aanpak blijkt het streven naar inzicht in de cijferprocedures te zijn. Daarna wordt een beschrijving van de vakdidactische en onderwijsleertheoretische achtergronden van het wiskundige cijferonderwijs gegeven, waarbij de implicaties van het werk van resp. Dienes, Bruner, Piaget, Gal'perin en Resnick aan de orde komen. In de derde paragraaf beschouwen we de knelpunten in de cijferleergang zowel van de theoretische gezichtshoek als van de kant van het onderzoek, waarbij naar voren komt dat vooral de kwesties van de toepasbaarheid en leerstofordening als kritische punten aangemerkt moeten worden – punten die ook in de theoretische omkledingen van het wiskundige cijferen onvoldoende aandacht gekregen hebben. Dan volgt een indicatie van een alternatieve opzet, welke kort aangeduid kan worden als geïntegreerd cijferen volgens het principe van de progressieve schematisering. En we eindigen met een samenvattend overzicht.

1 *Algemene kenmerken van het wiskundige cijferen*

Vanaf het begin van de jaren zestig voltrekt zich internationaal een ingrijpende verandering van het rekenonderwijs welke algemeen met de aanduiding 'wiskunde-onderwijs op de basisschool' wordt uitgedrukt. Het betreft hier zowel vernieuwing van leerstof als verandering van bestaande leergangen. Nieuwe onderwerpen als meetkunde, meten, statistiek en kansrekening doen hun intrede en aloude als cijferen, breuken en verhoudingen worden gewijzigd.

Toch is het niet zo, dat binnen de internationale beweging van het wiskunde-op-de-basisschool eensluidende gedachten over het onderwijs aan kinderen van 4 tot 12 jaar zouden bestaan. Niets is minder waar: er zijn tenminste vier richtingen te onderscheiden, te weten: de arithmetische, de structurele, de empirische en de realistische, die onderling aanzienlijke verschillen vertonen (Treffers, 1978).

Maar het cijferonderwijs vertoont bij deze verschillende stromingen wel degelijk een grote mate van overeenkomst. Er kan dan ook gevoeglijk over dé algemene kenmerken van het cijferen in het wiskunde-onderwijs op de basisschool gesproken worden, zonder één van de genoemde richtingen als geheel tekort te doen – zij het dat daarbij uitdrukkelijk een voorbehoud voor enkele bijzondere uitwerkingen uit met name de realistische richting gemaakt moeten worden, waarover later meer.

We zullen nu eerst de algemene kenmerken voor het micro- en macroniveau van de cijferleergang beschrijven.

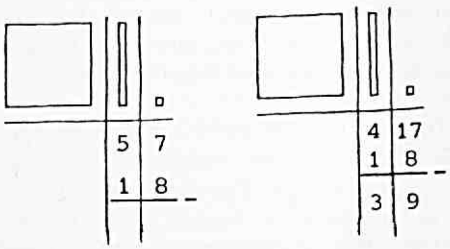
1.1 *Toenemende schematisering op micro-niveau*

Aan de hand van de aftrekking '57-18' onder elkaar geschreven, lichten we toe op welke schematiseringsniveaus deze opgave gewoonlijk opgelost en genoteerd wordt.

1. De berekening geschiedt met bijvoorbeeld M.A.B.-materiaal (Multibase Arithmetic Blocks) bestaande uit 'losse' kuben, staafjes die 10 lossen bevatten, platten van 10 staafjes en blokken van 10 platten – een bepaald soort inpakmateriaal dus. Vervolgens wordt de oplossing in een passend positieschema genoteerd. De handeling verloopt in grote lijnen als volgt: 57 wordt met 5 staven en 7 lossen 'uitgelegd'. Vervolgens moeten van dit stapeltje 8 lossen gehaald worden, wat niet blijkt te lukken, dus wordt 1 staaf ingeruild voor 10 lossen. Van de

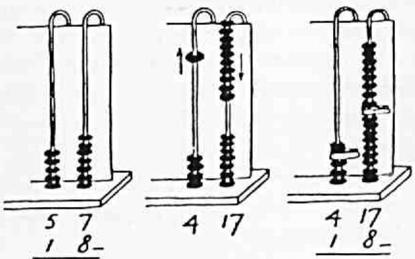
* Met dank aan Aad Goddijn (OW & OC) voor de kritische analyse van een eerdere versie van dit artikel.

collectie van 17 lossen en 4 staven die ontstaan is, worden nu resp. 8 lossen en 1 staaf afgehaald, zodat 17−8=9 lossen en 4−1=3 staven resteren. Het resultaat wordt dan genoteerd als in Figuur 1 weergegeven.



Figuur 1 *Aftrekking in positieschema*

2. Het startgetal 57 wordt op de abacus gezet (De Jong, 1977). Hierna probeert het kind er 18 af te halen, wat niet zonder meer gaat. Daarom moet het eerst inwisselen (Figuur 2).



Figuur 2 *Aftrekken op de abacus*

3. Er wordt geen inwisselmateriaal of abacus meer gebruikt, maar de notatiewijze met positiestrepen verwijst nog wel naar deze positiespullen.

4 17 of 4
5 7 ~~5~~ 7
1 8 1 8
——— ———
3 9 3 9

4. De algoritme wordt volgens de standaardmanier uitgevoerd en genoteerd.

4
57 of ~~5~~7
18 18
—– —–
19 19

Nu is kenmerkend voor het cijferen in het wiskunde-onderwijs dat de geschetste fase-gewijze benadering van de standaard-algoritme bij ieder nieuw deelgeval herhaald wordt. Als dus volgend op het aftrekken van twee-cijfergetallen het verschil van twee getallen met drie cijfers bepaald moet worden, waarbij zich uiteraard nieuwe problemen kunnen voordoen (bijvoorbeeld met de nul op de middelste positie), dan start de leergang steeds opnieuw met inwisselmateriaal en bijbehorend schema, en eindigt via enkele tussenstations bij de meest verkorte vorm van de eindalgoritmen. Deze werkwijze van toenemende schematisering op het micro-niveau per deelgeval wordt ook bij het optellen, vermenigvuldigen en delen toegepast. De globale lijn van de deelleergang op macro-niveau beschouwd, wordt echter net als bij het traditionele cijferen, bepaald door de toenemende complicering van de opgaven.

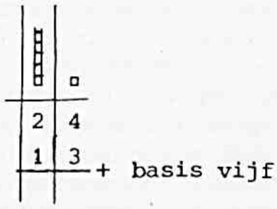
1.2 *Progressieve complicering op macro-niveau*

Bij de ordening naar toenemende rekenkundige complexiteit wordt verondersteld dat de moeilijkheidsgraad van de opgaven afhangt van de grootte van de getallen, het aantal inwissel- of leenhandelingen dat bij de verschillende bewerkingen verricht moet worden, de verschillende posities die de nul kan innemen en de vereiste rekenvaardigheid die aan een correcte uitvoering van de operaties ten grondslag ligt.

Evenals bij het traditionele cijferen in het rekenonderwijs, geldt ook voor het wiskunde-onderwijs in z'n algemeenheid dat iedere stap in de steeds complexer wordende leergang definitief wordt afgehandeld, hetgeen betekent dat steeds weer bij ieder deelgeval naar de eindvorm van de algoritme wordt toegewerkt. Pas als de kinderen het betreffende deelgeval – bijvoorbeeld het vermenigvuldigen van een getal met 1 cijfer met een getal van 2 cijfers – volledig beheersen, wordt de volgende stap in de leergang gezet i.c. het vermenigvuldigen van een één-cijfergetal met een drie-cijfergetal. Daarbij wordt, indachtig het vorige algemene kenmerk, in principe de standaard-algoritme steeds weer van de concrete ondergrond met behulp van inwisselmateriaal opgebouwd. Maar zoals gezegd, geldt dit op het micro-niveau van de deelgevallen op zich en wordt de macro-uitlijning ook hier wel degelijk door de voortschrijdende complicering bepaald.

1.3 *Talstelsels*

Uit de gevolgde werkwijze van de toenemende schematisering per deelgeval kan men opmaken dat er bij het leren cijferen binnen het wiskunde-onderwijs een duidelijk streven naar een inzichtelijke fundering van de standaard-algoritme is waar te nemen. Dit komt mede in het rekenen binnen andere talstelsels tot uitdrukking, of preciezer: bij het rekenen in positiesystemen met een andere basis dan de tientallige. De voornaamste bedoeling daarvan is namelijk om de essentie van het positiesysteem in algemene zin te verduidelijken en daarmee een begripsbasis voor de cijferprocedures te leggen. Zo krijgen de kinderen in het derde leerjaar opgaven in de trant van '24+13' onder elkaar (Figuur 3).



Figuur 3 *Optellen in basis vijf*

'Basis vijf' houdt in dat vijf lossen ingewisseld dienen te worden voor één staaf, vijf staven voor één platte, etc. Dat levert in ons voorbeeld '3+4' lossen op, of te wel 1 staaf en 2 lossen, gevoegd bij '2+1=3' staven, geeft in totaal 4 staven en 2 lossen:

1
24
13+
42

Rekenen in basis vijf is dus als het ware rekenen met één hand in de zak: vijf is één handvol, zeg vuist, en het getal '42' dient dan op die basis geïnterpreteerd te worden als 4 vuisten en nog 2, ofwel in ons decimale stelsel als $4\times5+2=22$. In de meeste nieuwe wiskunde-methoden vindt het rekenen in andere talstelsels op beperkte schaal plaats: het is niet zozeer een doel in zich, doch dient voornamelijk als ondersteuning van het inzichtelijk rekenen c.q. cijferen.

1.4 *Min of meer geïsoleerde cijferleergang*

Evenals bij het traditionele cijferen wordt de voortgezette oefening van de basisvaardigheden in het wiskunde-onderwijs grotendeels binnen het cijferprogramma gesteld. Dit houdt in dat vanaf omstreeks het einde van het derde leerjaar de basisvaardigheden vrijwel niet meer apart geoefend worden. Tenminste niet in de wiskunde-methoden van de eerste generatie. In de nieuwe methoden wordt in het algemeen wel onderkend dat door de andere opzet van het cijferen, waarbij vaak minder oefenopgaven gemaakt worden, het memoriseren en de beheersing van de basisvaardigheden in de knel kunnen komen. En dan is daar nog de zwakke verbinding tussen cijferen en toepassen, ofwel tussen de kale cijfersommen en de opgaven die in een reële context gesteld zijn. Voor zover er sprake is van toepassingsproblemen worden deze nààst het cijferprogramma gesteld, of beter, ernà als toepassingen achteraf, en niet binnen de cijferleergang. Met als mogelijke consequentie dat er twee gescheiden systemen ontstaan, waarbinnen aparte oplossingsmethoden gehanteerd worden – we komen later op dit punt terug.

1.5 *Samenvatting kenmerken*

De voornaamste kenmerken van het leren cijferen in het wiskunde-onderwijs op de basisschool zijn:

- de stap-voor-stap-methode van deelgeval naar deelgeval volgens de globale systematiek van de voortschrijdende complicering op macro-niveau;
- de voortschrijdende schematisering op het micro-niveau per onderscheiden deelgeval, startend met concreet inwisselmateriaal en eindigend met de meest verkorte eindvorm (standaard-algoritme) voor het betreffende deelgeval;
- het streven naar inzicht in de cijferprocedures, mede tot uitdrukking komend in het rekenen binnen andere talstelsels dan het tientallige;
- en de 'apartheid' van de cijferleergang, losstaand van het maken van contextproblemen (toepassingen).

Het belangrijkste onderscheid met het traditionele cijferen ligt in de gefaseerde, inzichtelijke benadering van het cijferen per deelgeval, en de meest treffende overeenkomst in de systematiek van de toenemende complicering voor de nagestreefde standaard-algoritme plus de losse verbinding met context-opgaven.

Ruwweg een kwart van de kinderen op de Nederlandse basisschool werkt anno 1982 met een reken-wiskundemethode die deze algemene kenmerken vertoont (enkele jaren geleden was het ongeveer 10%).

2 *Vakdidactische en onderwijs-leertheoretische achtergronden*

We zullen nu allereerst kort nagaan in hoeverre het wiskundige cijferen gedekt wordt door de methoden van het leren cijferen die in de wiskundedidactiekboeken aanbevolen worden. Vervolgens geven we een schets van diverse theoretische funderingen voor het cijferonderwijs, waarbij de nadruk zowel op het werk van Dienes komt te liggen als op de implicaties van de algemene theoretische opvattingen van Piaget, Bruner, Gal'perin en Resnick voor het specifieke gebied van het cijferen.

2.1 *Cijferen in wiskundedidactiekboeken*

In het rekenonderwijs constateerden we een discrepantie tussen de vakdidactische opvattingen en de onderwijspraktijk van het cijferen (Treffers, 1982). Dit nu is in z'n algemeenheid bij het wiskunde-onderwijs bepaald niet het geval. Men kan er bekende handboeken als die van NCTM (1966), D'Augustine (1968), Collier en Lerch (1969), Williams en Shuard (1970), Riedesel en Callahan (1977) en Copeland (1979) op naslaan om eenvoudig vast te stellen dat de genoemde algemene kenmerken van het wiskundige cijferen hierop evenzeer van toepassing zijn. Het is daarom weinig zinvol om in dit onderdeel een overzicht van de wiskunde-didactische opvattingen aangaande de inrichting van het cijferonderwijs te bieden – dat zou slechts een geschakeerde reprise van het voorgaande opleveren.

We bepalen ons daarom tot een korte belichting van de verschillende onderwijs-leertheoretische achtergronden waarnaar in de wiskunde-didactiekboeken herhaaldelijk wordt verwezen.

2.2 *Dienes*

Het is vooral de naam van Dienes die in de didactische handboeken van het wiskunde-onderwijs in verband wordt gebracht met het wiskundige cijferen: hij is de ontwerper van de Multibase Arithmetic Blocks, kortweg M.A.B.-materiaal genoemd, en tevens ontwikkelde hij een theorie van het wiskunde-leren waarin de betekenis van dit materiaal binnen een nieuwe opzet van het cijferen als geheel wordt belicht. Naast de praktische betekenis van Dienes' ideeën en materialen, is het ook deze theoretische fundering geweest die hem faam verleende. In hoeverre daartoe ook de herkenbare verwantschap met de opvattingen van Bruner en de uitdrukkelijke referentie naar het werk van Piaget hebben bijgedragen, kan men slechts gissen.

De leertheorie van Dienes rust op de volgende vier pijlers: het principe van de wiskundige variabiliteit, het constructieprincipe, het dynamische principe en het principe van de aanschouwelijke variabiliteit (Dienes, 1970, p. 42). We lichten deze principes kort toe aan de hand van wat Dienes de 'leercyclus' van het cijferen zou noemen.

Het principe van de *wiskundige variabiliteit* heeft betrekking op de variabelen van een mathematisch begrip. Bij het cijferen is de notie 'plaatswaarde' fundamenteel. Wat zijn nu de wiskundige variabelen van dit begrip? Dienes noemt er drie: de cijfers, de exponenten en het grondgetal. Deze elementen van het wiskundige object kunnen veranderen zonder dat aan het wezenlijke karakter van het begrip plaatswaarde afbreuk gedaan wordt. Toepassing van het basisprincipe van de wiskundige variabiliteit leidt dan volgens Dienes onontkoombaar naar het rekenen in verschillende talstelsels.

Het *constructie-principe* biedt didactisch houvast hoe het rekenen in verschillende talstelsels geleerd moet worden. Daarin wordt namelijk gesteld, dat vorming van het begrip plaatswaarde en inzicht in het positiesysteem niet bereikt worden door analyse van essentiële kenmerken, maar dat kinderen van 7 à 8 jaar veeleer begrip verwerven door constructie i.c. door het werken met positiematerialen die de betreffende wiskundige structuur veelzijdig belichamen.

Nu is kenmerkend voor Dienes' opvattingen over wiskunde leren dat hij dit 'veelzijdige' materiaal op een specifieke wijze gebruikt in een opeenvolging van (spel-)activiteiten waarvan de sequentie op het *dynamische principe* berust. In deze grondregel wordt gesteld dat de begripsvorming drie stadia doorloopt. Het eerste stadium is dat van het vrije spel – in het onderhavige geval het vrije spel met M.A.B.-materiaal. Volgens Dienes worden in de vrije activiteiten al doende ervaringen verkregen waarop de kinderen kunnen voortbouwen in het tweede stadium, waar de activiteiten wel gestructureerd en gericht worden. In dit stadium realiseert het kind zich al doende de gemeenschappelijke structuur van de spelletjes en wordt het zich bepaalde wetmatigheden bewust, zoals de inpakbaarheid van iedere hoeveelheid in elke talstelselbasis, het mechanisme van het inwisselen en lenen, en de grootte van één bepaalde positie-waarde (bijvoorbeeld van de platte) ten opzichte van 'lagere' positiewaarden (i.c. staafjes en eenheidskubusjes). In het derde stadium worden het begrip plaatswaarde en het getalgedrag bij verschillende operaties verder verdiept door vrijwel uitsluitend te werken met symbolische representaties van handelingen met M.A.B.-materiaal in de vorm van positieschema's of via de standaardschrijfwijzen. Dit maakt het de kinderen mogelijk om als het ware van buitenaf tegen hun materiële handelen aan te kijken en dit handelen op eenvoudige wijze te verwoorden, waardoor de verdergaande abstractie van de wezenlijke kenmerken van het begrip plaatswaarde en de consequenties daarvan voor het opereren met getallen kan plaatsvinden – aldus Dienes[1].

De beschrijving van de begripsvorming zou echter onvolledig zijn als we daarbij ook niet het principe van de *aanschouwelijke variabiliteit* betrekken, waarin uitdrukkelijk op de beperkingen van 'eenvormig' materiaal wordt gewezen. Het is dan ook niet zo dat de zojuist geschetste leercyclus volledig op de materiële basis van de 'Multibase Arithmetic Blocks' rust. Dienes (1963, 1966) heeft herhaaldelijk op het gevaar van associatief leren gewezen bij leermateriaal als Sternblokken, Cuisenaire-staafjes en Montessori-kralensnoeren, en hij relativeert dienovereenkomstig ook de waarde van zijn M.A.B.-materiaal. Het gaat volgens Dienes bij de vorming van begrippen niet om associëren, maar om abstraheren en generaliseren, en dat kan naar zijn opvatting pas plaatsvinden indien de kinderen de begripsstructuur in zoveel mogelijk aanschouwelijke equivalenten krijgen aangeboden om aldus het begrip te kunnen losmaken van de specifieke belichaming ervan met inpakmateriaal, geld e.d.

Op basis van de zojuist aangeduide principes heeft Dienes een nieuwe leergang cijferen ontwikkeld, waarvan in het begin van dit artikel de algemene kenmerken beschreven werden – zij het dat hij meer aandacht aan het rekenen in verschillende talstelsels besteedt dan algemeen gebruikelijk is (Dienes, 1966, p. 223-256). In ieder geval wordt hij in de vakdidactische handboeken terecht als initiator en grondlegger van het wiskundige cijferen genoemd, al moet hij de eer wat de theoretische fundering betreft vaak met Piaget en Bruner delen.

2.3 *Andere onderwijsleertheoretische referenties*

Wat *Bruner* aangaat, lijkt die referentie alleszins gerechtvaardigd: Dienes' principes over het wiskunde-leren zijn doordrenkt van Bruners opvattingen over de cognitieve representatievormen van begrippen en structuren ('the enactive, iconic and symbolic modes of cognitive representations') en ze hebben ook gemeenschappelijke ideeën over het belang van de wetenschapsstructuur bij het samenstellen van leerplannen volgens de spiraalsgewijze opbouw. Is er een sprekender illustratie van de drie cognitieve representatiewijzen te geven dan via het cijferen volgens de fasen van het manipuleren met M.A.B., het voorstellen van M.A.B. met positieschema's en het rekenen zonder zichtbare verwijzing naar M.A.B.? (vgl. Bruner, 1971, p. 158).

Blijkt de samenhang tussen Dienes' theorie voor het wiskundeleren en Bruners cognitieve representatietheorie dus juist daarom ook duidelijk, omdat Bruner z'n ontwikkelingspsychologische fasering tevens op de begripsvorming toepast (Bruner, 1971), welnu om exact dezelfde reden is de relatie tussen Dienes' theorie en *Piagets theorie* van de cognitieve ontwikkeling minder doorzichtig, ja zelfs problematisch. Het ligt immers niet direct in de lijn van Piagets denken om de fasen van de 'macrostructurele' cognitieve ontwikkeling over te planten naar de 'micro-structurele' begripsvorming. En dat is nu precies wat Dienes doet als hij het dynamische principe uitwerkt, daarbij nota bene nadrukkelijk naar Piaget verwijzend (zie Steiner, 1973, p. 310 e.v.). Daar komt nog bij dat Piaget geen onderzoek naar begrip van plaatswaarde en positiesysteem gedaan heeft (Copeland, 1979; zie ook Freudenthal, 1979, p. 58).

Kortom, er is dus geen directe reden om Piaget in verband met de theoretische fundering van het wiskundige cijferen te noemen, afgezien van Dienes' discutabele referentie. Indirect kunnen echter wel twee 'positieve' redenen worden genoemd. Ten eerste past de leergang wiskundig cijferen zeer wel bij de 'Comments on Mathematical Education' van

Piaget (1973), waarin hij onder meer het belang van het materiële handelen benadrukt en tevens stelt dat de te gebruiken representaties en modellen moeten corresponderen met de 'natuurlijke' niveaus van handeling. Ten tweede wordt de wiskundige cijferleergang door de Piagetianen tot de onderwijsimplicaties van Piagets werk gerekend. Zo beschrijft Copeland (1979) in zijn boek 'How children learn mathematics' – met als ondertitel 'Teaching implications of Piaget's "research"' – een leergang cijferen die nauwkeurig overeenkomt met die van Dienes. Dit zijn kennelijk voor vele auteurs van wiskunde-didactiekboeken redenen genoeg om ook Piaget in direct verband met de theoretische fundering van het wiskundige cijferen te brengen.

Naast het werk van de troika Dienes-Bruner-Piaget wordt in het Nederlandse taalgebied vooral ook *Gal'perins methode* over de vorming van mentale handelingen als grondslag voor het wiskundige cijferen gebruikt (Borghouts-Van Erp, 1978 en Boonstra, 1980; en zie ook de kritische beschouwing daarvan door Nelissen, 1980). Volgens de trapsgewijze onderwijsprocedure van Gal'perin moet iedere nieuwe mentale handeling voorbereid worden door een handeling op materieel niveau, waarin reeds alle essentiële trekken zitten waarop men zich ook bij de uitvoering van de mentale handeling baseert. Zo zijn bijvoorbeeld de materiële handelingen met de lusabacus bij het optellen in wezen dezelfde als de handelingen van de definitieve optelalgoritme, en in het verdelen liggen de concrete handelingen van de staartdelingen voorgetekend. Door deze weerspiegeling van de essentiële elementen van de eindhandelingsstructuur op verschillende niveaus kunnen de kinderen zich vanaf het begin en bij voortduring aan het wezenlijke van de cijferhandelingen oriënteren. Bij het wiskundige cijferen vindt dus een verinnerlijking en verkorting van de oorspronkelijke operaties met concreet of schematisch materiaal plaats via een trapsgewijze procedure van progressieve schematisering op micro-niveau en van progressieve complicering op macro-niveau, aldus zou men de onderhavige leergang kort in Galperiaanse zin kunnen karakteriseren.

Na het voorgaande is duidelijk dat de parameters die Gal'perin aan handelingen toekent, te weten het niveau van uitvoering, de graad van algemeenheid, de mate van verkorting en de beheersingsgraad, evenzeer geschikt zijn om het wiskundige cijferen te ontleden en te beschrijven[2]. Gal'perin (1969) heeft dat zelf ook gedaan. En wel oppervlakkig beschouwd in de zin zoals eerder beschreven: inwisselblokken, positiestrepen, progressieve complicering op macro-niveau, schematisering op micro-niveau – men kan al deze elementen in zijn beschrijving terugvinden. Maar meer in detail bekeken, onderscheidt zijn onderwijs-aanpak zich echter door een strak gestuurde, aanvankelijk op een oriënteringskaart voorgeschreven leergang die via verschillende fasen en subfasen van handelen verloopt, waarin het manipuleren met concrete blokken een ondergeschikte rol speelt – een leergang die al met al wat afwijkt van het gangbare wiskundige cijferen, dat 'vrijer' van opzet is, meer gebruik maakt van positiemateriaal, minder aandacht aan het verbaliseren schenkt en niet zo strak 'getrapt' is (Gal'perin 1969, p. 270-273).

Tenslotte treft men in de vakdidactische literatuur ook wel verwijzingen naar *informatieverwerkingstheorieën* aan, zij het tot nu toe spaarzaam. Dat laatste is ook wel begrijpelijk omdat ze minder zekerheid naar het onderwijspraktisch aantrekkelijk beeld van de didactische drieslag 'handeling-plaatje-symbool' uitstralen dan de zojuist besproken theorieën (vgl. Resnick en Ford, 1981, p. 249).

We vestigen met trefwoorden de aandacht op enkele nieuwe accenten die vanuit deze hoek bij het cijferen geplaatst worden: het belang van het zich voorstellen van concreet uitgevoerde cijferhandelingen, volgend op het materiële handelen zelf; de belangrijke functie van het werkgeheugen bij het uitvoeren van de cijferprocedures wat betreft het 'onthouden' – even vasthouden-doorrekenen-terughalen, en de problemen die daaraan inherent zijn; de organisatie van de kennis, bijvoorbeeld van het begrip plaatswaarde met betrekking tot de cijferhandelingen bij de vier basisoperaties en de relaties tussen die bewerkingen; het ontstaan en bestaan van systematische fouten i.c. verkeerde procedurehandelingen; en de aandacht voor zelf-gevonden onorthodoxe algoritmen (vgl. Resnick and Ford, 1981).

2.4 *Relatie tot klassieke vakdidactiek*

Ziehier een overzicht van de onderwijs-leertheoretische achtergronden waarnaar in de vakdidactische werken herhaaldelijk verwezen wordt. We constateerden dat het wiskundige cijferen veelzijdig theoretisch onderbouwd is, of althans als zodanig geafficheerd kan worden. De vraag is nu hoe dit cijferen, dat sterk geënt is op structurele opvattingen over wiskunde-onderwijs, zich in het bijzonder verhoudt tot opvattingen als die van Kühnel, Wertheimer e.a. Deze vraag is daarom van belang, omdat hij ons naar kritische punten in de wiskundige cijferleergangen kan leiden.

3 *Kritische punten in de leergang*

Eerder (Treffers, 1982) is aangegeven dat de praktijk in het *traditionele* cijferonderwijs op drie hoofdpunten van de vakdidactische opvattingen van Kühnel e.a. verschilt: naar de mate van nagestreefd inzicht in de cijferprocedures, op de plaats en de betekenis van contextproblemen in de cijferleergang en ten aanzien van het al dan niet nastreven van de standaard-vormen per deelgeval en de macrostructurering van de leerstof. In tegenstelling tot de vakdidactische aanbevelingen dienaangaande is het traditionele cijferonderwijs nogal mechanistisch van inslag. Ook worden er geen contextproblemen als startpunt voor het cijferen gebruikt. Tevens wordt in het traditionele cijferen steeds direct op de meest verkorte eindhandelingen per deelgeval aangestuurd, wat evenzeer in tegenspraak is met de vakdidactische conceptie van Kühnel.

In het volgende zullen we nagaan welke de theoretische denkbeelden van het *wiskundige* cijferen zijn op de genoemde punten van inzicht, toepasbaarheid en leerstofstructurering en wat het onderzoek hieromtrent heeft opgeleverd. Men kan trouwens op voorhand uit de reeds besproken algemene kenmerken voor het wiskundige cijferen afleiden dat er in het wiskundige cijferen ten eerste een duidelijk streven naar inzicht is, ten tweede geen contextproblemen (toepassingen) in het cijferprogramma geïntegreerd zijn, en ten derde de traditionele leerstofordening geldt. Hier is echter de vraag aan de orde of een en ander ook in overeenstemming met de theoretische denkbeelden is.

3.1 *Inzicht*

Uit het voorgaande blijkt dat de denkbeelden van Dienes en Gal'perin wat het cijferen aangaat uitdrukkelijk op het inzichtelijke leren van de procedurehandelingen gericht zijn. Ze voldoen derhalve aan het 'categorisch imperatief' van de aloude rekendidactiek. Resnick conformeert zich echter niet zonder meer aan dat standpunt en werpt de vraag op of het wellicht niet effectiever zou zijn eerst de algoritmen 'blind' aan te leren en pas achteraf inzicht in de onderliggende principes te verschaffen (Resnick and Ford, 1981, p. 110).

De vraag is dus in feite: loont inzicht?

Het antwoord daarop luidt in globale zin bevestigend.

De 'blinde' mechanistische werkwijze voert namelijk noodzakelijkerwijs naar een leergang met talloze deelgevallen, die min of meer los van elkaar staan en bijgevolg stuk voor stuk als relatief zelfstandige algoritmen ingeslepen moeten worden: de nul vormt een apart probleem, maar twee nullen ook, drie-cijfergetallen geven na de twee cijfer-getallen nieuwe moeilijkheden, lange optellingen met deeluitkomsten boven de twintig moeten onderscheiden worden van optellingen met twee termen... Dit alles vraagt uiteraard nogal wat oefening en kost derhalve veel tijd, temeer als we bedenken dat ook de retentie door de blinde aanpak bij de tamelijk complexe algoritmen voor vermenigvuldigen en delen bemoeilijkt wordt (Kurtz, 1973).

Als klassiek voorbeeld van vergelijkend onderzoek op dit terrein geldt het werk van Brownell (Brownell, 1947, Brownell en Moser, 1949). Hij 'kruiste' twee cijfermodellen voor het aftrekken – namelijk de thans gangbare standaard-werkwijze van het lenen en die van het 'gelijke-optellen' van aftrektal en aftrekker met bijvoorbeeld respectievelijk tien eenheden en één tiental – met zowel een inzichtelijke als een mechanistische aanpak, zodat vier verschillende werkwijzen ontstonden die onderling vergeleken werden. In alle gevallen bleek de inzichtelijke aanpak superieur aan de 'blinde' methodiek, welk cijfermodel het in het ene of andere geval betrof. Ook in andere onderzoeken wordt de superioriteit van de inzichtelijke aanpak bevestigd, waarbij veelal gebruik gemaakt wordt van positiematerialen en -schema's (Wheeler, 1972; Punn, 1974). Niet is aangetoond dat de inzichtelijke methode volgens de didactische drieslag 'materieel handelen-plaatje-symbool' superieur zou zijn aan inzichtelijke methoden die niet het primaat bij het materiële handelen leggen. De onderzoeksresultaten zijn namelijk nogal strijdig (vgl. Ekman, 1967; Kieren 1971; Friedman, 1978; Shumway, 1980; Suydam en Dessart, 1980; Khoury en Behr, 1981). Wellicht biedt die drieslag een te grove karakteristiek van het wiskundige cijferen en is hij te zeer tot de oppervlaktestructuur van het leren en onderwijzen bepaald, dat vergelijkend onderzoek hieromtrent uitsluitsel zou kunnen geven.

Evenmin is een positief effect van het rekenen binnen verschillende talstelsels vastgesteld (McCormick, 1965; Scrivens 1968). Overigens achten onderwijsgevenden in de V.S. talstelsels niet acceptabel voor het basisonderwijs (Denmark en Kepner, 1980).

Wat uit observaties en analyses van onderwijs-leerprocessen wel zonneklaar blijkt, is dat het (wiskundige) cijferonderwijs een genuanceerde didactische aanpak vraagt ten aanzien van het stimuleren van het 'gedachte' handelen; het aanzetten tot reflectie via schematiseren, verwoorden en symboliseren; het onderhouden van de basisvaardigheden; het verhogen van de actieve betrokkenheid van de leerling via aansprekende probleemstellingen; en het verbinden van het mentale handelen op verschillende niveaus (vgl. Steinberg en Anderson, 1973; Wittrock, 1974; Fitzgerald, 1976; Van Eerde en Verhoef, 1978; Davis en McKnight, 1980; Resnick en Ford, 1981; Bednarz en Janvier, 1982).

In zoverre op het stuk van inzicht dus van een knelpunt van het wiskundige cijferen gesproken kan worden, geldt deze niet zozeer de algemene conceptie als wel de specifieke uitvoering welke een genuanceerde werkwijze vereist.

Gelet op al het voorgaande lijkt een minder strakke variant van de trapsgewijze onderwijsprocedure van Gal'perin nog de best passende theoretische omkleding voor het wiskundige cijferen volgens progressieve complicering te kunnen bieden.

3.2 *Toepassingen*

Men zal bij Dienes tevergeefs zoeken naar reële problemen die zowel als bron en als toepassingsgebied van het cijferen dienen. Sterker: het cijferonderwijs in de zin van Dienes is verder van de realiteit verwijderd dan dat in het rekenonderwijs ooit het geval was. (Zie bijvoorbeeld Dienes, 1966, p. 106).

Ook Resnick en Gal'perin zetten bij het cijferen de contextproblemen tussen haakjes. Of juister: de kwestie van de toepassingen wordt door hen in het geheel niet als zodanig gesteld.

Evenals bij het traditionele rekenen bestaat er hier dus een kloof tussen het wiskundige cijferen en het vakdidactisch voorgestane cijferonderwijs. Nu is het echter de vraag of dit zo bezwaarlijk is: de kinderen hebben immers in de eerste leerjaren van de basisschool inzicht in de vier basisoperaties verworven en kunnen daar toch een (toe-)passend gebruik van maken – zo lijkt het.

Onderzoek heeft echter uitgewezen dat in het gangbare cijferonderwijs onderscheid gemaakt dient te worden tussen het maken van toepassingen middels informele methoden, het 'technisch' kunnen uitvoeren van de procedurebehandelingen, en het benutten van algoritmen bij het oplossen van contextproblemen c.q. toepassingen (Slesnick, 1982). Nu blijkt dat ongeveer de helft van de twaalfjarigen geen optimaal gebruik maakt van de cijferprocedures bij met name vermenigvuldig- en deelproblemen, vooral ook omdat die kinderen de betreffende operaties niet altijd goed in de 'aangeklede' opgaven kunnen identificeren (Foxman, 1980; Hart, 1981). Dit resultaat klemt te meer als we het in het licht van de ontwikkelingen op het gebied van zakrekenmachines en zakcomputers bezien: het gebruik van deze rekendoosjes wordt hierdoor immers evenzeer beperkt. En dan spreken we nog niet eens over kommagetallen en verhoudingen waar de beheersing van enkelvoudige toepassingen aan het einde van de basisschool ver beneden de 50% ligt (Hughes, 1979; Hart, 1981).

Kortom, de veronderstelling dat kinderen uit de midden- en bovenbouw van de basisschool de geleerde cijferprocedures 'automatisch' kunnen en zullen toepassen op de daartoe geëigende problemen, is niet conform de onderzoeksbevindingen. Kinderen die moeite met enkelvoudige toepassingen hebben, blijken globaal één en dezelfde werkwijze te volgen. Ze brengen namelijk alle basisoperaties die in contextproblemen vervat liggen tot één operatie terug, te weten optellen. Bij deze additieve werkwijze wordt aftrekken op-tellen, vermenigvuldigen herhaald op-tellen, en delen ook (Teule-Sensacq en Vinrich, 1982). Zodoende ontstaat er als het ware een systeemscheiding tussen formele en informele wiskunde. Booth zegt het zo: 'the child is in fact operating in mathematics within a system of his own which belongs to a different universe of discourse to that of mathematics...' (Booth, 1981, p. 39-40).

Cijferen voltrekt zich aldus langs formele welgebaande lanen, terwijl het maken van contextopgaven via informele ongeplaveide paden verloopt. En deze wegen ontmoeten elkaar niet in alle gevallen (zie ook Brown en Kücheman, 1976; McIntosh, 1978, 1979; Brown, 1981).

Er rest slechts één conclusie: de problematiek van de toepassingen is in het wiskundige cijferen en de theoretische omkleding ervan ten onrechte verwaarloosd. Anders gezegd: de kwestie van de toepasbaarheid van de cijferalgoritmen is een knelpunt in de leergang van het wiskundige cijferen – en trouwens ook in die van het traditionele cijferen. Kortom, de kloof met het vakdidactische ideaal is op dit punt blijven bestaan.

3.3 *Standaard-vorm en leerstofordening*

Ook op het punt van de standaard-vorm en leerstofordening is de kloof niet gedicht. Opvallend is dat in de onderwijsleertheoretische beschouwingen van Dienes, Gal'perin en Resnick de kwestie van de leerstofordening, wat het cijferen betreft, evenzeer onbesproken blijft.

Dienes benadrukt bij de vakinhoudelijke analyse vooral het belang van plaatswaarde en talstelsels. Dat schematisering en verkorting evenzeer als belangrijke variabelen op macroniveau beschouwd kunnen worden, noemt hij niet uitdrukkelijk. En daarmee laat hij de traditionele leerstofordening binnen het decimale stelsel onaangetast en onbesproken.

Voor Gal'perin geldt hetzelfde: hij betrekt zijn trapsgewijze procedure vooral op de micro-ordening van de deelgevallen bij het cijferend optellen en aftrekken, maar niet primair op de macro-sequentie van de leergang als geheel.

Resnick en Ford tenslotte brengen evenmin de bestaande leerstofordening in het geding, ondanks hun grote aandacht voor de organisatie en de onderlinge relatie van de leerstof voor de basisalgoritmen.

Toch zijn er verschillende redenen om de traditioneel bepaalde cijferleerstof, ja zelfs het cijferen als geheel, ter discussie te stellen.

Zo is er in de loop van de geschiedenis bij voortduring een hoofdrekenbeweging werkzaam geweest die afschaffing van het aanleren van de standaard-algoritmen heeft bepleit. Die stroming wordt onder invloed van ontwikkelingen op het gebied van de micro-electronica steeds breder (Plunkett, 1979; Papert, 1980; Levin, 1981; Atweh, 1982).

Daarnaast loopt een enigszins verwante stroom die ongeveer dezelfde accenten plaatst maar toch wat meer naar uniforme eindalgoritmen streeft (Hutton, 1977; MacDonald, 1977; De Jong, 1977; Bennedbek, 1981). Kenmerkend is hier de toenemende schematisering op macro-niveau en de voortschrijdende complicering op micro-niveau – precies het spiegelbeeld van het gangbare wiskundige cijferen dus, maar wel een getrouw beeld van de historische groei van de algoritmen (Streefland, 1979).

Al met al zijn er dus verschillende redenen om de gangbare leerstofordening nader te motiveren, dit mede met het oog op de opvattingen van Kühnel, Wertheimer e.a. dienaangaande. Welnu, dit is door de genoemde onderwijs-leertheoretici niet gebeurd. Ze rekenen dit overigens ook niet altijd tot hun taak (Gal'perin en Talyzina, 1974, p. 109). Ten onrechte naar onze mening, maar het is hier niet de plaats om nader op de problematiek van de logische en psychologische analyse (Gal'perin) of de rationele en empirische analyse (Resnick) in te gaan. (Zie voor een standpuntbepaling Treffers, 1979, p. 88 e.v.).

In ieder geval kan de gangbare leerstofordening van het wiskundige cijferen als een kritisch onderdeel aangemerkt worden, althans een punt dat een kritische beschouwing vraagt.

3.4 *Samenvatting*

We hebben de theoretische opvattingen (volgend op de praktische uitwerkingen in de eerste paragraaf) en de onderzoeksresultaten op de aspecten van inzicht, toepasbaarheid en leerstofordening doorgelicht – punten die ook in de vroegere vakdidactische discussies een centrale plaats innamen. De uitkomst is dat het punt van inzicht ruimschoots en terecht de aandacht gekregen heeft in zowel theorie als onderzoek. Maar ook blijkt dat de twee andere kernonderdelen al te zeer verwaarloosd zijn in de theoretische omkleding. Met name op het punt van de toepassingen heeft onderzoek uitgewezen dat daar grote problemen liggen. Ook bij de leerstofordening zijn er problemen. Deze zijn ten dele terug te voeren tot de doelstellingenproblematiek i.c. de plaats van het cijferen in het technologisch tijdperk.

4 *Indicatie van een alternatieve opzet*

Het signaleren van kritische punten ten aanzien van toepasbaarheid, standaard-vorm en leerstofordening is wellicht zinvol, maar de kernvraag is: zijn er alternatieven? We noemden er zojuist twee: de hoofdrekenbeweging en de niet-standaard-richting. Bij de schets van een alternatieve opzet zullen we ons tot de laatstgenoemde richting bepalen, omdat deze ook de belangrijkste elementen van de hoofdrekenbeweging bevat.

Allereerst de kwestie van de toepassingen. We zullen deze bespreken aan de hand van de staartdeling. Welnu, het is bekend dat kinderen contextproblemen waarin een deling besloten ligt, vaak door middel van herhaald op-tellen oplossen (Teule-Sensacq en Vinrich, 1982). Met dit gegeven ligt het voor de hand bij het cijferend delen voor het herhaald op-telmodel te kiezen. Daarbij kan men dan contextproblemen als bron voor het algoritmiseringsproces gebruiken. Globaal gesteld zou men ze steeds weer op alle belangrijke punten in de leergang – bijvoorbeeld bij het groter worden van deeltallen en delers – als uitgangspunten voor het leren van de algoritmen en als toepassingen van de cijferprocedures kunnen laten fungeren, naast 'kale cijfersommen' (Capps, 1962; Hutton, 1977; MacDonald, 1977; Teule-Sensacq en Vinrich, 1982). Voorts wordt cijferen in deze aanpak vooral als een vorm van handig rekenen beschouwd waarin wordt aangesloten op de informele rekenmethoden die kinderen bij contextopgaven voor vermenigvuldigen en delen gebruiken (Hart, 1981; Treffers, Ter Heege en Dekker, 1982). En wel een vorm van handig rekenen die de kinderen zodanig overtuigt, zoals bijvoorbeeld het afnemen van grote happen honderd- en tientallen bij het herhaalde op-tellen, zeg af-schatten, dat ze zelf ook een dergelijke verkorte werkwijze gaan hanteren. Daarbij hoeft het dan uiteraard niet op voorhand vast te staan dat zo'n leergang naar de standaard-algoritmen zou voeren.

Ziehier een ruwe schets van wat we *geïntegreerd* cijferonderwijs zullen noemen, waarbij 'geïntegreerd' op de ineenvlechting van cijferen, hoofdrekenen en toepassen slaat.

Ten tweede enkele opmerkingen over de 'alternatieve' leerstofordening volgens het principe van de *progressieve schematisering* die met de integratieve werkwijze gecombineerd kan worden. Neem de aftrekking '57 – 18' die in de eerste paragraaf als voorbeeld diende. Bij het gangbare wiskundige cijferen wordt, eventueel via tussenvormen, steeds direct naar de eindalgoritme-vorm gestreefd en als de leerling die beheerst voor twee getallen met twee cijfers, wordt overgegaan op grotere getallen van bijvoorbeeld drie bij twee of drie bij drie cijfers, waarvoor zich dan de procedure herhaalt. Bij het cijferen volgens progressieve schematisering wordt echter reeds in een vroeg stadium met, in principe, onbeperkt grote getallen gerekend, doch die berekeningen vinden op een aangepast niveau van schematisering plaats. Dit betekent dat sommige kinderen nog gebruik maken van positiemateriaal, terwijl anderen reeds zonder positiestrepen werken. In de loop van de leergang vindt een verdere schematisering en verkorting plaats en die loop kan voor ieder kind verschillen (Bennedbek, 1981). Ook de eindvormen van de algoritmen hoeven niet voor alle kinderen dezelfde te zijn. Met name de zwakke rekenaars kunnen met een wat uitgebreidere algoritme als eindvorm volstaan. Dit alles impliceert dat in een heterogene groep dezelfde problemen gegeven kunnen worden, die dan qua cijferprocedures gedifferentieerd worden opgelost (Dekker, 1980 en Ter Heege, 1980).

Over de (opmerkelijke) resultaten van dit geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering zullen we later in dit tijdschrift publiceren. Maar over de *theoretische omkleding* ervan hier enkele opmerkingen tot besluit.

Stelling: men kan het zojuist geschetste 'alternatieve' cijferprogramma met dezelfde algemene onderwijs-leertheorieën omkleden als die welke voor het wiskundige cijferen dienst doen! Neem bijvoorbeeld de trapsgewijze onderwijsprocedure van Gal'perin. Deze bevat geen aanwijzingen voor leerstofkeuze, dat is tot daaraan toe. Maar ook als er reeds een keuze gemaakt is, bijvoorbeeld voor het leren cijferen, kan men aan de betreffende theorie geen ééntduidige indicaties voor de leerstofordening ontlenen (Gal'perin pretendeert dat overigens ook niet). Zo is het mogelijk de trapsgewijze procedure toe te passen op de micro-structurering van de leerstof – bijvoorbeeld bij het aftrekken onder de honderd, zoals Gal'perin dat zelf ook doet – maar evengoed kan men hem voor de macro-structurering van de cijferleergang gebruiken en aldus de toenemende schematisering en verkorting van bovengeschikt belang nemen en de complicering van de opgaven van ondergeschikte betekenis. Anders gezegd: op deze wijze modelleert men de trapsgewijze procedure ten behoeve van een fundamenteel andere cijferleergang dan die van het wiskundige cijferen. Maar het zegt natuurlijk wel wat over de specificiteit van een onderwijs-leertheorie als zulke verschillende leergangen – verschillend zowel naar de plaats van de toepassingen als ook de aard van de macro-structurering – door één en dezelfde onderwijs-leertheorie omkleed kunnen worden.

Voor de andere, eerder besproken theorieën geldt trouwens hetzelfde: ook daarin vindt men geen duidelijke aanwijzingen over de micro- en macro-ordening van de leerstof en over de verbindingen van cijferen met handig rekenen en cijferen met toepassen (vgl. bijvoorbeeld Scandura en Yens, 1982). Derhalve kan men vanuit die theorieën geen greep op die variabele onderdelen krijgen. En, zoals gezegd, zijn dat nu precies de (knel-)punten waarin het gangbare cijferen verschilt van de niet-standaard-cijferaanpak en exact de aspecten die de aloude rekendidactici geaccentueerd hebben. Het onderzoek nu weerspiegelt die theoretische leemten!

Dit alles overziend dringt zich het belang op van een specifieke theorie voor het cijferonderwijs, waarin uitgangspunten, doelstellingen, leerstofordening op micro- en macroniveau, en de relatie tussen cijferen en handig rekenen en tussen cijferen en toepassen niet onbesproken blijven.

Tot zover de korte schets van een alternatieve cijferleergang, welke vooral ook gegeven werd om de knelpunten in de leergang als ook in de theoretische fundering ervan in een helder licht te plaatsen.

We mogen daarbij echter niet verhelen dat met name op het punt van het inzicht in de cijferprocedures grote vooruitgang geboekt is in het wiskundige cijferonderwijs in vergelijking met het traditionele cijferonderwijs.

5 *Samenvattend overzicht*

De nadruk die bij het wiskundige cijferen op inzicht in de cijferprocedures gelegd wordt, alsmede het vanzelfsprekende volgen van de logische leerstofordening leidend naar de standaard-algoritmen, en het veronachtzamen van in de cijferleergang geïntegreerde contextproblemen (toepassingen), zijn geheel conform de onderwijs-leertheoretische en vakdidactische opvattingen omtrent het wiskundige cijferen volgens de concepten van Dienes (Bruner, Piaget), Gal'perin en (ten dele) Resnick.

Onderzoek heeft uitgewezen dat de nadruk op inzicht (o.a. vanuit optimaliseringsoverwegingen) wel terecht is, maar de zeer lichte toets op toepassingen niet. En de 'volgzaamheid' ten aanzien van de standaard-algoritmen en de leerstofordening is mede vanuit andere overwegingen discutabel te noemen. Deze betreffen ten dele de doelstellingen van het cijferonderwijs in het tijdsgewricht waarin kinderen de beschikking over allerhande rekenautomaten (zullen) hebben.

Traditioneel cijferen kan kort gekarakteriseerd worden als rekenen-zonder-hoofd. Dat kan van het wiskundige cijferen zeker niet gezegd worden. In zoverre is er sprake van vooruitgang. Maar ook het wiskundige cijferen heeft z'n beperkingen. De gerichtheid op inzicht is namelijk te zeer tot het besloten terrein van het cijferen bepaald. Aldus kan dit cijferen het beste gekenschetst worden als rekenen-zonder-vleugels: het biedt de (zwakke) leerlingen weinig gelegenheid om boven het cijferen uit te stijgen en een vlucht naar toepassingsgebieden mogelijk te maken.

Noten

1. In later werk heeft Dienes (1971, 1973) de stadia in het wiskundig leerproces verfijnd en uitgebreid tot het voortgezette wiskundige onderzoek waarin de leerlingen binnen een formeel systeem werken en op basis van enkele axioma's en grondstellingen nieuwe stellingen afleiden en bewijzen. Deze uitgebreide fasering is voor het cijferen echter niet relevant, vandaar dat we er hier niet nader op ingaan.
2. We bepalen ons hier tot het werk van Gal'perin. Elders (Treffers, 1979) zijn we op de opvattingen van Davydov ingegaan. Ook het werk van Landa (1976) laten we hier onbesproken, hoewel met name zijn ideeën over identificatie-algoritmen voor het cijferen van belang zijn in verband met de toepasbaarheid van de cijferprocedures. Er moet echter direct aan toegevoegd worden dat bij Landa niet duidelijk wordt hoe de algoritmen onderwezen moeten worden – men kan er geen concrete aanwijzingen van het cijferonderwijs uit afleiden.

Literatuur

Atweh, B., Developing mental arithmetic. In: L. Silvey en J. R. Swart (Eds.), *Mathematics for the Middle Grades (5-9)*. Reston: N.C.T.M., 1982, 50-59.

Barnett, J. C. en P. M. Eastman, The use of manipulative materials and student performance in the enactive and iconic modes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1982, *9*, 94-103.

Bednarz, N. en B. Janvier, The understanding of numeration in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 1982, *13*, 33-59.

Bennedbek, B., Is self taught well taught? *Mathematics Teaching*, 1981, *95*, 11-14.

Boonstra, H. H., *De rekenfout nader beschouwd*. Nijkerk: Intro, 1980.

Booth, L. R., Child-methods in secondary mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 1981, *12*, 29-41.

Borghouts-van Erp, J. W. M., *Rekenproblemen: oplossen en opsporen*. Groningen: Wolters-Noordhoff, 1978.

Brown, M., Is it an 'add' miss? *Mathematics in School*, 1981, *10*, 26-29.

Brown, M. en D. Küchemann, Is it an 'add' Miss?(1). *Mathematics in School*, 1976, *5*, 15-18.

Brownell, W. A., An experiment on 'borrowing' in third grade arithmetic. *Journal of Educational Research*, 1947, *41*, 161-171.

Brownell, W. A. en H. E. Moser, *Meaningful vs mechanical learning: A study in grade III subtraction*. Durham: Duke University Press, 1949.

Bruner, J. S., A conceptual model of instruction. In: R. T. Hyman (Ed.), *Contemporary thought on teaching*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1971.

Capps, L. R., Making division meaningful and logical. *The Arithmetic Teacher*, 1962, *9*, 198-204.

Collier, E. C. en H. H. Lerch, *Teaching mathematics in the modern elementary school*. London: MacMillan, 1969.

Copeland, R. W., *How children learn mathematics*. New York: MacMillan, 1979.

D'Augustine, C. H. *Multiple methods of teaching mathematics in the elementary school*. New York: Harper en Row, 1968.

Davis, R. B. en D. McKnight, The influence of semantic content on algorithmic behavior. *The Journal of Mathematical Behavior*, 1980, *3*, 1-88.

Dekker, A., Praktische wenken bij progressieve schematisering. In: CIO, *de begeleiding van algoritme-programma's in het rekenonderwijs van de basisschool*. 's-Hertogenbosch: CIO, 1980, 66-85.

Denmark, T. en H. S. Kepner, Basic skills in mathematics: a survey. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1980, *11*, 104-124.

Dienes, Z. P. *Mathematics in the primary school*. London: MacMillan, 1966.

Dienes, Z. P., *Wij bouwen wiskunde op*. 's-Hertogenbosch: Malmberg, 1970.

Dienes, Z. P. en E. W. Golding, *Approach to modern mathematics*. New York: Herder en Herder, 1971.

Dienes, Z. P., *De zes stadia in een wiskundig leerproces*. 's-Hertogenbosch: Malmberg, 1973.

Eerde, D. van en L. Verhoef, Analyse van het optellen en aftrekken op de basisschool. *Pedagogische Studiën*, 1978, *55*, 354-367.

Ekman, L. G., A comparison of the effectiveness of different approaches to the teaching of addition and subtraction algorithms in the third grade. *Dissertation Abstracts International*, 1967, *27*, 2275-2276.

Fitzgerald, A., An excursion into subtraction and long multiplication. *Mathematics Teaching*, 1976, *74*, 30-34.

Foxman, D. D. (Ed.), *Mathematical Development*. London: H.M. Stationary Office, 1980.

Freudenthal, H., Structuur der wiskunde en wiskundige structuren; een onderwijskundige analyse. *Pedagogische Studiën*, 1979, *56*, 51-61.

Friedman, M., The manipulative materials strategy: the latest pied piper? *Journal for Research in Mathematics Education*, 1978, *9*, 78-81.

Gal'perin, P. J., Stages in the development of mental acts. In: M. Cole en J. Maltzman (Eds), *Handbook of contemporary soviet psychology*. London: Basic Books, 1969, 149-173.

Gal'perin, P. J. en N. F. Talyzina, Die Bildung erster geometrischer Handlungen der Schülers. In: P. J. Gal'perin en A. N. Leontjew (Eds). *Probleme der Lerntheorie*. Berlin: Volk und Wissen, 1974_4, 106-130.

Hart, K. (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: Murray, 1981.

Heege, H. ter, Observeren? Analyse en remediërend werk. In: CIO, *de begeleiding van algoritmeprogramma's in het rekenonderwijs van de basisschool*. 's-Hertogenbosch CIO, 1980, 86-98.

Hughes, M., Testing numeracy. *Mathematics Teaching*, 1979, *89*, 28-30.

Hutton, J., Memoirs of a math teacher 5. Logical reasoning. *Mathematics Teaching*, 1977, *81*, 8-12.

Jong, R. de (Ed.), *De abakus*. Utrecht: IOWO, 1977.

Khoury, H. A. en M. Behr, Student performance, individual differences and modes of representation. *Journal for the Research in Mathematics Education*, 1982, *13*, 3-16.

Kieren, T. E., Manipulative materials in mathematics learning. *Journal for the Research in Mathematics Education*, 1971, *2*, 228-235.

Kühnel, J., *Neubau des Rechenunterrichts*. Bad Heilbrun: Julius Klinkhardt, 1966_{11}.

Kurtz, R., Fourth-grade division: How much is retained in grade five. *Arithmetic Teacher*, 1973, *20*, 63-66.

Landa, L. N., *Instructional regulation and control. Cybernetics algorithmization and heuristic in education*. Englewood Cliffs: Educational Technology Publications, 1976.

Levin, J. A., Estimation techniques for arithmetic:

everyday math and mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 1981, *12*, 421-435.

MacDonald, T. H., A general concept internationalization model exemplified by the long division algorithm. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1977, *8*, 157-166.

McCormick, R. L., A comparative study of two methods of teaching a decimal system of numeration. *Dissertation Abstracts International*, 1965, *26*, 1430-1431.

McIntosh, A., Some children and some multiplications. *Mathematics Teaching*, 1979, *87*, 14-16.

N.C.T.M., *Mathematics for elementary schoolteachers*. Washington: N.C.T.M., 1966.

Nelissen, J. M. C., De theorie van P. J. Gal'perin in discussie. *Pedagogische Studiën*, 1980, *57*, 305-322.

Papert, S., *Mindstorms. Children, computers and powerful ideas.* Brighton: The Harvester Press, 1980.

Piaget, J., Comments on mathematical education. In: A. G. Howson (Ed.), *Developments in mathematical education*. London: Cambridge University Press, 1973, 79-88.

Plunkett, S., Decomposition and all that rot. *Mathematics in school*, 1979, *8*, 2-5.

Punn, A. K., The effects of three modes of representation in teaching multiplication facts on the achievement and attitudes of third grade pupils. *Dissertation Abstracts International*, 1974, *34*, 6954-55.

Resnick, L. B. en W. Ford, *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1981.

Riedesel, C. A. en L. C. Callahan, *Elementary school mathematics*. New York: Harper en Row, 1977.

Rising, G. R. en J. B. Harkin, *The third 'R'. Mathematics teaching for grades K-8*. Belmont: Wadsworth P. C., 1978.

Scandura, J. M. en D. P. Yens, Problem solving in medicine and beyond: transitions from the naive to the neophyte to the master clinician. *Journal of Structural Learning*, 1982, 7, 9-34.

Scrivens, R. W., A comparative study of different approaches to teaching the Hindu-Arabic numerations system to third graders. *Dissertation Abstracts International*, 1968, *29*, 839-840.

Shumway, R. J. (Ed.), *Research in mathematical education*. Reston: N.C.T.M., 1980.

Slesnick, T., Algorithmic skills vs conceptual understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 1982, *13*, 143-155.

Steinberg, E. R. en B. C. Anderson, Teaching tens to Timmy, or a caution in teaching with physical models. *The Arithmetic Teacher*, 1973, *20*, 620-626.

Steiner, G., *Mathematik als Denkerziehung. Eine psychologische Untersuchung über die Rolle des Denkens in der mathematischen Früherziehung*. Stuttgart: Ernst Klett, 1973.

Streefland, L., Historisch perspektief. In: A. Treffers (Ed.), *Cijferend vermenigvuldigen en delen (1)*. Utrecht: IOWO, 1979, 131-154.

Suydam, M. N. en D. J. Dessart, Skill learning. In: R. J. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education*. Reston: N.C.T.M., 1980.

Teule-Sensacq, P. en G. Vinrich, Resolution de problèmes de division au cycle élementaire dans deux types de situations didactiques. *Educational Studies in Mathematics*, 1982, *13*, 177-205.

Treffers, A., *Wiskobas Doelgericht. Een methode van doelbeschrijving van het wiskunde-onderwijs volgens Wiskobas.* Utrecht: IOWO, 1978.

Treffers, A. (Ed.), *Cijferend vermenigvuldigen en delen (1). Overzicht en achtergronden*. Utrecht: IOWO, 1979.

Treffers, A., Cijferen in het rekenonderwijs van toen en nu. *Pedagogische Studiën*, 1982, *59*, 97-116.

Treffers, A., H. ter Heege en A. Dekker, De kloof tussen cijferen en enkelvoudig toepassen. *Willem Bartjens*, 1982, *1*, 81-89.

Wertheimer, M., *Productive Thinking* (enlarged version). London: Associated Book Publishers, 1966.

Wheeler, L. E., The relation of multiple embodiments of the regrouping concept to children's performance in solving multi digit addition and subtraction examples. *Dissertation Abstracts International*, 1972, *32*, 4260.

Williams, E. M. en H. Shuard, *Primary mathematics today*. London: Longman, 1970.

Wittrock, M. C., A generative model of mathematics learning. *Journal for the Research in Mathematics Education*, 1974, 5, 181-197.

Curriculum vitae

Zie Pedagogische Studiën, 1982, *59*, 116

Manuscript aanvaard 15-6-'82