Cognitieve ontwikkeling en wiskunde-onderwijs

L. STREEFLAND
Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs, Utrecht

Samenvatting

Over de relatie cognitieve ontwikkeling en onderwijs is al veel geschreven. Vooral de inhoud van de theorieën van sovjetpsychologen gaf hiertoe aanleiding[1]. *In dit artikel wordt ingegaan op enkele aspecten van deze relatie. Het betreft dan het wiskundeonderwijs in het algemeen, zij het dat hierbij exemplarisch te werk moet worden gegaan.*

Na de inleiding, waarin op begripsvorming in brede zin wordt ingegaan, vindt een beschouwing plaats van wiskundeonderwijsconstructie zoals die in de Sovjetunie en daarbuiten onder invloed van Davydovs en Gal'perins theorieën is of wordt uitgevoerd.

In een volgende paragraaf wordt het traditionele rekenonderwijs beschouwd in relatie tot de cognitieve-ontwikkeling en de Davydov-aanpak bij wiskundeonderwijsconstructie.

Vervolgens wordt, op basis van een concrete onderwijsbeschrijving, een alternatieve weg van wiskundeonderwijsontwikkeling geschetst, die resulteert in een standpuntbepaling van de auteur met betrekking tot de wenselijkheid van het geschetste alternatief.

In een 'Ten besluite' worden de belangrijkste overwegingen van het betoog samengevat in de vorm van conclusies.

1. *Enkele standpunten inzake begripsvorming*

De invloed van Vygotskij's theorieën op de hedendaagse inzichten over onderwijs en constructie van onderwijsleerpakketten in de Sovjetunie is nog steeds onmiskenbaar. Slechts in het perspectief van zijn theorieën en de wijze waarop die bijvoorbeeld door Davydov (en zijn navolgers) worden toegepast, kunnen de inhouden van onderwijs(psychologische) publikaties 'uit die hoek' op hun merites geschat worden[2].

Aan Marx' maatschappelijk-filosofische kritiek op de klassenmaatschappij ligt (onder andere) als uitgangspunt ten grondslag: 'Het maatschappelijk zijn bepaalt het bewustzijn.' In een systeem dat Marx' ideeën omtrent een klasseloze maatschappij tracht te realiseren, is een belangrijke taak voor de school weggelegd. Wanneer onder meer de cognitieve ontwikkeling als onderdeel van het bewustwordingsproces van de leerlingen gezien wordt, ligt het voor de hand hierbij aan de school als maatschappelijk instituut, een doorslaggevende rol toe te dichten. Het eerdergenoemde uitgangspunt van Marx wordt dan voor de school gespecificeerd in: het onderwijs bepaalt de cognitieve ontwikkeling. Onderwijs dient hierbij overigens ruim opgevat te worden. Het betreft de meer systematische omgang tussen volwassene en kind, gericht op die (bedoelde) ontwikkeling. Vygotskij beschouwde eveneens de relatie tussen onderwijs- en cognitieve ontwikkeling, waarvan hij stelde dat de eerste op de tweede vooruit zou moeten lopen, er als het ware richting aan zou moeten geven. In dit licht dient ook zijn – overigens hypothetisch – onderscheid tussen de actuele ontwikkeling en zône van naaste ontwikkeling gezien te worden: 'Het onderwijs is slechts dan goed, wanneer het de ontwikkeling vooruitstuwt. Hierdoor wordt een gehele reeks functies, die bezig zijn te rijpen en in de zône der naaste ontwikkeling liggen, tot leven geroepen', (Vos, 1976, pag. 273).

Uit deze woorden van Vygotskij blijkt al, dat hij niet bedoelde, dat het onderwijs dwingend, forcerend op de cognitieve ontwikkeling vooruit zou moeten lopen, doch veeleer tot rijping zou moeten brengen, wat zich bezig is in het kind aan (cognitieve) ontwikkeling te voltrekken[3].

In de relatie onderwijs-cognitieve ontwikkeling zag Vygotskij niet zozeer de opeenvolging als wel de interactie, het wederzijds op elkaar betrokken zijn als voornaamste kenmerk. Anders gezegd: onderwijs en cognitieve ontwikkeling dienen elkáár beïnvloedende processen te zijn. Inherent aan deze visie op onderwijs in de Sovjetunie is de dienstbaarheid van de leerpsychologie aan het onderwijs alsmede het verrichten van leerpsychologisch onderzoek in de onderwijsleersituatie in de schoolklassen. Een

 PEDAGOGISCHE STUDIËN 1980 (57) 344–357

voorbeeld, dat ongetwijfeld navolging verdient.

Die dienstbaarheid van de psychologie aan het onderwijs manifesteert zich bijvoorbeeld in het uitgangspunt, dat er een rechtstreeks verband bestaat tussen de mentale begripsontwikkeling bij leerlingen en het begripopbouwend proces in de activiteit van de leerkracht. Op de achtergrond speelt daarin dan mee de betekenis van een begrip binnen een wetenschappelijke context. Vygotskij maakte, in navolging van Piaget, onderscheid tussen alledaagse en wetenschappelijke begrippen, hoewel hij er een wat andere interpretatie aan gaf. Bij Piaget gaat het om empirisch-(fysische) begrippen, die het kind al handelend aan de materie verwerft en om logisch-mathematische begrippen, die resultante zijn van reflectie op dat handelen. In Vygotskij's visie echter is er sprake van een tegengestelde ontwikkelingsgang met betrekking tot beide begripstypen. Een wetenschappelijk begrip wortelt in een abstracte definitie en 'beweegt zich' naar het object toe, terwijl alledaagse (spontane) begrippen hun oorsprong vinden in het concrete object, waarbij abstractie resulteert in een definitie. Vergelijken we de verschillen in beide begripstypen, dan komen we tot het volgende overzicht:

Spontane begrippen zijn gebaseerd op eigen materiële ervaring van het kind (zintuigelijke confrontatie; explorerende activiteit).

Wetenschappelijke begrippen worden onderwezen (systematische samenwerking tussen volwassene en kind ligt eraan ten grondslag). Het wetenschappelijk begrip ontwikkelt zich in tegengestelde richting, van abstract naar concreet, niet van de dingen af, maar naar de dingen toe. Belangrijk daarbij is, dat het wetenschappelijk begrip deel is van een systeem, waaraan het zijn specifieke betekenis ontleent. In wetenschappelijke begrippen worden boven-empirische relaties mogelijk[4].

Veelal wordt het gemaakte onderscheid – dat zoals zal blijken nog onduidelijk is – toegelicht aan voorbeelden. Zo is het kind geneigd op grond van empirische bevindingen een walvis de kwalificatie 'vis' te geven; alleen door onderwijzen leert het 'beter weten'. Een ander voorbeeld is de ervaring 'Metaal voelt kouder aan dan karton', (bij gelijke omgevingstemperatuur!) ontleend aan een subjectief-empirische interpretatie van een vermeend verschil in temperatuur dat in het perspectief van warmtegeleiding objectief (wetenschappelijk) verklaard wordt. Zo spreken wij ook van 'de zon gaat onder om . . .', waar in termen van wetenschappelijke begrippen gesteld zou moeten worden 'door het wegdraaien van de aarde verdwijnt de zon om . . . uit ons blikveld'. Opmerkelijk is, dat de voorbeelden alle in de natuurwetenschappelijke sfeer liggen. Naar dergelijke voorbeelden zal men in de wiskunde vergeefs zoeken, tenzij men met condities gaat manipuleren[4]. Ook in natuurwetenschappelijk opzicht kunnen veranderde condities een totaal nieuwe realiteit te zien geven. Denk in dit verband bijvoorbeeld aan 'gewichtloosheid' bij de ruimtevaart.

Samengevat komt het er op neer, dat alledaagse begrippen in beginsel spontaan, onbewust en niet-systematisch zijn, terwijl voor wetenschappelijke begrippen steeds het tegengestelde geldt.

Spontane kinderlijke begrippen ontwikkelen zich tot wetenschappelijke begrippen door theoretische generalisatie. (In dienst van het theoretisch leren denken volgens Davydov). Om dit te bewerkstelligen dient in het onderwijs een confrontatie tot stand gebracht te worden tussen de subjectief-mentale staat, die een begrip bij de leerlingen heeft en de wetenschappelijke status van dat begrip. Het grote probleem in het onderwijs en bij onderwijsontwikkeling nu, is de juiste planning van dat confrontatiemoment. Vindt deze confrontatie te vroeg of te abrupt plaats, dan wordt het betrokken begrip geforceerd op een onbegrepen (vermeend) wetenschappelijk niveau gebracht. Vindt die confrontatie echter te laat plaats dan gaan, om met Montessori te spreken, gevoelige perioden onbenut voorbij en blijven kansen op bepaalde (cognitieve) ontwikkelingen liggen. Voorbeelden van onderzoek hebben duidelijk gemaakt hoe het onderwijs kansen op bepaalde begripsvormingsprocessen voorbij liet gaan[5].

Bij herhaling is reeds gewaarschuwd tegen het vroegtijdig en dus geforceerd aanbrengen van abstracte (wetenschappelijke) begrippen[6]. Vygotskij deed dit impliciet, door te spreken van de vooruitstuwende functie van het onderwijs bij het tot rijping brengen van reeds in ontwikkeling zijnde (cognitieve) functies. Hiermee wees hij in feite de opvatting af, dat het onderwijs het kind in zijn cognitieve ontwikkeling zou moeten 'vooruitsleuren'. Ook Piaget (1973) liet dit geluid horen en stelde dat het formaliseren van begrippen niet geforceerd mag worden, doch spontaan dient te verlopen. Met formaliseren bedoelde Piaget de inpassing van een (mentaal) begrip in een ruimer (mentaal) kader, een begrippenschema, een systeem of hoe men dit ook noemen wil. Theoretisch gesteld: voordat de reflectieve abstractie van een begrip plaatsvindt – dit is het formaliserende proces dat een begrip ondergaat – heeft het de status van intuïtieve notie. Dit stemt overeen met de niet-bewuste staat van het spontane (alledaagse) begrip, zoals Vygotskij dat onderscheidt. Ook andere auteurs, zoals Thom (1973) en

Freudenthal (1976-1979 en 1979a) wijzen het geforceerd ingrijpen door het onderwijs in begripsvormingsprocessen met nadruk af.

Vygotskij's standpunt omtrent de onderscheiden soorten van begrippen wordt zeker niet unaniem en ongenuanceerd gedeeld door alle leerpsychologen in de Sovjetunie. Menčinskaja (1969) bijvoorbeeld stelt dat wetenschappelijke begrippen eveneens hun oorsprong hebben in objecten of verschijnselen. Ze reconstrueren als het ware de alledaagse begrippen. Dit impliceert, dat aanvankelijk aan definities bij begripsvorming geen belangrijke rol kan worden toegeschreven, omdat het beschreven fenomeen (of object) in een definitie in fenomenologisch opzicht niet volledig 'uit de verf komt' (ook Skemp (1973) huldigt dit standpunt). Daarbij komt nog, dat in een definitie vaak teruggegrepen wordt naar een 'ruimer' begrip, dat nader gespecificeerd wordt; bijvoorbeeld: een vierkant is een rechthoek, die . . . (vergelijk Skemp). Davydov heeft een niet onbelangrijke nuancering aan Vygotskij's onderscheid in soorten van begrippen gegeven. Aan het eind van de tweede paragraaf gaan we hierop in.

Op deze plaats stellen we eerst de vraag aan de orde hoe de theoretische generalisatie, dat wil zeggen het omzetten van een spontaan in een wetenschappelijk begrip, tot stand kan komen.

Naar de mening van de auteur zijn er drie mogelijkheden. De beschrijving daarvan zal aan standpunten omtrent reken-wiskunde-onderwijs geïllustreerd worden en in één geval zal daarbij een concreet voorbeeld van onderwijsbeschrijving als leidraad dienen.

2. *De zogenaamde sovjet-aanpak van wiskunde-onderwijs.*

Uitgangspunt voor deze paragraaf vormen enkele publikaties die bepaalde theoretische denkbeelden uit de sovjetpsychologie ook voor ons taalgebied toegankelijk gemaakt hebben[1].

Wolters stelt (1978a, pag. 31): 'Het theoretisch kunnen generaliseren wordt bereikt door het denken van de leerlingen binnen het leerstofgebied te sturen van algemeen naar bijzonder. Voor het genoemde leerstofgebied (redactieopgaven; L.S.) betekent dit, dat de leerlingen eerst onderwijs krijgen in de algemene eigenschappen van de deel-geheel-relatie (sec) en dan in de algemene oplossingsmethode die natuurlijk zeer nauw samenhangt met het onderwijs in de deel-geheel-relatie en daarna pas concrete opgaven leren oplossen'.

'El'konin en Davydov stellen,' aldus Mikulina, 'dat het volledig beheersen van wetenschappelijke kennis alleen kan gebeuren op grond van theoretische generalisatie. Een belangrijk moment in deze generalisatie is het bewust kunnen afleiden van (een) algemene relatie in de betreffende leerstof.' en ook: 'Voor theoretische generalisatie moeten bijzondere activiteiten verricht worden, die leiden naar transformatie (of reconstructie) van de concrete situatie en het abstraheren van de oorspronkelijke algemene relatie. Specifiek voor die activiteit is, dat het ontdekken en eigen maken van de algemene relatie vooraf gaat aan het bezig zijn met de bijzondere gevallen van dat verschijnsel' (Nelissen c.s. 1977. pag. 26).

Programmatisch komt het voorgaande neer op:

- onderwijs de leerlingen in de algemene eigenschappen van de betrokken relatie aan (onbepaalde) grootheden en geef ze de middelen in handen om die relatie te beschrijven; te weten lettergebruik en schema;
- geef daarna bijzondere gevallen van die relatie en laat de leerlingen de confrontatie van algemeen en bijzonder tot stand brengen door het algemene op het bijzondere toe te passen c.q. het bijzondere door middel van het algemene te beschrijven. Van het rekening houden met enig spontaan begrip in ontwikkeling is (nog) geen sprake. De theoretische generalisatie vindt plaats aan hetgeen in algemene zin en als verbijzondering daarvan in het onderwijs wordt ingebracht.

Bij het onderwijzen van een wetenschappelijk begrip wordt echter wel rekening gehouden met de stand van zaken in de (cognitieve) ontwikkeling van het kind. Men zoekt concretiseringen bij dat begrip, waarmee op ontologische gronden wordt tegemoet gekomen aan de stelregel dat een begrip zich van concreet naar abstract ontwikkelt. De gegeven concretiseringen zijn dus illustratief voor het (cognitief) ontwikkelingsniveau van de leerling. In de praktijk van het onderwijs komt dit neer op een materialisering van het betrokken begrip in hanteerbaar of visueel materiaal, respectievelijk in een visueel schema[7]. Voordat het kind zelfstandig met het begrip kan omgaan en het kan toepassen in de bijzondere situaties, die daartoe aangereikt worden, krijgt het de gelegenheid zich volledig op dat begrip te oriënteren.

Er wordt om in termen van Gal'perin te spreken, een volledige oriënteringsbasis gelegd[8]. Voor het onderhavige geval van het oplossen van redactieopgaven met behulp van het algemene schema van de lineaire vergelijking met één onbekende betekent dit, dat het kind de voorwaarden moet leren kennen voor een correcte toepassing van dit schema. Dergelijke voorwaarden houden dan verband met bijvoor-

beeld:
- de formule voor de lineaire vergelijking, met eventueel daarbij een visueel schema;
- de eigenschappen van formule en visueel schema; Voor de formule houdt dit in, dat bij een bepaalde vorm, waarin de vergelijking gegoten is, zeg $ax + b = c$, gelijkwaardige vergelijkingen opgesteld kunnen worden, bijvoorbeeld $ax = c - b \Leftrightarrow x = \frac{c-b}{a}$ en dergelijke;
- het precieze verloop van de oplossing van bijzondere problemen bij toepassing van de aangereikte wetenschappelijke (algemene) middelen in casu formule en schema.

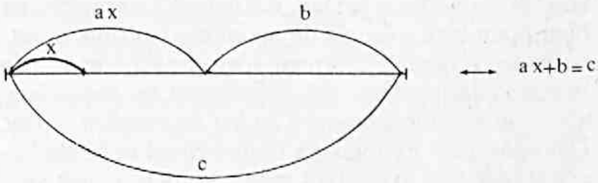
Bovenstaande kenmerken voor het leggen van een volledige oriënteringsbasis voor het oplossen van bepaalde redactiesommen, komen in het citaat aan het begin van deze paragraaf tot uitdrukking, waar achtereenvolgens gesproken wordt over:
- onderwijs in de algemene eigenschappen van de deel-geheel-relatie;
- onderwijs in de algemene oplossingsmethode;
- het leren oplossen van concrete opgaven.

Gal'perin onderscheidt twee typen van volledige oriënteringsbasis, namelijk
a. de *empirische volledige oriënteringsbasis,* die per afzonderlijke opgave wordt opgebouwd;
b. de *rationele volledige oriënteringsbasis,* waarbij de kinderen wordt geleerd deze – strak geleid – zelfstandig op te bouwen[8].

Door instructie worden uit efficiency-overwegingen de voorwaarden gecreëerd om de leerstof vlot te verwerken. 'De leerlingen worden meteen vanaf het begin geconfronteerd met de reeds eerder gesystematiseerde en gegeneraliseerde ervaringen van andere mensen, zoals die hun neerslag vinden in schoolboeken en in het lesgeven, d.w.z. in theoretische kennis.' (Davydov, 1974, pag. 7).

De geschetste gang van zaken heeft uitermate belangrijke consequenties voor leerstofkeuze en leerstofvolgorde in het wiskundeonderwijs. De wiskunde als wetenschap, als deductief systeem vormt namelijk aldus het uitgangspunt voor die keuze. Daaraan worden de begrippen, vaardigheden, inhouden ontleend die in het onderwijs gebracht worden. We gaan daarbij dan even voorbij aan de keuze van de doelen van dat onderwijs, maar die zijn binnen het betrokken leertheoretisch concept (of is het onderwijs-theoretisch concept?) zonder problemen vooraf vast te stellen[9].

Wanneer het dus redactieopgaven van het 'deel-geheel-relatie-type' betreft, is de lineaire vergelijking met één onbekende uitgangspunt. In verband met de leerstofkeuze wordt daarop een logische analyse gepleegd, wat de aandacht vestigt op:
- het opstellen van met de gegeven vergelijking gelijkwaardige vergelijkingen;
- het onderzoeken van velerlei ongelijkheidsrelaties en het opheffen daarvan door het uitvoeren van een operatie;
- het beschouwen van de operatie optellen en aftrekken als inverse operaties;
- het beschouwen van mogelijkheden tot visualiering.



Deze visualiseringen dienen dan als uitgangspunt voor de wijze, waarop de abstracte begrippen voor de leerlingen concreet gemaakt worden[10].

Het is geenszins onmogelijk dat dergelijke concretiseringen voor de leerlingen allerminst concreet zijn omdat zuiver-mathematische objecten ervoor model gestaan hebben. Het door Menčinskaja gesignaleerde bezwaar tegen wetenschappelijke definiëring van begrippen, waardoor het beschreven fenomeen niet in al zijn essentialia gedekt zou zijn, geldt ook deze concretiseringen. Daarbij komt dat 'concreet' voor de leerlingen de betekenis heeft van voorstelbaar zijn, betekenis kunnen geven, een referentiekader kunnen vinden (of hebben) in de eigen ervaringswereld. De langs bovengenoemde weg verkregen concretiseringen zijn in dit opzicht bedriegelijk of vals, omdat het kind ze niet kan plaatsen binnen de mathematische context waarop ze gebaseerd zijn (Freudenthal 1976 -1979). Het beschreven logische uitgangspunt legt beperkingen op aan de psychologische analyse en laat belangrijke zaken ongemoeid, die psychologisch gezien juist zeer relevant zijn (zie par. 4).

Zoals aan het eind van de vorige paragraaf reeds werd opgemerkt, heeft Davydov aan Vygotskij's onderscheid van spontane en wetenschappelijke begrippen een nadere nuancering gegeven, waarop wij aan het eind van deze paragraaf nog even willen terugkomen. Davydov[11] onderscheidt empirische begrippen (binnen een wetenschap) en wetenschappelijke begrippen. Ook empirische begrippen kunnen volgens Davydov deel uitmaken van een omvangrijker systeem, een kenmerk, dat Vygotskij's spontane begrippen niet hebben. Wetenschappelijke begrippen staan volkomen los van de objecten of fenomenen zelf en worden volledig binnen een wetenschappelijk systeem gedefinieerd. Davydov verwijt Vygotskij in feite, dat hij het wetenschappelijk begrip te onnauwkeurig heeft omschreven en dat hij geen criterium heeft aangereikt voor de bepaling of een begrip al dan niet wetenschappelijk is.

De begrippen, die Vygotskij wetenschappelijk noemt, zijn volgens Davydov veel meer de empirische begrippen in de wetenschap. Wat vooral belangrijk is daarbij is het feit, dat dergelijke empirische begrippen zich evenals de spontane begrippen ontwikkelen volgens het formeel-logische schema van de begripsontwikkeling, dat wil zeggen op *inductieve wijze via het aanschouwen en het voorstellen*[12]. Dat Davydov met Vygotskij's onderscheid in beide begripstypen wel in conflict moest komen, wordt verklaard door het feit, dat hij juist de psychologische mogelijkheden van jonge kinderen voor het leren van wiskunde wilde nagaan en daarbinnen de vraag naar de mogelijkheid tot ontwikkeling van het theoretisch denken.

De wiskunde werd reeds aangewezen als het gebied, waarop Vygotskijs onderscheid in begripstypen juist niet toepasbaar was. Davydovs interessegebied noopte hem dus tot genoemde nadere nuancering. De door Davydov aangebrachte nuancering in Vygotskij's begrippenonderscheid is hierom zo belangrijk, omdat het werkelijk rekening houden met

- empirische begrippen, en hun
- inductieve ontstaanswijze

een beslissende wijziging in de strategie bij de keuze van leerinhouden bij het onderwijs teweeg brengt. We lichten dit toe aan een voorbeeld van Davydov zelf[13]. Het gaat over Davydovs kritiek op het onderwijs in breuken in Rusland. De verwijten betreffen de eenzijdigheid van instap in het betrokken gebied (het taartverdelen), het negeren van het gebied van het meten, als (fenomenologische) bron voor de breuken. In Davydovs argumentatie klinkt daarbij ook nog nadrukkelijk door, dat het verband tussen een begrip en zijn ontstaansproces vooral psychologisch van belang is voor de lerende.

Davydov spreekt in dit verband van causaal-genetische ontwikkeling. Ons inziens geeft Davydov hier de weg aan om op basis van mentale ontstaansprocessen van begrippen onderwijs te plannen, dat aansluit bij de spontane ontwikkeling van het kind om het van daaruit op de weg naar abstractie te voeren. Dat dit facet van Davydovs visie op begripsvorming onvoldoende benut is, zowel in de Sovjetunie als daarbuiten ligt in de eerste plaats aan hemzelf. Bij zijn concrete inhoudelijke voorstellen kiest hij steeds voor een eenzijdige instap, een smal inhoudelijk spoor. Binnen zo'n smal spoor wil hij – overigens aan op zichzelf goed gekozen voorbeelden – wiskundige principes voor (jonge) kinderen verduidelijken. De wiskunde wordt verkinderlijkt voor[15] dit doel. Men kan echter ook de omgekeerde weg bewandelen en het kind leren zijn realiteit te verwiskundigen (zie par. 4.).

Davydovs eensporige instap voor het onderwijzen van wiskundige begrippen en operaties zal mede bepaald zijn door de last van een loodzware onderwijstraditie in de Sovjetunie[16].

Het zal op grond van het bovenstaande duidelijk zijn, dat wij de eerder geschetste procedure voor de leerstofkeuze voor het (reken/wiskunde)onderwijs, fundamenteel onjuist achten. In de volgende paragrafen wordt nader op deze kwestie ingegaan. In de slotparagraaf volgt een overzicht van de gevoerde argumentatie.

3. *Het traditionele rekenonderwijs*

Het traditionele rekenonderwijs is vanouds sterk produktgericht geweest. Hoewel nieuwe onderwerpen binnen de verticale opbouw dikwijls ingeleid worden met een verkennende fase, waarin begrippen geconcretiseerd worden, dragen deze concretiseringen dikwijls hetzelfde karakter, als die welke in de vorige paragraaf gekritiseerd zijn.

Een ander vaak toegepast principe is dat van de (veronderstelde) analogie. Men redeneert dan bijvoorbeeld aldus: de introductie van de bewerkingen met natuurlijke getallen is ingeleid met een fase, waarin de verkenning van het getalbegrip in zijn verschillende aspecten, het positionele notatiesysteem voor 'onze' getallen, de betekenis van de bewerkingen en de regels daarbij geruime tijd vergden.

Voor de decimale breuken kan deze fase nu (vrijwel) overgeslagen worden en voor de gewone breuken sterk verkort omdat de bewerkingen daar hetzij analoog verlopen, hetzij gebaseerd kunnen worden op wat in dit verband bij de natuurlijke getallen is geleerd. Vanuit wiskundig standpunt is dit tot op zekere hoogte nog te verdedigen. Wel gaat men dan voorbij aan specifieke aspecten van decimale en gewone breuk, die voor de leerlingen – al was het alleen al om psychologische redenen – geenszins tot dergelijke analogieoverwegingen leiden, maar integendeel allerlei misverstanden oproepen.

Vergeleken met de gang van zaken in de vorige paragraaf zou men kunnen stellen: Het (reken)onderwijs in traditionele zin vervult (voor veel leerlingen) wat we zouden willen noemen een 'voortsleurfunctie'. Dergelijke onderwijs forceert (veel kinderen) naar abstracties – veelal aan gebrekkige concretiseringen ontlokt – op momenten dat zij daaraan (nog) niet toe zijn. Die abstracties worden gedicteerd door de fylogenetische stand van zaken in de ontwikkeling van de algoritmen voor de bewerkingen met getallen. Het is dus niet zo zeer de door een leer- of begrips-vormingstheorie bepaalde keuze uit een wetenschappelijk systeem, alswel de traditie, die de onderwijsinhouden voorschrijft. Daarin schuilt het belangrijkste verschil van het traditionele rekenen met de zogenaamde sovjetaanpak, hoewel het traditionele rekenen in de Sovjetunie een aanzienlijke invloed heeft gehad op de ontwikkelingen aldaar[17]. Ter ondersteuning van het voorgaande achten we de volgende twee voorbeelden ruimschoots voldoende.

Voorbeeld 1. *Het gebruik van de abacus bij het leren cijferen*

Tientallen eeuwen lang[18] was de abacus het hulpmiddel bij uitstek, waarop in die situaties in het dagelijks leven, waarbij gerekend moest worden, de bewerkingen werden uitgevoerd.

In West-Europa hebben voorstellen om de abacus los te laten en te komen tot het rekenen op schrift, dusdanige weerstanden opgeroepen, dat het enkele eeuwen duurde voordat het pleit ten gunste van het rekenen op schrift beslecht was. Die weerstand tegen het terzijde stellen van de abacus kan (o.m.) verklaard worden uit het moeilijker, het meer geavanceerd worden van het rekenen[19]. Ondanks de indrukwekkende rol die de abacus in de geschiedenis van het rekenen gespeeld heeft, werd dit 'rekentuig' tot voor kort vrijwel niet in het rekenonderwijs gebruikt.

Leerlingen, die cijferend moeten leren optellen en aftrekken worden in veel scholen alleen de algoritmen voorgehouden, zoals ze zich los van de abacus bij het verdwijnen van dit instrument uit het rekenen in het dagelijks leven ontwikkeld hebben[19]. Daarmee is het de actuele status quo van een rekenwijze die bepalend is voor de inhoud van het rekenonderwijs.

Voorbeeld 2. *Het onderwijs in breuken*

Over de hele wereld ondervinden leerlingen moeilijkheden bij het breukrekenen; landsgrenzen bestaan hier niet. Een niet aflatende stroom van publikaties en onderzoeken op dit gebied[20] legt hiervan getuigenis af en illustreert tevens de hardnekkigheid van dit probleem. Zonder de pretentie te hebben reeds een oplossing voor dit probleem beschikbaar te kunnen stellen[13] kunnen we hier de vaak uiterst povere 'didactische' aanloop met als enige doelstelling het algoritmiseren met breuken als hoofdoorzaak aanwijzen. Freudenthal (1979a pag. 23) stelt: 'Traditioneel reken-wiskundeonderwijs stevent rechtstreeks en in ijltempo op algoritmen af. Daartegenover zijn methoden ontwikkeld om de algoritmisering bewust uit te stellen, om zolang mogelijk inzichtelijk handelen aan te moedigen'.

4. *Een alternatieve weg*

Davydov verwees impliciet al naar deze 'derde weg' door het psychologisch belang voor de lerende van het ontstaansproces van een begrip te beklemtonen. Ten einde deze weg goed te kunnen beschrijven, beginnen we met een illustratie. Het betreft een activiteit van een kleine groep leerlingen, zoals die kan plaatsvinden tijdens een wiskundeles in het eerste leerjaar op de ontwerpschool van het IOWO[21]. De opbrengst van deze activiteit vormt later het 'materiaal' voor een les met de hele klas.

Kegelen[22]

De leerlingen van de eerste klas zitten al weer geruime tijd op de 'grote school'. Ze hebben inmiddels de context met de autobus nog eens beleefd, door die na te spelen in de klas (rijden, stoppen bij de haltes, het in- en uitstappen van de passagiers). Aan de gespeelde situaties zijn beschrijvingen ontwikkeld in de vorm van de zogenaamde pijlentaal: 3 $\boxed{+4}$ ... (De chauffeur stopt de bus met 3 mensen bij de halte, er stappen 4 mensen in de bus; hoeveel passagiers heeft de chauffeur nu in zijn bus?) Een dergelijke beschrijving heeft niet alleen zijn betekenis als notatieschema voor het vervolg van het wiskunde-onderwijs, doch vervult daarbuiten ook een belangrijke communicatieve functie in de omgang tussen de leerlingen.

Voor de leerlingen moet het notatieschema '... $\boxed{}$ ...' daarom eerst een algemenere betekenis krijgen. Mede daarop waren de activiteiten in de wiskunde lessen de laatste maanden gericht. Eerst was het zo, dat het frame met de pijl ('... $\boxed{}$ ...') het concrete signaal was voor 'er stappen mensen in of uit'. Via nieuwe ervaringen met autobusproblemen evolueert dit tot 'de bus stopt bij de halte' om naar een meer algemeen niveau van 'er gebeurt iets' getild te worden door andere dynamische numerieke situaties, die middels dit notatieschema beschreven werden.

N.B.: De pijl met frame brengt ook vooraf een zekere tijdsordening aan: gebeurtenis, er gaat iets aan vooraf, er volgt iets op!

Een voorbeeld van zo'n andere situatie kan zijn:

'Op de parkeerplaats bij de supermarkt staan 7 auto's. Er komen 3 auto's bij. Nu staan er ...auto's? 7 $\boxed{+3}$ of:

'In de supermarkt staan bij de kassa's in totaal 15 mensen in de rij. Nu gaan er 3 mensen door. Er staan nu nog mensen in de rij.' 15 $\boxed{-3}$ ...

De onderwijzeres vermoedt, dat de pijlentaal zo langzamerhand die dubbele functie voor de kinderen kan vervullen. Ze besluit de proef op de som te nemen. Als de hele klas een taak gekregen heeft, die in de beschreven sfeer ligt, mag het groepje van Elske, André en Jopie naar de gang om te gaan kegelen. Juf formuleert zo nauwkeurig mogelijk voor de kinderen, wat zij van hen verwacht: 'Jullie mogen een kegelspel spelen op de gang. Om beurten gooien en opschrijven wat er gebeurt. Misschien kun je daarbij de pijlen gebruiken. Straks mogen jullie alles aan de klas vertellen.' André, Elske en Jopie gaan opgewonden af naar de gang, verheugd als ze zijn, dit keer 'het onderzoek' te mogen doen. Ze 'kakelen' honderd uit. De klas blijft al werkend achter, maar toch wel een tikkeltje benieuwd met welke resultaten het groepje straks terugkomt. Op de gang blijkt al ras, dat organisatorisch lang niet alles vlekkeloos verloopt. 'Ik eerst', zegt André, die al met de bal klaarstaat, de rest van de materiële organisatie aan de beide anderen overlatend. 'Nee, ik!' strijden de beide andere kinderen om de voorrang. Zo willen ze ook alle drie tegelijk opschrijven en het rechtop zetten van de kegels mogen 'de anderen' wel doen.

Juf, die een dergelijke gang van zaken al voorzien had ('Ze zijn ook nog zo op zichzelf betrokken op deze leeftijd', meent ze) komt nog even naar de gang om in te grijpen en een taakverdeling voor te stellen, waarbij de functies wisselen. Zo zijn ze achtereenvolgens alle drie 'speler', 'notulant' of 'kegelbaanhouder'. Alles loopt nu verder gesmeerd en de kinderen gaan volledig op in hun spel. Het noteren van de resultaten heeft nog heel wat voeten in de aarde gehad en bij haar tweede interventie heeft juf ze nog maar een tip in de goede richting gegeven. Na de afgesproken vijf beurten voor alle drie komt het stel glunderend binnen. Juf vraagt of ze de resultaten even mag zien. Zij fluistert Elske iets in het oor en Elske schrijft triomfantelijk op het bord: '10 $\boxed{-3}$ ...'. Als ze klaar is blijft ze zwijgen en kijkt de kinderen in de klas aan met een blik van: 'Wat zeg je me daarvan?' 'Nou, Elske', vraagt juf. 'Eh ..., wie weet wat hier gebeurd is,' vraagt Elske dan. Enkele vingers schieten omhoog; anderen blijven nog even met een bedenkelijk gezicht zitten kijken: 'Wat bedoelt ze nou precies?' Gerard krijgt de beurt: 'Nou ...gewoon, ze hadden tien kegels en de eerste keer heeft Elske er drie omgegooid, dus stonden er toen nog ...zeven rechtop'. Iedereen kan zich in de uiteenzetting van Gerard vinden. De verslaggeving van de kegelspelers gaat verder en op een gegeven moment prijkt op het bord: 5 $\boxed{+3}$ ... De klas blijkt geen moeite te meer te hebben met het vinden van gebeurtenissen hierbij: 'Er waren al 5 kegels omgegooid, nu werden er nog 3 omgegooid, dus bij elkaar 8 omgegooid.' 'André had al 5 kegels rechtop gezet en daarna nog 3; dus ...'. Juf verandert nu 'de plus' in 'een min': 5 $\boxed{-3}$ ... en de klas bedenkt verder: 'Er stonden nog vijf kegels rechtop en Jopie gooide er drie om, toen stonden er nog ...' 'Er lagen 5 kegels op de grond, er werden er 3 rechtopgezet, toen lagen er nog ...' Juf laat ook de volgende variaties nog aan bod komen: ... $\boxed{+3}$ 8, ... $\boxed{-3}$ 2, 5 $\boxed{+.}$ 8 en 5 $\boxed{-.}$ 2

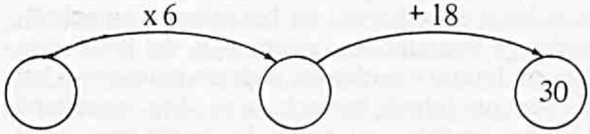
We zullen nu pogen de voorgaande 'nabije' onderwijsbeschrijving te analyseren in termen van (fenomeno)logische analyse, psychologische analyse, abstractie en theoretische generalisatie[23].

(Fenomeno)logische analyse

Vanuit volwassen wiskundig standpunt bezien (logische analyse) ging het om het optellen en aftrekken van natuurlijke getallen, bewerkingen die in hun inverse relatie aan de orde kwamen. Het betreft dan lineaire vergelijkingen in hun allereenvoudigste vorm, weergegeven in het notatieschema met de pijl ... $\boxed{..}$ ...

De inverse relatie tussen beide bewerkingen komt vooral goed tot uitdrukking in de opgaven met de open plaatsen, aan het eind van de les, bijvoorbeeld ... $\boxed{+3}$ 8.

Hoewel het lesverslag daarvan geen melding maakt, wordt de getallenlijn gebruikt om de stand bij te houden wanneer sprake is van reeksen achtereenvolgende gebeurtenissen. In een verticale opbouw[24] maakt het schakelen van pijlen, gecombineerd met 'open plaatsen' het mogelijk, lineaire vergelijkingen met één onbekende in pijlentaal te introduceren,



staat dan voor $6x + 18 = 30$. De 'vergelijkingsvorm met x' blijkt dan het geformaliseerde eindpunt in wiskundetaal in een verticale opbouw van pijlensommen.

Zoals blijkt, doet de keuze van de wiskunde als enig uitgangspunt voor een analyse tekort aan wat het lesverslag weergeeft. (Het idee van de pijlentaal ligt niet voor het oprapen binnen de wiskunde. Een psychologische analyse, die de behoefte aan symbolisch houvast voor de leerlingen in dergelijke situaties stipuleerde gepaard aan didactische inventiviteit bleken hier beter te werken).

Toch is in het voorgaande meer aan wiskundige feiten aangedragen, dan er in het lesverslag werd beschreven. Door de logische analyse blijft echter onvermeld welke fenomenen uit de ervarings- en belevingswereld van het kind schuil gingen achter de wiskundige operaties waarvan sprake was en de getallen, waarop die bewerkingen werden toegepast. Dat wil zeggen de logische analyse schiet fenomenologisch te kort. De geschetste activiteiten van de leerlingen, zo blijkt uit het lesverslag overduidelijk, waren bedoeld om bepaalde ervaringen met wiskundige middelen te beschrijven. De symbolische middelen (voor gebeurtenissen, operaties en numerieke grootheden) waren betekenisvol en maakten onderlinge communikatie tussen de leerlingen mogelijk. Dit gebeurde dan niet vanuit hoger wiskundig standpunt met volledig zicht op de zuiver mathematische betekenis van toegepaste symbolen en operaties, doch vanuit (beleefde) situaties. Rijke contexten[25] vormden het uitgangspunt voor het verkennen van de operaties optellen en aftrekken. De 'autobussen' waren daarbij in een paradigmatische rol, zowel voor de verkende wiskundige operaties als voor de te ontwikkelen pijlentaal. Aan structuur-analoge situaties vond verbreding en verdieping plaats. Met andere woorden de bewerkingen optellen en aftrekken treden op als middelen om in die structuur-analoge fenomenen orde te scheppen, ze als het ware op één noemer te brengen.

De bewerkingen optellen en aftrekken als wiskundige operaties worden voortgebracht en ontwikkeld door een proces waarin men afziet van allerlei aspecten van niet-mathematische aard uit de autobusproblemen en dergelijke. Op deze manier is de wiskunde geen voorafbestaand deductief systeem, maar ontstaat het, ontspruit het, komt het voort uit menselijke activiteit.

Freudenthal (1976-1979) spreekt van de neiging van de wiskunde de banden met de realiteit te verbreken (anontologisering). Die neiging rechtvaardigt zich als resultaat van historische en individuele ontwikkeling. Maar ze a priori aanwezig veronderstellen bij de lerende – hetgeen gebeurt als men vrijwel uitsluitend de wiskunde als maatgevend voor de bepaling van onderwijs accepteert – is onjuist. 'Nog minder kan de lerende als ontvankelijk voor een geanontologiseerde wiskunde gelden. Pogingen zoiets aan te bieden, leiden noodzakelijk tot valse concretiseringen'. (pag. 79).

Psychologische analyse

Gelet op de algemene persoonlijkheidsontwikkeling van het kind waren een tweetal punten van belang. Ten eerste de beleving waarin de ervaringen worden ingebed (de emotionele betrokkenheid van het kind). Ten tweede: het (leren) samenwerken van de kinderen in gedeelde verantwoordelijkheid voor de uit te voeren opdracht. (Het ingrijpen van de onderwijzeres getuigt ervan hoe zij zich ervan bewust is dat kinderen nog moeten leren bij een (nieuw) spel de rollen te verdelen).

Betrekken we deze analyse op de cognitieve ontwikkeling dan valt allereerst op hoe concreet alles voor de kinderen is en wat 'concreet' in deze voor ze betekent: het hele gebeuren is betekenisvol, er schuilen ervaringen achter, waarvan ook de gebruikte symboliek ... $\boxed{+..}$ ...doortrokken is.

Die nadrukkelijk aanwezige concreetheid is mede te danken aan de dynamiek van de situatie, die als uitgangspunt dient. De gebeurtenissen tijdens het kegelspel in de les blijken dan – en hierin schuilt het belang van de dynamiek – betekenisverlener aan de (wiskundige) operaties te worden.

De toegepaste notatieschema's $\boxed{...}$ geven de leerlingen symbolisch houvast. Aan de notatieschema's voltrekt zich een abstractieproces waarbij het éénduidige van wat zich bij de bushalte afspeelt, wordt ingeruild voor het meerduidige algemene 'er gebeurt iets'.

Nog in een andere zin is er sprake van een abstractieproces, zij het, dat het 'nog slechts' in voorbereiding is. In het schema '7 $\boxed{+3}$ ...' zonder meer, zijn de banden met de realiteit doorgesneden. De uitdrukking (sec) ontleent zijn betekenis uitsluitend nog aan de wiskundige context. Uit de opbouw van het beschreven lesgebeuren blijkt echter, hoe dit mede gericht is op het in tact laten van de banden van de gebruikte wiskundige schema's en symbolen met de realiteit. Gebeurtenissen worden beschreven in wiskundetaal (door het kleine groepje). Achter die beschrijvingen werden door de klas gebeurtenissen gedacht binnen de voor ieder bekende context van het kegelspel.

Dit 'over-en-weer-'gaan van wiskunde naar realiteit bleek ook kenmerkend voor enkele sovjetrussische experimenten in het eerste leerjaar betreffende algebra met grootheden[16]. Het concretiseren van een in abstracto gegeven mathematische betrekking tussen grootheden als uiteindelijk bewijs van bereikte theoretische generalisatie[26] blijkt dus niet het eindstadium van een leerproces te zijn doch er vanaf het begin wezenlijk deel van uit te maken. Anders zou het ook niet moeten. Freudenthal (1976-1979, pag. 79) stelt: 'Hulpmiddelen in het anontologiseringsproces zijn: een blikwisseling van descriptie naar definitie, waarbij verkregen eigenschappen van wiskundige objecten opgevat worden als definities van die objecten, om zodoende die objecten van hun oorsprong los te maken, en het vervangen van intentionele door extentionele begripsvorming[27]. Beide hulpmiddelen zijn niet zonder meer aanwezig. Ze veronderstellen ontwikkeling en oefening. Wanneer de leerling die ruiten op het oog identificeren kan, uit de menigte van eigenschappen van de ruit enkele karakteristieke isoleert die een formele definitie van de ruit voorstellen, voltrekt hij een lokale blikwisseling[28] en een allereerste stap op de anontologisering van de meetkunde. Dezelfde stap bij het natuurlijk getal is veel groter, omdat de getallen hem veel vertrouwder zijn en de blikwisseling veel globaler is.' Getallen zijn voor kind en volwassene veel sterker aan de realiteit gebonden. Het is daarom veel lastiger bij de beschrijving ervan dan bij de ruit, van die realiteit los te komen. Een formele karakterisering van de ruit op puur verbaal niveau is daarom veel eenvoudiger te geven dan een soortgelijke beschrijving van natuurlijk getal.

Een laatste opmerking van psychologische aard, die we willen maken, betreft de zogenaamde 'Stipsommen a+ ...= c en ...+ b = c', de pijlensom met open plaats van het type a $\xrightarrow{+\cdot\cdot}$ c of . . . $\xrightarrow{+b}$ c, zoals we die bij de logische analyse ook al in verband met de inverse relatie tussen optellen en aftrekken aan de orde gesteld hebben. Nogal wat kinderen ondervinden met dergelijke opgaven in het traditionele rekenen problemen. Een belangrijk deel van de verklaring daarvoor schuilt in de inrichting van dat rekenonderwijs zelf. In het traditionele rekenen is de stipsom in een zee van rechtstreekse opgaven toch nog een enigszins sporadisch verschijnsel. Daardoor raakt het kind ingesteld op de directe opgaven, ziet bij het tegenkomen van een stipsom zijn routine verstoord, raakt in de war en komt er niet uit. Door de operaties optellen en aftrekken nu als elkaars inversen in samenhang te ontwikkelen vanuit gebeurtenissen of verschijnselen binnen bekende contexten, zoals beschreven, wordt de moeilijkheid met de stipsommen als vanzelf uitgebannen[29]. Ingrijpende inhoudelijke verandering van het onderwijs tast de artefacten van vóór de verandering vanzelf aan.

5. *Standpuntbepaling*

Het wiskundeonderwijs dient zijn uitgangspunt mede te zoeken bij het kind en zijn ervarings- en belevingswereld. Het moet daarop aansluiten en verschijnselen in die wereld, respectievelijk verschijnselen die er inpassen, als uitgangspunt kiezen. Het gaat daarbij vooral om de rijkdom aan structuur. Wat de mathematische bewerking van dergelijke situaties betreft, wordt aangesloten bij de status, die mentale objecten bij de leerlingen op zeker moment hebben. Het onderwijs tracht – onder respectering van andere belangrijke zaken, zoals de emotionele verwerking van een situatie, het spelelement, de functionele samenwerking met anderen binnen een gegeven groepsopdracht – bij te dragen aan de voortgaande constitutie van het betrokken begrip in de richting van de wijze, waarop dit begrip zich binnen een wetenschappelijk systeem manifesteert. Op voornoemde wijze doen begrippen zich voor als middelen om fenomenen in de kinderlijke omgeving te organiseren op essentiële kenmerken van (mathematische) overeenkomst, er als het ware structuur in te brengen c.q. orde in te scheppen. Bij de verheffing tot wetenschappelijk begrip, dat wil zeggen het doorsnijden van de banden met de realiteit, is de lerende in hoge mate zelf (mentaal) actief. Daarmee is dan tevens aangegeven dat het bereiken van de wetenschappelijke status voor in constitutie zijnde mentale objecten sterk individueel gekleurd is, op grond waarvan te bereiken eindstadia in belangrijke mate kunnen verschillen. De consequentie van een en ander is – en uit de keuze voor rijke contexten blijkt dit al – dat het wiskundeonderwijs een open karakter moet hebben, waarin de eerder als wenselijk genoemde samenwerking mogelijk is, zonder dat aan de voortschrijding van het leerproces van de individuele leerling geweld wordt gedaan. Uit het eerder gegeven voorbeeld van de breuken blijkt, dat het te snel betreden van het formele systeem na slechts enkele concrete oefeningen voor velen veel te hoog gegrepen is.

6. *Ten besluite*

Tenslotte vatten we nog eens puntsgewijs samen, en breiden het op enkele relevante punten nog wat uit, mede op grond van onze voorgaande overwegingen, wat ons inziens de fundamentele bezwaren zijn tegen een te sterk op de vakstructuur geïnspireerde constructie van wiskundeonderwijs, zoals o.a. in de zogenaamde sovjet-benadering.

- Het ten behoeve van het onderwijs ontlenen van wetenschappelijke begrippen aan de wiskunde als wetenschap, miskent de ontstaanswijze en ontwikkeling van die wetenschap; het concipiëren van de wiskunde als deductief bouwwerk bijvoorbeeld is een aposteriori activiteit, een ordening, een structurering achteraf. Zij verhult veelal de ontstaanswijze van de bouwstenen van dat bouwwerk; ze is een extra anontologiserende factor.

  Bekend is in dit verband het werk van een groep Franse wiskundigen, die onder de naam Bourbaki bekendheid verwierf met zijn pogingen de wiskunde als groot, samenhangend deductief systeem in kaart te brengen. Ook aan Davydov zijn de activiteiten en publikaties van Bourbaki niet ontgaan. In Davydov (1975) gaat hij op de kwestie van de bepaling van inhouden voor het wiskundeonderwijs uitvoerig in. Hij concludeert in deze analyse onder andere '(...) it is an important task of research to determine the means of developing *theoretical* thought in children (*mediated* thought, in psychological terminology), the principle of which consists of the shift from abstract, general definitions to concrete, particular descriptions of an object. This problem needs to be solved *in order to set up an academic subject, which will satisfy the requirements of modern science*. (Davydov, 1975, pagina 102; cursief L.S.).

- Het kiezen van wetenschappelijke begrippen als uitgangspunt voor onderwijs druist in tegen de wijze, waarop zich mentale objecten (spontaan) ontwikkelen bij kinderen; die ontwikkeling wordt genegeerd, er wordt voorbij gegaan aan de mentale staat, waarin spontane begrippen in ontwikkeling op zeker moment verkeren. In feite is deze gang van zaken strijdig met Vygotskij's visie, waarop men zich in eerste instantie baseert, omdat van het tot rijping brengen van wat in het kind aanwezig is, geen sprake meer is.

Illustratief is in dit verband Davydovs benadering van de bewerking vermenigvuldigen met natuurlijke getallen in het reken-wiskunde-onderwijs. Hij sluit in zijn analyse aan bij de opvattingen van de wiskundigen Fridman en Lebesque[31] die bij het werken met grootheden uitgaan van de eenhedenverandering, als model voor vermenigvuldigen; dat wil zeggen vervanging bij het meten van een maateenheid door een grotere bijvoorbeeld: 4 kopjes water in een jampot, 16 jampotten water in een emmer, dus $16 \times 4 = 64$ kopjes water in de emmer. Davydovs keuze van dit inhoudelijke uitgangspunt wordt voornamelijk ingegeven door de wiskunde en door reeds eerder gedane keuzen. (Bijvoorbeeld het werken met grootheden bij de introductie en ontwikkeling van het getalbegrip.) Bij deze keuze op macro-[32] of curriculumniveau speelt de spontane ontwikkeling van kinderen nog geen rol. Vanuit de kinderlijke realiteit bezien, is deze benadering van vermenigvuldigen echter te eng, te eenzijdig.

Fenomenologisch beschouwd kent vermenigvuldigen nog allerlei andere verschijningsvormen, die zich niet door het principe van de eenhedenverandering laten kenschetsen, doch veeleer als herhaald bijvoegen, combineren, springen, vergroten, inpakken, permuteren[33]. Het op macro- of curriculumniveau reeds in beschouwing nemen van voornoemde gedaanten van vermenigvuldigen, impliceert, dat de kinderlijke realiteit, waaraan zich spontane cognitieve ontwikkeling kan voltrekken, medebepalend wordt voor de keuze van inhouden op dat niveau[34].

- Bij het bepalen en kiezen van onderwijsinhouden op grond van vakstructurele overwegingen wordt het leggen van een affectieve oriënteringsbasis gereduceerd tot de onderwijsleersituatie, terwijl reeds bij de keuze op het niveau van het curriculum hiermee rekening gehouden zou kunnen worden. Gebeurt dit niet, dan lijkt het kind gereduceerd tot zijn cognitieve potenties onder negatie van andere mogelijkheden en behoeften, die het heeft; het leidt tot sterk verschraald wiskundeonderwijs, waaraan het kinderlijke, het menselijke vreemd is[35]. Vooral in recent werk legt Gal'perin de nadruk op oriënterende activiteiten juist ook in het non-cognitieve gebied, zoals moge blijken uit: 'Needs, emotions, and volition, from the psychological point of view, are nothing other than different forms of orienting activity of the subject in different problematic situations, in different tasks, to be accomplished by different needs' (Menčinskaya, 1978, pagina 86).
- De geschetste procedure is gebaseerd op het principe dat generalisaties uitsluitend zouden berusten op de abstractie van een algemene regel uit een reeks van (bijzondere) voorbeelden en gaat dus voorbij aan generalisaties, die voltrokken kunnen worden aan het ene voorbeeld met de kracht van een paradigma; voor dergelijke voorbeelden, die uit een oogpunt van de algemene doelen[8] van wiskunde-onderwijs uiterst belangrijk (kunnen) zijn is een aanpak, waarbij het kind met het algemene het bijzondere te lijf moet kunnen gaan van geen betekenis.

Bij Davydov gaat het bij generalisatie om de '(...) "mechanism" of working with the concepts themselves and working on deriving concrete knowledge through the interrelations among abstractions' (Davydov, 1975, pagina 101).

Nu zijn er in principe drie vormen van generalisatie, waarbij Davydov alleen de eerste en de laatste onderscheidt:

a. Uitgaan van 'comprehensive' situaties, bijvoorbeeld het leren van het begrip natuurlijk getal, of de tafels van vermenigvuldiging. Het kind leert aan voorbeelden en op een gegeven moment heeft het door, wat 2 is, wat 3 is, wat 2×3 is.
b. Uitgaan van 'apprehensive' situaties.
   b1. Uitgaan van paradigma's, die transparant zijn naar de onderliggende wiskundige structuur[36].
   b2. Uitgaan van generalisaties, van directe abstracties[37], bijvoorbeeld in de algebra.

- Het geschetste keuzeprincipe van onderwijsinhouden leidt tot concretiseringen, die voor de leerlingen geenszins die functie behoeven te hebben, omdat ze 'vals' zijn en niet de betekenis krijgen, zoals bedoeld. Bovendien hebben de leerlingen niet de mentale beschikking over de mathematische context waaraan de in de concretiseringen belichaamde wiskundige begrippen of principes ontleend zijn.

Een bekend voorbeeld van zo'n valse concretisering is de wijze, waarop in de 'New-Math'-benadering van het getalbegrip het begrip verzameling 'toegepast' wordt. Ook Davydov (1975) gaat uitvoerig op deze kwestie in. Het feit, dat een uiterst algemeen begrip als verzameling aan de basis van de wiskunde voor kinderen gelegd wordt oogst zijn instemming: 'First, the concept of number is related to many concepts, which *precede* it – the concepts of 'set', 'function', 'equivalence', and 'power', in particular. It is only a description of a particular – if quite important – property of sets: their power (cardinality; toevoeging L.S.) (Davydov, 1975, pagina 61).

Toch moet deze auteur aangevoeld hebben, dat er iets mis was met de wijze, waarop het begrip 'verzameling' in de 'New-Math'-benadering van het getal begrip benut werd: 'The study of numbers is based on a elementary knowledge of sets[38] The *concrete* attempts to move in this direction may not be of equal merit, but the trend itself, we think, is entirely proper and farsighted.'

Wat we met 'valse' concretiseringen bedoelden, is lastige wiskundige begrippen concreet maken, waarbij de concretisering de wiskundige lading niet of op onjuiste wijze dekt. Dit gevaar is bij het te eenzijdig uitgaan van geformaliseerde wiskunde ten behoeve van het onderwijs, steeds aanwezig[39].

- Het alternatief, een mathematisch-didactische analyse, gericht onder meer op de fenomenen, waaraan zich de (spontane) ontwikkeling van kinderen voltrekt, of kan voltrekken, brengt zaken aan het licht, die in eerste instantie voor kinderen wezenlijk verschillend kunnen zijn, doch in latere instantie gegeneraliseerd worden in hetzelfde wiskundige begrip of dezelfde wiskundige operatie. Bij een dergelijke '(...) wiskundige-didactische ontleding maakt men gebruik van relevante kennis elementen uit de wiskunde, de geschiedenis van de wiskunde, de toepassingen van de wiskunde, de wiskundige trekken in bepaalde alledaagse situaties, ervaringen uit het onderwijs, uit gesprekken met kinderen, alsmede van didactische kennis en ervaringen' (Treffers, 1979, pagina 82). Het resultaat kan eventueel weer door deskundigen 'gescreend' worden.

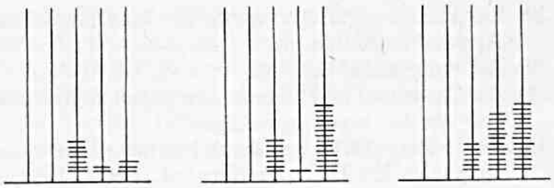
  Doordat in de analyse nadrukkelijk ook individuele leerprocessen van kinderen betrokken worden legt een dergelijke fenomenologische benadering tegelijkertijd de psychologische implicaties bloot, zodat een psychologische analyse dan vrijwel tegelijkertijd en geïntegreerd in de analyserende voorbereiding op het feitelijke onderwijs is uitgevoerd. De psychologische analyse is dan bovendien toegesneden op datgene, waaraan zich de kinderlijke (cognitieve) ontwikkeling voltrekt. Het geheel resulteert in menselijke activiteiten, die onder andere wiskunde voortbrengen, waarmee de cognitieve ontwikkeling gelijke tred houdt[40].
- Met betrekking tot de inhoud van het traditionele rekenonderwijs kunnen soortgelijke opmerkingen eveneens gemaakt worden (zie par. 3) zij het daarbij dat van onderwijsontwikkeling op basis van een theorie nauwelijks sprake is. Het is de traditie die de inhoud bepaalt op grond van wat maatschappelijk-cultureel gezien op zeker moment verworven is.

Noten

1. Zie bijvoorbeeld: Parreren, C. F. van, en J. A. M. Carpay, *Sovjetpsychologen aan het woord,* Groningen, 1972; Parreren, C. F. van, en J. M. C. Nelissen, *Met oosteuropese psychologen in gesprek.* Groningen, 1979; Vos, J. F., *Onderwijswetenschap en Marxisme.* Groningen, 1976; Wolters, M. A. D., De opvattingen van Davydov c.s. over onderwijs en cognitieve ontwikkeling, *Tijdschrift voor onderwijsresearch,* 1978 (3) 1. Wolters, M. A. D., *Van Rekenen naar algebra.* Rijksuniversiteit Utrecht, 1978.
2. Zie bijvoorbeeld: Davydov V.V., *Psychologische mogelijkheden van jonge leerlingen bij het leren van wiskunde.* Moskou, 1969. Een geautoriseerde vertaling van dit werk is – voorzover bekend – niet uitgegeven. Wel zijn van diverse hoofdstukken (werk)vertalingen beschikbaar op het IOWO, zowel als het IPAW (afdeling ontwikkelingspsychologie) aan de R.U. te Utrecht.
3. Overeenkomstige ideeën vindt men bij Piaget (1973) en Thom (1973) waar ze spreken van intuïtieve noties van begrippen bij kinderen, die voorafgaan aan het (mentaal) expliciet worden ervan, een proces, dat door het onderwijs zeker niet geforceerd zou mogen worden volgens genoemde auteurs. Freudenthal (1976-1979) onderscheidt eveneens deze fase in het begripsvormingsproces, doch hij geeft er de voorkeur aan te spreken over 'de constitutie van mentale objecten'.
4. Dat wil zeggen verbanden, die niet meer een directe weerspiegeling zijn van één of andere werkelijkheid, bijvoorbeeld de niet-euclidische meetkunde.
5. In dit verband kan bijvoorbeeld genoemd worden on-

derzoek van Ruth Stavy, Sidney Strauss en Nathan Orpaz van de universiteit van Tel Aviv, Israël, dat gepresenteerd werd in een lezing onder de titel: *U-shaped development in ratio comparison* tijdens de eerste conferentie van de IGPME (International Group for the Psychology of Mathematics Education), gehouden te Utrecht van 28 augustus-2 september 1977.

6. Zie bijvoorbeeld: Thom (1973).
7. Zie bijvoorbeeld: Wolters (1978b).
8. Voor een uitvoerige verhandeling over algoritmiseren en oriënteringsbasis verwijzen we de lezer naar hoofdstuk III uit: *Cijferend vermenigvuldigen en delen I. Overzicht en achtergronden*. IOWO. Leerplanpublikatie nr. 10, Utrecht 1979 Zie ook: Goffree (1979), hoofdstuk 2.
9. Bij een afwijkende visie op onderwijs laat het probleem van doelkeuze en -formulering zich minder eenvoudig oplossen. Zie bijvoorbeeld: Treffers (1978).
10. Het is uiterst twijfelachtig of dergelijke visualiseringen van blijvende waarde zijn voor het wiskunde lerende kind, omdat het geschetste modelletje alleen maar past in geval er positieve getallen in het spel zijn. In dit opzicht is de getallenlijn een veel beter model en ook daarop laten de operaties met negatieve getallen zich niet zonder slag of stoot representeren.
11. Zie Wolters (1978b), hoofdstuk 2.
12. Zie in dit verband ook Klausmeier, Allen (1978). Overigens blijkt Davydov zelf evenmin voldoende duidelijkheid verschaft te hebben m.b.t. het door hem gemaakte onderscheid in empirische en theoretische begrippen en de relatie van empirische begrippen t.o.v. theoretische begrippen. Zie in dit verband bijvoorbeeld Van Parreren en Nelissen (1979, pag. 168-169).
13. Zie Streefland (1979b).
14. Zie ook Wolters (1978b), hoofdstuk 2.
15. Zie voor een uitvoerig betoog over deze kwestie het onder 8 genoemde leerplandeel.
16. Zie Freudenthal (1974). Een andere factor, verband houdend met de reeds genoemde en die mede bepalend was voor zijn eenzijdige uitwerkingen is gelegen in het structuralistische standpunt, dat Davydov ten aanzien van het wiskunde-onderwijs inneemt. (Zie in dit verband Freudenthal (1979b)).
17. Zie Freudenthal (1979a).
18. Zie Menninger, K., *Zahlwort und Ziffer*. Göttingen, 1958; of Jong, R. de (ed), *Abakus. Een belangrijk leermiddel voor het wiskundeonderwijs op de basisschool*. IOWO-leerplanpublikatie, nr. 6, Utrecht, 1977.
19. Door ons zuinige notatiesysteem voor getallen met maar 10 symbolen kan een getal eenduidig vastgelegd worden. Vooral bij aftrekopgaven, waarbij ingewisseld moet worden, bijvoorbeeld $\begin{array}{r}723\\ \underline{168}\ -\end{array}$ bezorgt dit veel leerlingen hoofdbrekens, omdat de geslotenheid en eenduidigheid in notatie eerst 'opengebroken' moeten worden, voordat de gevraagde bewerking kan worden uitgevoerd (inwisselen). Een lusabacus met 20 kralen per staaf (zie De Jong (1977))



biedt de leerlingen de mogelijkheid door de grenzen van het zuinige notatiesysteem heen te breken. De representatie van een getal op de abacus ligt niet eenduidig vast (zie bovenstaande Figuur, waar 723 telkens anders op de abacus is weergegeven). Van de abacus naar de algoritmen voor optellen en aftrekken met schriftelijke vastlegging onderweg, is – ook historisch gezien – een veel natuurlijker weg, dan met het gesloten mathematische eindprodukt op papier te beginnen en van daaruit proberen 'terug te redeneren'.
20. We behoeven in dit verband slechts te verwijzen naar het werk van Marilyn Suydam, die zich tot taak gesteld heeft op dit (onderzoeks)gebied loskomende informatiestroom bij te houden door op gezette tijden over de stand van zaken te publiceren. Zie bijvoorbeeld: Suydam, M., (1978) of Brink F. J. van der, en L. Streefland, (1979).
21. Deze ontwerpschool (van de afdeling Wiskobas van het IOWO) is de Dr. W. Dreesschool te Arnhem waar een voorbeeld schoolwerkplan voor wiskundeonderwijs op de basisschool in ontwikkeling is.
22. Jan v.d. Brink, ontwerper voor de onderbouw in het Wiskobasproject, is ontdekker van deze pijlentaal.
23. In het onder[8] genoemde leerplandeel wordt in hoofdstuk 3 nogal uitgebreid op het onderscheid logisch-psychologisch ingegaan.
24. Streefland, L. (1979a).
25. Zie Freudenthal (1979b).
26. Zie Wolters (1978).
27. Met intentionele begripsvorming wordt bedoeld begripsvorming, die de intentie van de schepper van een begrip weergeeft. Bijvoorbeeld iemand beschouwt de breuken $1/4$ en $2/8$ als identiek. Die aanname blijkt dan bijvoorbeeld niet van invloed te zijn op het resultaat van de bewerkingen optellen en aftrekken van breuken (dit betekent, dat in dergelijke betrekkingen $1/4$ ongestraft door $2/8$ vervangen kan worden). Bij extentionele begripsvorming wordt het begrip in volle omgang gevat. Voor de gelijkwaardige breuken betekent dit dat een klasse in zijn volle extensie 'gevangen' wordt: de relatie $\circledast$ gedefinieerd door $a/b \circledast c/d \Leftrightarrow ad = bc$, is een equivalentierelatie. De rationale getallen zijn per definitie de equivalentieklassen van deze relatie. Zie bijvoorbeeld Freudenthal, H., *Mathematik als pädagogische Aufgabe (Band I)*, Stuttgart, 1977, pag. 37 e.v.
28. De geïsoleerde eigenschappen vervat in de daarmee geconstitueerde formele definitie worden nu in het vervolg de beslissingscriteria voor het vaststellen of een vlakke figuur al dan niet een ruit is. Hierin manifesteert zich de 'lokale blikwisseling', het zich op ander standpunt stellen.

29. Langdurige ervaringen op de Dr. W. Dreesschool te Arnhem wijzen dit uit.
30. Zie Freudenthal (1979b).
31. Zie Davydov (1969) hierin: *Een psychologische analyse van het vermenigvuldigen*.
32. Zie Treffers (1978), hoofdstuk 1 en met name voetnoot 16, pagina 229-232 en Treffers (ed.) (1979). Dergelijke keuzemomenten raken ook aan kwesties als visie op wiskunde-onderwijs en bepaling van de doelstellingen!
33. Zie Treffers (1979).
34. Bij de zogenoemde sovjet-benadering van wiskunde-onderwijs, komen de leerlingen pas in het blikveld, wanneer het gaat om vormgeving en invulling van concrete onderwijsleersituaties (micro-niveau). Daarbij vormen de op curriculum-niveau gedane keuzen het uitgangspunt.
In het al dan niet van meet af aan rekening houden met de kinderlijke realiteit bij de constructie van wiskundeonderwijs, manifesteert zich een essentieel verschil tussen structuralisten en realisten.
Bij de structurele richting, waartoe Davydov gerekend moet worden, is het vooral de vakinhoud, die bepalend is voor keuze en ordening van leerstof. Bij de realisten ligt er onder andere een accent op informele toegangen tot het gebied. Wiskunde wordt gezien als menselijke activiteit. Deze richting, kenmerkend voor het werk van het IOWO, is minder technisch-vakinhoudelijke bepaald dan de structurele. Zie ook Treffers (1979), pagina 84 e.v.
35. Vooral Davydovs introductie tot het gebied van de breuken, dat we eerder analyseerden en beschreven (zie Streefland, 1979b), draagt deze kenmerken. Bovendien is ook dit programma gekenmerkt door een enge, eenzijdige benadering (vanuit het meten), terwijl de kinderlijke realiteit juist allerlei andere ingangen te zien geeft, waarvan het 'eerlijk verdelen' wel de meest in het oog springende is.
36. Men heeft veelal aan één voorbeeld genoeg om naar de onderliggende wiskundige structuur te generaliseren en deze toepasbaar te maken in structuur-analoge situaties. Dergelijke paradigma's treft men bijvoorbeeld aan bij combinatorische telproblemen. (Deze vorm van generaliseren wordt door Davydov niet onderscheiden).
37. Het zal de lezer duidelijk zijn, dat Davydovs voorkeur hier naar uitgaat, op grond van zijn theoretisch uitgangspunt met betrekking tot generaliseren.
38. Davydov gaat overigens voorbij aan het mathematisch dilemma, dat, wanneer met het getalbegrip wil introduceren als machtigheid van eindige verzamelingen men eerst dat getalbegrip nodig heeft om eindige verzamelingen te kunnen definiëren. Bovendien blijkt het begrip verzameling pas in de hogere wiskunde toepassing te vinden, bijvoorbeeld als substraten van structuren.
39. Een ander bekend voorbeeld vormen de zogenaamde MAB blokken (Multibase-arithmetic-blocks) van Dienes, die bedoeld zijn verschillende talstelsels te representeren.
Als inwissel-materiaal voor verschillende talstelsels kan het inderdaad die functie vervullen. Dit materiaal staat evenwel dichter bij additieve notatiesystemen als van de Egyptenaren of de Romeinen, dan bij een positiesysteem, omdat plaats- en plaatswaarde niet door dit materiaal gerepresenteerd worden. Het materiaal staat dus niet zonder meer model voor positionele getalssystemen. Daartoe dient een positiekaart, of volgorde-afspraak voor de verschillende soorten blokken toegevoegd te worden.
40. Een verticaal programma voor wiskundeonderwijs, dat op dergelijke principes stoelt, wordt gekenmerkt door toenemende doelmatigheid, zeg strakheid 'naar boven'. Dit kan ook voor het op het IOWO ontwikkelde programma gezegd worden en zal ook geenszins bevreemding wekken, als men zich realiseert, dat met de jaren de zuivere wiskundige context voor en door de leerlingen steeds verruimd wordt, waardoor het 'lijnrecht' op het wiskundige doel afstevenen bij een bepaalde activiteit steeds beter tot de mogelijkheden van leerlingen (en leerkracht) gaat behoren.

Literatuur

Brink, F. J. van den, en L. Streefland, Berichten uit het Buitenland, *Wiskobas-Bulletin*, 1979 (8) 3.

Bruggen, J. C. van, *Leren cijferen bekeken door een leerpsychologische bril*. IOWO Utrecht, 1975.

Davydov, V. V., *Psychologische mogelijkheden van jonge leerlingen bij het leren van wiskunde*. Moskou, 1969.

Davydov, V. V., *De ontwikkeling van het generaliseren bij kinderen*. Tbilisi 1974. Werkvertaling van de vertalersgroep Rups Utrecht, 1978.

Davydov, V. V., Logical and psychological Problems of Elementary Mathematics as an Academic Subject, in: J. Kilpatrick, J. Wirszup, E. G. Begle en J. W. Wilson (eds.), *Soviet Studies in the psychology of learning and teaching Mathematics*, Vol VII, Chicago, 1975.

Freudenthal, H., Sovietresearch on teaching algebra at the lower grades of the elementary school, *Educational Studies in Mathematics*, 1974 (5) 391-412.

Freudenthal, H., *Didaktische fenomenologie van wiskundige grondbegrippen*. Intern IOWO, 1976-1979.

Freudenthal, H., *Mathematik als pädagogische Aufgabe (Band I)*. Stuttgart 1977.

Freudenthal, H., Lessen in sovjetrekenonderwijskunde, *Pedagogische Studiën*, 1979a (56) 17-25.

Freudenthal, H., Structuur der wiskunde en wiskundige structuren, *Pedagogische Studiën*, 1979b (56) 51-61.

Goffree, F., *Leren onderwijzen met Wiskobas*. IOWO Utrecht, 1979.

Jong, R. de (ed), *Abakus. Een belangrijk leermiddel voor het wiskundeonderwijs op de basisschool*. IOWO leerplanpublikatie nr. 6, Utrecht, 1977.

Klausmeier, H. J., P. S. Allen, *Cognitive Development of Children and Youth*. New York, San Francisco, London, 1978.

Menčinskaja, N. A., The psychology of Mastering concepts: Fundamental problems and methods of research.

Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics, Vol I., S. M. S. G. Stanford University, 1969, 75-92.

Menčinskaja, N. A., Some aspects of the development of the Soviet psychology of learning, *Soviet Education,* 1978, vol 20, nr. 11, 72-95.

Menninger, K., *Zahlwort und Ziffer,* Göttingen, 1958.

Nelissen, J., A. Vuurmans en M. A. D. Wolters, *Wat Tanečka niet leert, zal Tanja nooit weten,* verslag van een studiereis naar Moskou. S. A. C. Utrecht, 1977.

Parreren, C. F. van, en J. A. M. Carpay, *Sovjetpsychologen aan het woord,* Groningen, 1972.

Parreren, C. F. van, J. M. C. Nelissen (red), *Met Oosteuropese psychologen in gesprek.* Groningen, 1979.

Piaget, J., Comments on mathematical education, in: A. G. Howson, (ed), *Developments in Mathematical Education,* Cambridge, 1973, 79-88.

Skemp, R., *Wiskundig denken.* Aulapocket, Utrecht, 1973.

Streefland, L., Het oefenboek in de bovenbouw van het Wiskobas-integratieplan. Pijlen, *Wiskrant 16,* IOWO Utrecht 1979a.

Streefland, L., Davydov, Piaget en de breuken, *Pedagogische Studiën,* 1979b (56) 289-307.

Suydam, M., *Review of recent research related to the concept of fractions and of ratio.* Ohio State University, USA, 1978. (N.B.: Dit artikel is opgenomen in 'Osnabrücker Schriften zur Mathematik', Universiteit van Osnabrück 1978.)

Thom, R., Modern mathematics: does it exist? in: A. G. Howson (ed), *Developments in Mathematical Education,* Cambridge, 1973, pag. 194-209.

Treffers, A., *Wiskobas doelgericht.* IOWO, Utrecht, 1978.

Treffers, A. (ed), *Cijferend Vermenigvuldigen en Delen I. Overzicht en achtergronden,* IOWO, leerplanpublikatie nr. 10, Utrecht, 1979.

Vos, J. F., *Onderwijswetenschap en marxisme.* Groningen, 1976.

Wolters, M. A. D., De opvattingen van Davydov c.s. over onderwijs en cognitieve ontwikkeling, *Tijdschrift voor onderwijsresearch,* 1978 (3) 22-34.

Wolters, M. A. D., *Van rekenen naar Algebra.* Rijksuniversiteit Utrecht, 1978b.

Curriculum vitae

L. Streefland (geboren 1939) was na zijn opleiding tot onderwijzer werkzaam in diverse takken van onderwijs als onderwijzer, schoolleider en leraar wiskunde. Na voltooiing van zijn wiskundestudie (MO B.) trad hij in 1971 in dienst van het IOWO (Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs) aan de Rijksuniversiteit te Utrecht. Momenteel is hij bezig met de doctoraalstudie pedagogiek (specialisatie onderwijskunde). Sinds enige jaren houdt hij zich bezig met kwalitatief onderzoek op het terrein van de begripsontwikkeling bij kinderen met betrekking tot breuken en verhoudingen, en mathematische begrippen in het algemeen.

Adres: IOWO, Tiberdreef 4, Utrecht-Overvecht.