Kwalitatief-psychologische analyse van het oplossen van aanvankelijke rekenopgaven bij 6 à 8-jarige basisschoolleerlingen

E. DE CORTE & L. VERSCHAFFEL (aspirant N.F.W.O.)
Afdeling Didactiek en Psychopedagogiek, K.U., Leuven

Samenvatting

Sinds het begin van de twintigste eeuw hebben reeds talrijke onderzoekers zowel in het Westen als in de Sovjet-Unie het (leren) probleemoplossend denken bestudeerd. Een belangrijke ontwikkeling die zich de laatste tijd in dit domein heeft voorgedaan is het overstappen van onderzoekingen in gecontroleerde laboratoriumsituaties naar studies met schoolrelevante taken en problemen in de reële klassituatie. Het onderhavig onderzoek is in dit kader te plaatsen. In dit artikel wordt beknopt verslag uitgebracht van een constaterend kwalitatief-psychologisch onderzoek van het oplossingsgedrag van 6 à 8-jarigen ten aanzien van aanvankelijke rekensommen. In een volgende bijdrage wordt een daarbij aansluitend construerend onderzoek beschreven.

Eerst wordt een conceptueel kader met betrekking tot de bestudeerde rekenopgaven voorgesteld, waarmee we de bevindingen adequaat en systematisch kunnen beschrijven en analyseren. Vervolgens bespreken we de onderzoeksmethoden en het materiaal waarvan we ons bediend hebben. Daarna volgt een eerste, eerder kwantitatieve analyse van de fouten gemaakt op een aantal collectieve rekentoetsen. Vervolgens beschrijven, systematiseren en evalueren we enige adequate en inadequate handelingsstructuren van leerlingen, die resp. wel en niet de juiste oplossing vonden. Tenslotte proberen we de slechte prestaties van deze leerlingen te begrijpen vanuit een aantal tekortkomingen van de vigerende rekendidactiek.

1. *Inleiding*

In de onderwijspsychologie en meer bepaald in de studie van het (leren) probleemoplossend denken zijn recent enkele duidelijke ontwikkelingstendensen aanwijsbaar (De Corte, 1979). Een eerste belangrijke evolutie is de verschuiving van een louter prestatiegerichte benadering naar de bestudering van de meer procesmatige aspecten van het denken. Ten tweede, waar vroeger in de leerpsychologische onderzoekingen vooral artificiële problemen werden aangewend, wordt thans meer en meer met levensechte, schoolrelevante taken gewerkt; daardoor neemt de ecologische validiteit van de studies toe, terwijl men toch poogt ook de interne validiteit te waarborgen. Ten derde, er gaan steeds meer stemmen op om de tegenstelling tussen theorievorming en optimalisering – of anders, tussen 'basic' en 'applied research' – als een steriele en zelfs als een schijntegenstelling te beschouwen. Het onderhavig onderzoek van het (leren) probleemoplossend denken met aanvankelijke rekenopgaven bij 6 à 8-jarige basisschoolleerlingen, situeert zich binnen deze ontwikkelingslijnen.

Twee doelstellingen stonden bij de uitbouw van deze studie voorop. De hoofdbetrachting is om vanuit een welbepaald leerinhoudelijk domein een bijdrage te leveren tot het beantwoorden van een aantal centrale en actuele vragen uit de onderwijspsychologie. We vermelden er enkele. Wat is een probleem en welke fasen kunnen in het probleemoplossingsproces onderscheiden worden? Welke onderzoeksmethoden zijn efficiënt, betrouwbaar en valied om de mentale activiteiten, die een subject in de loop van het niet rechtstreeks observeerbare oplossingsproces voltrekt, op het spoor te komen? Kan probleemoplossen beïnvloed worden en zo ja, welke leerprocessen dienen daartoe op gang gebracht te worden? En tenslotte: als probleemoplossend denken leerbaar is, welke is dan de relatie tussen dergelijk leren en de cognitieve ontwikkeling? De relatief jonge leeftijd van de onderwijspsychologie en de complexiteit van de te bestuderen fenomenen in acht genomen, stellen verscheidene auteurs voor om voorlopig de bovenvermelde problematieken te herformuleren en te bestuderen voor welbepaalde leerinhoudelijke domeinen en situaties, eerder dan een algemeen en definitief antwoord op deze vragen te ambiëren (Snow, 1977, p. 12; Van Parreren, 1979, p. 211). Wolters (1978) bijvoorbeeld heeft dit gedaan voor een onderdeel van het rekenonderwijs in de basisschool dat bekend staat onder de naam 'redactie-opgaven' of rekenvraagstukjes'. De aanvankelijke formule-opgaven waarmee leerlingen in het eerste leerjaar geconfronteerd worden en meer in het bijzonder de indirecte formule-opgaven of 'puntjesoefeningen' (bijvoorbeeld 4+ .=9) vormen voor ons de ingang om het probleemoplossen als dusdanig en de mogelijke beïnvloeding ervan door middel van onderwijs te onderzoeken. Het is vanuit een veelheid van zulke taakspecifieke, 'lokale' studies, dat op langere termijn een meer algemene theorievorming mogelijk kan worden (De Corte, 1979, p. 217).

De tweede doelstelling houdt verband met een specifieke, praktische nood. Uit een aantal gesprekken met onderwijzers en taakleraars was gebleken dat het onderwijzen en het leren van de z.g. puntjesoefeningen een zeer precair probleem vormt[1]. Dit is o.i. mede te wijten aan het feit dat men in België bij de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs de leerkrachten te eenzijdig geïnformeerd heeft over de nieuwe begrippen en symbolen van de moderne wiskunde en aldus onvoldoende aandacht heeft besteed aan het verschaffen van inzicht in het probleemoplossend denken, met name in de meer formele, methodische aspecten van het (wiskundig) denken van de leerlingen. Met deze studie hopen we een bijdrage te leveren tot het opvullen van deze leemte.

2. *Onderzoeksopzet*

De meerledigheid en de complexiteit van de vraagstelling eisten een brede en geïntegreerde onderzoeksopzet. Bij de uitwerking ervan hebben we ons gebaseerd op de door Kalmykova (1970, p. 139) ontwikkelde onderzoekscyclus. Vooral het onderscheid tussen en de complementariteit van constaterend en construerend onderzoek leken ons bijzonder waardevol.

In dit artikel stellen we de activiteiten voor die wij in het kader van het constaterend onderzoek in januari en juni 1978 in de eerste-graadsklassen van diverse basisscholen doorgevoerd hebben. Verschillende rekentoetsen werden afgenomen en op de antwoordbladen werden een kwantitatieve en een kwalitatieve foutenanalyse toegepast. Tevens werden z.g. hardop-denk-verslagen van leerlingen die individueel met de betreffende rekenopgaven geconfronteerd waren, geïnterpreteerd.

In een volgend artikel zullen we het exploratief onderwijsexperiment beschrijven, dat in september 1978 in het tweede leerjaar van een basisschool uitgevoerd werd. Dit construerend onderzoek is opgezet volgens het voortoets-natoets-design met controlegroep (Campbell & Stanley, 1963). Gedurende meer dan twee weken werd door een onderzoeker dagelijks wiskunde-onderwijs gegeven volgens vooraf opgestelde principes. Gepoogd werd de vastgestelde moeilijkheden bij het oplossen van de bestudeerde rekenopgaven weg te werken door de leerlingen uit te rusten met volwaardige begrippen en met een wendbaar denktechnisch apparaat. Naderhand werd nagegaan of de leerlingen uit de experimentele klas beter de betreffende én andere, structureel verwante problemen oplosten dan leerlingen die het experimenteel onderwijs niet gevolgd hadden.

3. *Een conceptueel raamschema*

Op basis van enkele voorbereidende gesprekken met practici, enige individuele contacten met basisschoolleerlingen en een literatuurverkenning werd een tweedimensioneel conceptueel kader opgebouwd, waarin de mentale handelingen van leerlingen tijdens het oplossingsproces van aanvankelijke rekenopgaven gesitueerd kunnen worden. De horizontale dimensie van dit schema bestaat uit de diverse opgaventypes, de verticale dimensie uit de fasen van het oplossingsproces.

Om de bestudeerde verzameling rekenopgaven adequaat te kunnen beschrijven hebben we vier structuurkenmerken aangehouden: de manier waarop de opgave wordt gepresenteerd (redactie- of formule-opgave), de aard van de rekenoperatie die in de opgave is uitgedrukt (optelling of aftrekking), de complexiteit van de rekenopgave (enkelvoudige of complexe opgave) en tenslotte het al dan niet indirect karakter van de opgave (directe of indirecte rekenopgave). Dit laatste onderscheid vergt wellicht enige toelichting. De termen direct en indirect verwijzen naar de aard van de verhouding tussen bekende en onbekende grootheden van de wiskundige vergelijking. Als het om een optelling gaat, noemen we de opgave indirect resp. direct naargelang de som al dan niet gegeven is. Betreft het een aftrekking, dan wordt ze indirect of direct genoemd naargelang het verschil van de opgegeven rekenoperatie al dan niet bekend is. Aan de hand van de vier bovenvermelde kenmerken kunnen we de rekenopgaven typeren. Zo is de formule-opgave .+4=9 een enkelvoudige, indirecte optelling, terwijl 16–4–8= . een complexe, directe aftrekking is.

De tweede dimensie van het raamschema wordt gevormd door de 'momenten' die wij in het probleemoplossingsproces bij aanvankelijke rekenopgaven onderscheiden, nl. het denkend rekenen, het technisch rekenen en de controlehandeling. Vaak worden de handelingen binnen elk van deze fasen slechts partieel, uitermate verkort of impliciet uitgevoerd, bijvoorbeeld wanneer het om zeer gemakkelijke oefeningen gaat.

De fase van het denkend rekenen omvat alle handelingen van de leerling ten aanzien van een probleemopgave die resulteren in de beslissing een welbepaalde rekenoperatie uit te voeren. Een probleemopgave noemen we een oefening waarvoor de leerling geen kant-en-klare oplossingsmethode kent of beschikbaar heeft en derhalve de opgave moet analyseren en transformeren totdat hij een standaardopgave bekomt (zie Van Parreren, 1974-75, p. 167). Wanneer deze fase van probleemanalyse en transformatie is beëindigd, wordt de betreffende rekenoperatie werkelijk uitgevoerd, d.w.z. diverse deelhandelingen worden voltrokken om de getallen op te tellen of af te trekken. Dit wordt technisch rekenen genoemd. Nadat de oplossing gevonden is, kunnen eventueel identieke of alternatieve operaties op het taakmateriaal uitgevoerd worden, die de juistheid van de gegeven oplossing al dan niet bevestigen. Dit noemen we controlehandelingen.

We kunnen het onderscheid tussen denkend en technisch rekenen als volgt verduidelijken. Indien we de leerling allerhande ongewone of ingewikkelde rekenopgaven aanbieden en hem de beschikking geven over een rekenmachientje, dan kan hij het uitrekenen van de bewerkingen aan het machientje toevertrouwen, doch hij blijft verantwoordelijk voor de beslissing wélke operaties uitgevoerd worden. M.a.w. het machientje ontslaat de leerling van het technisch maar niet van het denkend rekenen.

In de literatuur vinden we heel wat aanwijzingen die pleiten voor de theoretische houdbaarheid en de praktische bruikbaarheid van de voorgestelde indeling en meer in het bijzonder van het onderscheid tussen denkend en technisch rekenen. Het onderscheid dat Mialaret (1967) maakt tussen 'compréhension des opérations' en 'pratique des opérations' wordt door de begrippen denkend en technisch rekenen adequaat weergegeven. Mikulina's (1969) indeling van de rekenfouten gemaakt door eersteklassers op eenvoudige formule-opgaven met zeer kleine getallen, is eveneens tot hetzelfde onderscheid te herleiden. In een orthopedagogische benadering maakt Borghouts (1976) onderscheid tussen twee types primaire rekenstoornissen, nl. stoornissen in het denkend en in het technisch rekenen. In het eerste geval slagen de leerlingen er niet in de rekenopgaven op te lossen, omdat ze de adequate formule niet vinden, in het tweede geval omdat ze de formule foutief uitwerken (Borghouts, 1976, p. 224). De kern van een stoornis in het denkend rekenen is een gebrekkig inzicht in de samenhang tussen de elementen van een som, terwijl leerlingen met een technische rekenstoornis veel moeite hebben met het inprenten en onthouden van allerhande afspraken en technieken (Borghouts, 1976, p. 218 en 222). Nauw daarbij aansluitend maakt ook Dumont c.s. (1977) gebruik van de tweedeling 'begrijpend versus technisch rekenen'. Deze onderzoekers trachten de twee 'soorten rekenen' aan verschillende groepen intelligentiefactoren te koppelen. Tegen hun omschrijving en operationalisering van dit begrippenpaar rijzen evenwel een aantal bezwaren, die door Nelissen c.s. (1978) zijn samengebracht. Waardevol lijkt ons alleszins de kritiek van laatstgenoemden dat Dumont c.s. het technisch rekenen – als tegenpool van het inzichtelijk, begrijpend rekenen – eenzijdig definiëren als een mechanisch-automatisch gebeuren (Nelissen e.a., 1978, p. 419).

4. *Onderzoeksmethoden en -materiaal*

Vanuit de literatuur waren ons een aantal onderzoeksmethoden bekend die bruikbaar zijn om de psychologische structuur van de rekenhandelingen van basisschoolleerlingen te achterhalen. Omdat geen van deze technieken op zich als voldoende efficiënt en betrouwbaar kan beschouwd worden, hebben we meerdere methoden tegelijk aangewend en de resultaten met elkaar geconfronteerd.

Vooreerst werd een kwantitatieve en kwalitatieve analyse van de antwoordprotocollen van enkele door ons opgestelde en collectief afgenomen rekentoetsen doorgevoerd. Daarmee wilden we vooreerst de empirische moeilijkheidsgraden berekenen van de diverse opgaventypes, opgesteld volgens de kenmerken beschreven in de vorige paragraaf. Daarnaast wensten we via een kwalitatieve foutenanalyse de inadequate handelingsstructuren van slechte probleemoplossers te reconstrueren. De betreffende toetsen werden in januari en juni 1978 afgenomen. Ze bevatten vierentwintig rekenopgaven met kleine getallen zoals $.=3+7$, $.-7=5$, $2+5+9=.$ en $.-4=6-2$. In het totaal beschikten we over 233 antwoordbladen. Deze waren afkomstig van 176 jongens en meisjes uit drie eerste en vier tweede leerjaren. In twee klassen werden twee toetsen afgenomen. Omdat bijna alle klassen tot scholen met een positieve leerlingenselectie behoorden, vermoeden we dat de resultaten van een uitgebreider en representatiever onderzoek heel wat lager zouden liggen dan de verkregen uitslagen.

Naast de collectieve toetsafnamen werden ook een aantal sessies georganiseerd, waarin kinderen individueel met de opgaven uit de rekentoetsen geconfronteerd werden. We hebben zes knappe rekenaartjes en zes kinderen die moeilijkheden hadden met wiskunde, onderzocht. Aan al deze leerlingen werd gevraagd hardop te denken of, indien dit niet lukte, achteraf verslag uit te brengen van hun oplossingsstappen en bijbehorende overwegingen. Bijkomende gegevens werden verkregen door metingen van de oplossingstijd, gedragsobservaties en het vragen naar de subjectieve beleving van de moeilijkheid van bepaalde opgaven. Deze onderzoekstechnieken werden evenwel slechts sporadisch aangewend. De bedoeling van de individuele sessies was tweeledig en laat zich volkomen begrijpen vanuit de complementariteit van de beschikbare onderzoeksmethoden. In de eerste plaats wilden we nagaan of de denkwegen van slechte oplossers, die wij geconstrueerd hadden bij de analyse van de collectieve toetsprotocollen terug te vinden waren in de hardop-denk- of retrospectie-verslagen van deze leerlingen. In de tweede plaats konden via deze individuele contacten allerlei oplossingsmethoden van knappe leerlingen ontdekt worden. Immers, over de aanpak en de oplossingsweg die gevolgd wordt door leerlingen die de juiste oplossing van een rekenopgave vinden, verkrijgt men door foutenanalyse geen gegevens.

5. *Kwantitatieve analyse*

De bedoeling van deze eerste analyse was de 'rampgebieden' binnen het eerder voorgestelde tweedimensioneel schema nauwkeurig af te bakenen.

In de eerste plaats hebben we onderzocht of de talrijke fouten gemaakt op de collectieve toetsen eerder op het vlak van het denkend dan wel op het gebied van het technisch rekenen te situeren waren. In het totaal werden 1633 fouten geconstateerd. In Tabel 1 wordt de verhouding tussen de diverse foutentypes procentueel weergegeven.

Tabel 1 *Procentuele verdeling van de fouten uit 233 antwoordprotocollen van de rekentoetsen*

Fouten in het denkend rekenen	78%
Fouten in het technisch rekenen	13%
Dubbele fouten	4%
Onopgeloste opgaven	3%
Niet te categoriseren fouten	2%

Men zou kunnen opwerpen dat het onderbrengen van fouten in de categorieën denkend en technisch rekenen een subjectieve, onbetrouwbare aangelegenheid is. Daartegenover staat evenwel dat zestien aspirant-onderwijzeressen, geconfronteerd met tien willekeurig gekozen foutief opgeloste rekenopgaven en geïnformeerd over de betekenis van de beide begrippen, slechts één fout niet in de juiste categorie wisten onder te brengen, nl. $17=13+\underline{17}$[2]. Dat er met betrekking tot de overige negen opgaven een zeer hoge overeenkomst bestond tussen enerzijds de aspirant-onderwijzeressen onderling en anderzijds tussen de beoordelaars en de onderzoekers pleit voor de betrouwbaarheid en de bruikbaarheid van het onderscheid tussen denkend en technisch rekenen.

Dat een niet te verwaarlozen aantal dubbele fouten gemaakt werd is geenszins verwonderlijk. Wanneer we denkend en technisch rekenen als onderscheiden fasen beschouwen, kan de leerling ten aanzien van elke fase een fout maken. We verduidelijken dit met een voorbeeld. Tijdens een individuele sessie loste Pieter de opgave $.+3=6$ als volgt op: $\underline{8}+3=6$. Hij had én de verkeerde rekenoperatie gekozen ('Om dat getal te vinden moet ik drie en zes optellen') én die operatie verkeerd uitgevoerd ('drie plus zes is ...acht'). Uit Tabel 1 mogen we besluiten dat voor de 6 à 8-jarigen, die in het onderzoek betrokken waren, de moeilijkheden in verband met aanvankelijke rekenopgaven zich hoofdzakelijk op het vlak van het denkend rekenen situeren.

In de tweede plaats trachtten we een antwoord te geven op de vraag in welke mate de in paragraaf 3 beschreven structuurkenmerken de moeilijkheidsgraad van de rekenopgave bepalen. Wij kunnen hier niet op alle kenmerken ingaan en beperken ons derhalve tot een korte bespreking van het kenmerk '(in)directheid' bij de enkelvoudige formule-opgaven.

Van de directe en de indirecte enkelvoudige formule-opgaven uit de collectieve toetsen werden er door de leerlingen precies evenveel correct opgelost, nl. 87%. Deze vaststelling ondersteunt geenszins de gangbare opvatting die men zowel bij leerkrachten als in praktijkgerichte werken aantreft, nl. dat er een 'kloof' bestaat tussen de directe en de indirecte rekenopgaven. Indirecte opgaven zouden veel moeilijker zijn dan directe. Om tot een genuanceerd beeld en een adequate interpretatie van het verkregen resultaat te komen, is een verdere differentiatie zowel binnen de directe als de indirecte opgaven noodzakelijk. Binnen de directe opgaven onderscheiden we type-I- ($a\pm b=.$) en type-II-opgaven ($.=a\pm b$); indirecte opgaven met als grondstructuur $a\pm.=b$ en $.\pm a=b$ noemen we resp. type-III- en -IV-opgaven. In Tabel 2 geven we het procent correcte oplossingen voor de aldus verkregen acht enkelvoudige opgaventypes.

Tabel 2 *Moeilijkheidsgraden van de diverse soorten enkelvoudige formule-opgaven berekend op de resultaten van de collectieve toetsen*[3]

	directe opgaven		indirecte opgaven	
	type I	type II	type III	type IV
optelling	98%	79%	94%	94%
aftrekking	96%	75%	93%	68%

De afwezigheid van een verschil tussen directe en indirecte opgaven kan vooreerst op rekening van de type-II-opgaven geschreven worden. De vele fouten op dit soort opgaven verrasten de leerkrachten van de betreffende klassen ten zeerste. In geen enkele handleiding of onderzoeksrapport vonden we iets over dit opgaventype vermeld. Een tweede vaststelling is dat het grootste deel van de fouten ten aanzien van de indirecte rekenopgaven op de type-IV-aftrekkingen gemaakt werden. Op het grote verschil tussen het aantal fouten op type-III- en IV-aftrekkingen wordt ook door Case (1977, p. 3) gewezen. Tenslotte vermelden we dat in de toetsen de indirecte opgaven nauwelijks slechter opgelost werden, wanneer het is-gelijk-aan-teken vooraan stond (bijvoorbeeld b=a± . in plaats van a± .=b). Daarom hebben we de indirecte opgaven niet nog verder ingedeeld in Tabel 2. Dit contrasteert met de resultaten die de Amerikaanse onderzoekers Lindvall & Ibarra (1978) bekwamen in een gelijkaardige studie.

In de thans volgende paragrafen bespreken we enkele adequate en inadequate handelingsstructuren die we via de kwalitatieve foutenanalyse, de hardop-denk- en de retrospectie-verslagen op het spoor gekomen zijn. Het in paragraaf 3 voorgestelde tweedimensioneel schema dient daarbij als leidraad. Natuurlijk kunnen alle cellen ervan hier niet uitvoerig aan bod komen. We beperken ons daarom tot het denkend rekenen ten aanzien van directie opgaven van het type-II en het denkend rekenen, het technisch rekenen en de controlehandelingen ten aanzien van de indirecte enkelvoudige opgaven (type-III en IV). Op het technisch rekenen bij directe opgaven gaan we niet in, omdat onze bevindingen terzake in grote lijnen dezelfde zijn als die van Van Eerde & Verhoef (1978). Deze auteurs delen de technische rekenhandelingen van kinderen bij type-I-opgaven in in uitvoerige telhandelingen, verkortingen en automatismen.

6. *Kwalitatieve analyse van het denkend rekenen bij type-II-opgaven* (.=a±b)

6.1. *Adequate handelingsstructuren*

Er zijn leerlingen die zich bezinnen op de type-II-opgaven en ze na analyse transformeren tot type-I-opgaven door gebruik te maken van het begrip 'gelijkheid'. Meer in het bijzonder passen zij één eigenschap van deze gelijkheidsrelatie toe, nl. de omkeerbaarheid. Voor deze leerlingen betekenen de onvertrouwde type-II-opgaven wel een probleem en derhalve vormen zij het probleemmateriaal om zodat er een standaardopgave verschijnt, waaruit de uit te voeren rekenoperatie onmiddellijk blijkt en naar het technisch rekenen 'doorgestuurd' wordt. Kurt reageerde als volgt op de opgave .=3+7: '...Dat hebben we nog niet geleerd. Of, wacht eens, dat is hetzelfde als 3+7= . want ik mag dat van plaats verwisselen'.

Bij heel wat leerlingen werd evenwel geen denkend rekenproces teruggevonden wanneer ze type-II-opgaven oplosten. Voor hen vormen deze opgaven geen probleem, omdat zij in de opgave onmiddellijk een standaardopgave herkennen. Toen we Tom vroegen hoe hij zo snel de juiste oplossing had gevonden van .=3+7 antwoordde hij 'Ik wéét dat gewoon. Oefeningen die er zo uitzien, los je op door de twee getallen op te tellen. En drie plus zeven is tien'. De associatie tussen de uiterlijke kenmerken van de opgave enerzijds en de uit te voeren rekenoperatie anderzijds, is bij sommige leerlingen een maximale verkorting van een handeling die oorspronkelijk uitvoerig was en derhalve inzichtelijk en generaliseerbaar; bij anderen gaat het om een 'blind' automatisme, als dusdanig aangeleerd zoals in de klassieke associatie-experimenten.

6.2. *Inadequate handelingsstructuren*

Op de type-II-opgaven werden verrassend veel denkfouten gemaakt (zie Tabel 2). Uit de individuele sessies is gebleken dat we de leerlingen, die deze opgaven foutief oplossen, in twee groepen kunnen indelen. Voor de leerlingen uit de eerste groep vormen deze opgaven een onoplosbaar probleem. (Tot deze groep behoorden voornamelijk zwakke rekenaars). Zij slagen er niet in met betrekking tot die opgaven een technische rekenoperatie uit te voeren. Ze weten immers de onvertrouwde opgave niet om te vormen tot een vertrouwde type-I-opgave, omdat de handelingen in verband met het begrip gelijkheid bij hen geenszins wendbaar zijn. Deze leerlingen zitten derhalve van meetaf aan in een impasse. Ze vertellen dat ze 'deze oefeningen nog niet geleerd hebben' of geven helemaal geen antwoord. Slagen de leerlingen uit de eerste groep er dus tijdens het denkend rekenen niet in de probleemopgave om te vormen, bij de leerlingen uit de tweede groep is de fase van het denkend rekenen afwezig. Deze leerlingen denken als het ware niet na en geven onmiddellijk of na een (kort) technisch rekenproces een antwoord. Hoewel ze de type-II-opgaven verkeerd oplossen, is er van een subjectieve probleemervaring helemaal geen sprake. In de fouten van deze leerlingen ontdekken we een even verrassende als overtuigende systematiek. Zo beantwoordden 19% van alle leerlingen de opgave .=3+7 met 4. De opgaven .=4+6 en .=12–8 werden resp. vaak met 2 en 20 beantwoord. Hoe komt het dat zoveel leerlingen dergelijk bizar oplossingsgedrag stellen? Twee kenmerken van de traditionele rekendidactiek zijn o.i. hiervoor verantwoordelijk. Vooreerst worden leerlingen van het eerste en het tweede leerjaar bijna uitsluitend met opgaven, waarvan de uitkomst achteraan staat, geconfronteerd. M.a.w. de grondstructuur van de rekenopgaven is bijna altijd .±.=. en zelden of nooit .=.±.. Ter illustratie verwijzen we naar Rekentaken 1 van Raets (1977), dat in de meeste onderzochte klassen gebruikt werd. Daardoor wordt in de hand gewerkt dat leerlingen zich bijna uitsluitend op de in de opgave aanwezige getallen concentreren en de 'eigenaardige' structuur niet eens opmerken. Zij lossen de bovenvermelde opgaven op alsof er een andere opgave stond, nl. .+3=7, .+4=6 en .–12=8. De leerlingen lossen de opgave op die ze verwachten, niet de opgave die er staat. Daarbij komt dat in vele klassen een klimaat van wedijver bestaat tussen de leerlingen. 'Vaak hangt het criterium voor "goed rekenen" samen met het aantal opgeloste rekenopgaven', schrijven Van Eerde & Verhoef (1978, p. 366). Daardoor wordt veel te snel geantwoord en laten de leerlingen het steevast na de gegeven oplossing te controleren.

7. *Kwalitatieve analyse van het denkend rekenen bij indirecte rekenopgaven* (a±.=b en .±a=b)

Net zoals in de voorgaande bespreking komen eerst de adequate handelingen aan bod. Daarbinnen wordt onderscheid gemaakt tussen het oplossingsproces van leerlingen voor wie de opgave een probleem vertegenwoordigt en leerlingen die in de opgave een standaardopgave herkennen. Vervolgens bespreken we de inadequate handelingen.

7.1. *Adequate handelingsstructuren*

Niet zelden vangt het probleemoplossingsproces ten aanzien van indirecte enkelvoudige rekenopgaven aan met de bewustwording dat het probleem niet opgelost kan worden door eenvoudig de twee getallen op te tellen of af te trekken, zoals dit bij de type-I-opgaven het geval is. De som 2+7= . bijvoorbeeld wordt opgelost door bij twee zeven op te tellen (of omgekeerd). Om de indirecte opgave 4+.=9 op te lossen dient een andere weg uitgestippeld. Bij verscheidene leerlingen kwam dit inzicht pas tijdens de controlefase tot stand, nadat eerst een foutief antwoord, bijvoorbeeld 4+<u>13</u>=9 was ingevuld.

Volgend op een moment van probleembewustwording, onderscheiden we verder drie verloopsvormen of modellen van het denkend rekenen bij enkelvoudige indirecte formule-opgaven.

Volgens het eerste model maakt de leerling, nadat de relaties adequaat weergegeven zijn, van een oorspronkelijke indirecte opgave een directe opgave. Deze is eigenlijk niets anders dan een andere manier om de relaties tussen de bekende en onbekende grootheden weer te geven. De leerling voert deze transformatie uit, omdat hij verwacht dat hij aldus een standaardopgave bekomt, d.w.z. een opgave waarvoor hij over snelle en efficiënte middelen beschikt om ze op te lossen. Zo worden opgaven zoals 2+.=6, .+2=6 en 6–.=2 opgelost door ze eerst om te vormen tot 6–2=. en opgaven van het type .–4=2 door er eerst 2+=. van te maken. Met het vermelden van de wiskundige transformaties is evenwel nog niets gezegd over de aard van de handelingen die de leerling voltrekt. Bij de onderzochte kinderen die volgens dit model probleemopgaven oplosten, maakten de bovenvermelde omvormingen geen deel uit van een algoritmisch oplossingsproces, zoals dit het geval is bij de meeste volwassenen die met een vergelijking met één onbekende geconfronteerd worden. Een leerling van de eerste graad die traditioneel rekenonderwijs heeft gekregen kan deze oplossingsweg onmogelijk volgen. Hoe kwamen leerlingen, die de indirecte opgaven als problematisch ervoeren, dan wél tot de beslissing het onbekende getal te identificeren door middel van één van de bovenvermelde transformaties? Zij trachtten eerst de symbolen uit de formule-opgave te representeren. Deze representatie nam soms een materiële of een schematische, doch het vaakst een verbale vorm aan. Of het opteren voor één van deze representatiewijzen samenhangt met het niveau van cognitieve ontwikkeling of met bepaalde mathematische 'types' is vooralsnog niet duidelijk. Alleszins kan worden gesteld dat het frequent voorkomen van de verbale manier van representeren geen artefact was van de toegepaste onderzoekstechniek, nl. hardop-denken. Wat verstaan we nu onder die verbale representatiewijze, die we door een aantal knappe probleemoplossers toegepast vonden? Deze werkwijze komt hierop neer dat de leerling het geheel van symbolen tracht te verwoorden en daarbij de bekende en onbekende elementen uit de formule-opgave poogt in te passen in een cognitief semantisch schema (zie Anderson, 1978), waarin ook de optelling en de aftrekking als inverse rekenoperaties zijn geïntegreerd. Twee dergelijke schema's die wij uit de hardop-denkverslagen gedistilleerd hebben, noemden we het 'erbij-eraf-schema' en het 'deel-geheel-schema'. Ter illustratie geven we het hardop-denkverslag van een knappe eersteklasser die bij de hem onvertrouwde opgave 4+.=9 het deel-geheel-schema aanwendde: 'Ik heb een stuk, nl. 4 en nog een stuk en samen vormen ze 9. Als ik nu ...van het geheel 4 aftrek, dan weet ik hoeveel het andere stuk is'. Wij merken hierbij op dat deze twee schemata, die sommige leerlingen *spontaan* aanwendden om problematische formule-opgaven te analyseren en op te lossen, identiek zijn aan twee van de drie schemata, die Heller & Greeno (1978; zie ook De Corte, 1980) onderscheiden bij de typering van elementaire redactie-opgaven, nl. het oorzaak/verandering-schema en het combinatie-schema. Van hieruit kunnen we tevens de verrassende bevinding van Lindvall & Ibarra (1978, p. 5) interpreteren, nl. dat slechts 25% van de door hen onderzochte eerstegraadsleerlingen moeilijke formule-opgaven van het type .–a=b juist oplossen, terwijl redactie-opgaven met dezelfde structuur in 56% van de gevallen correct beantwoord worden. Immers, een jonge, onervaren rekenaar kan veel vlugger en gemakkelijker het passende semantisch schema oproepen en de variabelen daarin inpassen bij een opgave die reeds in een verbaal kleedje zit, dan ten aanzien van een probleemopgave die enkel uit formele wiskundige symbolen bestaat. Hiermee sluiten we de voorstelling van het eerste oplossingsmodel af. Het resultaat van het denkend rekenproces volgens dit model is dat er een vertrouwde directe rekenopgave verschijnt, die klaar is om via een technisch rekenproces opgelost te worden volgens één van de methoden die door Van Eerde & Verhoef (1978) beschreven zijn.

Op grond van dezelfde inzichten in de opgave en haar constituerende elementen besluiten sommige leerlingen de indirecte opgave niet om te vormen tot een directe, maar als dusdanig naar het technisch rekenen door te sturen. Het oplossen van indirecte rekenopgaven volgens dit tweede model impliceert evenwel dat men beseft dat de technische rekenhandelingen voor directe opgaven zoals ze door Van Eerde & Verhoef (1978) beschreven worden, niet 'zomaar' mogen aangewend worden om indirecte opgaven uit te rekenen. Dienes (1970, p. 84) noemt de technische rekenhandelingen uitgevoerd op indirecte optellingen en aftrekkingen resp. 'addition et soustraction complémentaire' in tegenstelling tot de aftrek- en opteloperaties op directe opgaven die hij 'addition et soustraction pure' noemt. In het eerste geval is de opdracht die naar het technisch rekenen gestuurd wordt bijvoorbeeld niet 'hoeveel bekom ik door 2 en 6 op te tellen' maar wel 'hoeveel moet ik bij 2 tellen om 6 te bekomen'.

Dit tweede model ontdekten we tijdens de individuele sessies vooral bij de jongere en de zwakkere leerlingen. Dit ligt in de lijn van de bevindingen van Dienes (1970, p. 85) en Case (1978, p. 214). Deze auteurs beweren dat er een evolutie van het tweede naar het eerste model waar te nemen is. Die evolutie laat zich begrijpen vanuit de Piagetiaanse theorie. Het concept 'omkeerbaarheid van cognitieve structuren' neemt binnen deze theorie van de ontwikkeling van de intelligentie een centrale plaats in (Piaget, 1970, p. 21). Volgens deze theorie is het denken minder omkeerbaar naarmate het kind jonger is en dichter bij het perceptief– motorische stadium van zijn cognitieve ontwikkeling staat. Dit weerspiegelt zich in de ontwikkeling van het wiskundig denken, waar elke operatie een tegengestelde of inverse operatie heeft. Zo wordt de aftrekking de omgekeerde of inverse operatie van de optelling genoemd. Nog steeds volgens de theorie kan gesteld worden dat leerlingen die indirecte opgaven oplossen volgens het eerste model expliciet beroep doen op dit aspect van de intelligentie, terwijl degenen die opgaven oplossen volgens het tweede model, dit (nog) niet doen (Case, 1978, p. 214).

Volgens het derde model lost de leerling sommige enkelvoudige indirecte opgaven op volgens het eerste en andere volgens het tweede model. De keuze van de oplossingsweg wordt bepaald door de verhouding tussen de twee getallen die in de rekenopgave voorkomen. Dit model werd door Groen & Poll (1973) uitgewerkt en in empirisch onderzoek bevestigd voor de type-III-optellingen. Hoewel we in het vooronderzoek nauwelijks aanwijzingen gevonden hebben ten gunste van dit model gaan we er toch iets dieper op in. Volgens de genoemde auteurs lossen eersteklassertjes opgaven van het type a+.=b op volgens het eerste model wanneer a kleiner is dan b–a. Is a daarentegen groter dan b–a, dan verloopt het oplossingsproces volgens het tweede model. De opgave 2+ . =9 zou worden opgelost door ze eerst om te vormen tot 9–2= ., terwijl de opgave 7+ . =9 opgelost zou worden door rechtstreeks na te gaan met hoeveel zeven vermeerderd moet worden om negen te bekomen. We formuleren enkele bedenkingen bij dit aantrekkelijk model. Groen & Poll (1973) hebben, gebruik makend van de techniek van regressie-analyse, aangetoond dat op basis van dit model het best oplossingstijden voor opgaven van het type a+ . =b voorspeld kunnen worden. Graag hadden we andere gegevens, verkregen via meer kwalitatieve onderzoeksmethoden vermeld gezien, die de plausibiliteit van het model verhogen. Verrassend is tevens dat in hetzelfde onderzoek geen empirisch materiaal pleitte ten voordele van dit model ten aanzien van de type-IV-optellingen (Groen & Poll, 1973, p. 297). Onderzoeksgegevens van deze of andere auteurs omtrent het eventuele bestaan van een dergelijke oplossingsmethode bij type-III- of IV-aftrekkingen zijn ons niet bekend. Een cruciale vraag die door de onderzoekers niet beantwoord wordt is hoe de leerling beslist of hij een concrete opgave volgens het eerste of het tweede model moet oplossen, m.a.w. of hij ten aanzien van de opgave 2+ . =9 beter bijtelt tot 9 dan wel 9 met 2 vermindert. Het lijkt toch onwaarschijnlijk dat de leerling eerst nauwkeurig uitrekent of 9–2 al dan niet groter is dan 2, alvorens één van beide oplossingsmethoden effectief aan te wenden. Tenslotte merken we op dat bij deze auteurs helemaal geen sprake is van een hiërarchie met betrekking tot het eerste en het tweede model. Immers, of de leerlingen de eerste of de tweede methode aanwenden is afhankelijk van de aard van het opgavemateriaal en niet van de cognitieve ontwikkeling, aldus deze auteurs. Het zwak uitgewerkte theoretisch kader en meer in het bijzonder het feit dat het oplossingsproces van enkelvoudige rekenopgaven eenzijdig wordt omschreven als een 'counting process' is o.i. hieraan niet vreemd (zie Groen & Parkman, 1972, p. 330).

Tot nu toe hebben we de processen beschreven van leerlingen die enkelvoudige, indirecte opgaven als 'problematisch' ervaren. Voor heel wat leerlingen echter heeft het maken van dergelijke rekenopgaven niet het karakter van een probleemoplossingsproces. Voor hen zijn de diverse indirecte opgaventypes stuk voor stuk standaardopgaven, omdat ze voor elk type over een specifieke, pasklare oplossingsmethode beschikken. Het oplossingsproces van deze leerlingen kan als volgt beschreven worden. De leerlingen herkennen op basis van uiterlijke, vaak irrelevante kenmerken de concrete opgave als behorend tot een welbepaald type. Vervolgens diepen ze de daarmee geassocieerde specifieke oplossingsmethode op uit het geheugen en passen haar toe op de concrete opgaven. Bij veel leerlingen verloopt een dergelijke oplossingswijze 'blind', stereotiep, zonder dat ze bewust zijn van wat ze doen of enige afstand kunnen nemen van hun werkwijze. Mialaret (1967, p. 85) en Wolters (1978, p. 81) vinden hetzelfde terug bij sommige door hen onderzochte kinderen. Tijdens het individueel onderzoek loste een achtjarige de opgave 4+ . =9 op door deze onmiddellijk om te vormen tot 9−4= . . De opgave 9− . =1 transformeerde hij zonder aarzelen tot 9−1= . . Met de opgave . −7=5 wist hij evenwel geen raad. De oplossingsmethoden voor de eerste twee opgaven had hij blijkbaar onthouden. Met betrekking tot de derde opgave wist hij ons te vertellen 'dat de meester hem daarvoor nog geen trucje (!) geleerd had'. Dit contrasteert sterk met het oplossingsproces van een paar zeer knappe leerlingen, die weliswaar ook snel en zonder nadenken een bepaalde rekenoperatie uitkozen, doch deze keuze konden verantwoorden en het verband konden leggen tussen de onderscheiden concrete oplossingsmethoden. Bij die leerlingen waren de specifieke methoden gegroeid uit een oorspronkelijk uitvoerig, bewust en inzichtelijk oplossingsproces.

7.2. *Inadequate handelingsstructuren*

Vanuit de kwantitatieve foutenanalyse weten we dat heel wat fouten gemaakt worden bij indirecte rekenopgaven en in het bijzonder bij de type-IV-aftrekkingen. De drie inadequate handelingsstructuren, die we hieronder beschrijven, kunnen niet louter op basis van een analyse van de fouten ontdekt en onderscheiden worden. Daarvoor is een studie van de hardop-denk-verslagen nodig.

Fouten zoals $4+\underline{13}=9$, $17=\underline{30}+13$, $\underline{2}-7=5$, $10=\underline{9}-1$ en $\underline{7}-8=1$ worden soms gemaakt door leerlingen die de vertrouwde, gemakkelijke oplossingsmethoden voor de directe enkelvoudige opgaven zonder meer overdragen op de indirecte sommen. Zo worden type-IV-aftrekkingen, net zoals die van type I, opgelost door het grootste getal uit de opgave met het kleinste te verminderen. Een eersteklasser die heel wat van de hiervoor vermelde opgaven foutief oploste, motiveerde aldus zijn antwoord voor de opgave 2−7=5: 'Je ziet toch dat er een min-teken staat! Dan moet je toch aftrekken!'.

Andere leerlingen maken weliswaar onderscheid tussen directe en indirecte opgaven en de bijhorende oplossingswegen, doch verwarren de niet-inzichtelijk verworven oplossingsmethoden voor de onderscheiden indirecte enkelvoudige opgaven. Dit komt doordat de associaties tussen de oplossingswegen en de opgaventypes bij hen niet geleidelijk en op een inzichtelijke manier werden gevormd. Een sterk staaltje hiervan vinden we bij een tweedeklasser die zijn oplossingen $\underline{7}-8=1$ en $12-\underline{17}=5$ als volgt verantwoordde: 'De meester heeft gezegd dat je zulke oefeningen op deze manier moet oplossen', waarmee hij resp. verwees naar het aftrekken bij type-IV-opgaven en het optellen bij type-III-opgaven. Hij had verkeerd gegokt...

Een derde foutentype komt slechts voor bij aftrekkingen van het type a=b− . en a= .−b. In het laatste geval moet b bovendien groter zijn dan a. Dergelijke opgaven, zoals 4= .−9 en 4=15− . worden vaak foutief beantwoord omdat de oplosser de opgave van rechts naar links leest, representeert en oplost, daartoe aangezet door de plaats van het is-gelijk-aan-teken. We geven het hardop-denk-verslag van een tweedeklasser bij de opgave 4= .−9: 'Negen min punt is vier... als ik negen met vier verminder, dan weet ik hoeveel op de plaats van het puntje moet staan. Negen min vier is... vijf. Dus $4=\underline{5}-9$'.

Na de beschrijving van de fouten op de indirecte enkelvoudige rekenopgaven en de manier waarop ze tot stand komen, gaan we op zoek naar de dieper liggende oorzaken van het slechte presteren op de vermelde opgaventypes. In de literatuur hebben we drie verklaringen gevonden voor de moeilijkheden die de leerlingen ondervinden bij het denkend rekenen ten aanzien van indirecte rekenopgaven.

Vooreerst kan nogmaals verwezen worden naar de Piagetiaanse opvatting, die stelt dat bij kinderen die veel fouten maken op indirecte opgaven er nog geen notie van reversibiliteit aanwezig is, omdat ze het vereiste cognitieve stadium nog niet bereikt hebben. Met betrekking tot deze verklaring kan vooreerst opgemerkt worden, dat er voor deze opgaven ook oplossingswegen beschreven zijn waarbij geen gebruik gemaakt moet worden van de z.g. inverse rekenoperatie (zie het tweede model in 7.1.). Tevens werd in talrijke onderzoekingen aangetoond dat kinderen – althans bij stimulerend onderwijs – allerlei taken en problemen aankunnen die volgens Piaget op hun leeftijd onoplosbaar zijn (Van Parreren & Van Loon-Vervoorn, 1975, p. 22).

Een tweede meer orthopedagogische benadering tracht de talrijke fouten op de indirecte opgaven te verklaren vanuit stoornissen bij slechte oplossers. Borghouts (1976, p. 216) wijst erop dat sommige kinderen niet in staat zijn de samenhang tussen de elementen van een som te vatten en dus aangewezen zijn op willekeurige, oppervlakkige associaties. Deze kinderen zijn gestoord op het vlak van het denkend rekenen, aldus de auteur. Ook dit verklaringsmodel bevredigt ons niet en wel om twee redenen. Ten eerste, wanneer zoveel leerlingen fouten maken op indirecte rekenopgaven, dan dient men in de eerste plaats de betreffende onderwijsleersituatie kritisch te evalueren en te veranderen, eerder dan dit probleem 'orthopedagogisch' te benaderen. Een tweede argument ontlenen we aan Nelissen c.s. (1978, p. 418). Deze auteurs zoeken in een benadering als deze van Borghouts tevergeefs naar een procesmatige, dynamische opvatting van de intelligentie. Het lijkt hen derhalve op zijn minst vruchtbaarder om ernstige tekortkomingen bij leerlingen niet in de eerste plaats op te vatten als gevolgen van deficiënties in het systeem van potenties, maar als gevolgen van tekorten in de procesmatige, door het onderwijs gestuurde opbouw ervan.

Een derde manier om de talrijke fouten en de aard ervan te verklaren sluit aan bij deze argumentatie van Nelissen c.s. We vinden dit model bij onderzoekers die deze fouten niet in de eerste plaats wijten aan de jonge leeftijd of aan stoornissen bij de kinderen, maar aan het gebrekkige onderwijs (Atachanov, 1970). Volgens hen ligt de oorzaak van de vele fouten vooral hierin dat aan de leerlingen hoofdzakelijk een aantal specifieke, geïsoleerde oplossingsmethoden worden aangeleerd. Wij sluiten hier bij aan. Er zouden veel minder fouten gemaakt worden indien de leerlingen: a. van meetaf aan georiënteerd worden op de algemene mathematische relaties die belangrijk zijn voor directe én indirecte rekenopgaven zoals de gelijkheids- en de deel-geheel-relatie; b. hen aangeleerd wordt deze aan te wenden tijdens een moment van probleemanalyse alvorens aan het tellen te slaan. In een volgend artikel zullen we deze hypothese, die meteen het uitgangspunt vormt van de experimentele leergang, verder uitwerken en verantwoorden.

8. *Kwalitatieve analyse van het technisch rekenen bij indirecte rekenopgaven*

Op het einde van de fase van het denkend rekenen besluit de leerling tot het uitvoeren van een welbepaalde rekenoperatie; de uitvoering zelf gebeurt in de fase van het technisch rekenen. Natuurlijk verloopt het technisch rekenen anders bij een leerling die besloten heeft om de indirecte opgave om te vormen tot een directe dan bij een andere die de indirecte opgave als dusdanig wenst uit te rekenen (zie resp. het eerste en het tweede model in 7.1.). Het technisch rekenproces van de leerling die de indirecte opgave transformeert tot een directe opgave, verloopt wederom volgens de processen die door Van Eerde & Verhoef (1978) uitvoerig beschreven zijn. De leerling die de indirecte opgave niet omvormt, voert evenwel andere technische rekenhandelingen uit. Het zijn deze handelingen die hier besproken worden. We beperken ons tot de uitvoerige telhandelingen, omdat aan de hand daarvan het onderscheid tussen het technisch rekenen bij de vier onderscheiden indirecte opgaventypes onderling én tussen de indirecte en de directe opgaven het best tot uiting komt.

8.1. *Adequate handelingsstructuren*

Achtereenvolgens worden de technische rekenhandelingen ten aanzien van de opgaventypes a+ .=b, .+a=b, a− .=b en .−a=b besproken.

In het uitvoerig technisch rekenproces bij opgaven van het type a+ .=b onderscheiden we de volgende stappen:

(a) De leerling neemt het eerste getal als basisgetal.
(b) Hij begint vanaf dit getal bij te tellen en tegelijk duidt hij het aantal keren dat hij het basisgetal met één vermeerdert aan door middel van zijn vingers, streepjes, stokjes, ...
(c) Hij stopt met bijtellen wanneer het tweede getal uit de opgave bereikt is.
(d) Hij telt het aantal keren dat bijgeteld werd, m.a.w. het aantal vingers, streepjes, stokjes, ...
(e) Hij schrijft dit aantal neer als uitkomst van de rekenopgave.

We verduidelijken deze werkwijze aan de hand van een voorbeeld. Steven loste de opgave 4+ .=9 op door na de analyse vanaf 4 bij te tellen totdat 9 bereikt was, nl. 5, 6, 7, 8, 9. Telkens als er één werd bijgeteld, stak hij een vinger op. Wanneer 9 bereikt was, telde hij het aantal opgestoken vingers, nl. 1, 2, 3, 4, 5, en gaf 5 als uitkomst van de opgave.

De leerling die besloten heeft een opgave van het type .+a=b op te lossen zonder er een type-I-opgave van te maken, kan twee richtingen uit. In het eerste geval maakt hij gebruik van de commutatieve eigenschap van de optelling om een transformatie op het opgavemateriaal uit te voeren, nl. van .+a=b naar a+ .=b. Wanneer dit éénmaal gebeurd is, verloopt het oplossingsproces zoals hierboven. Wij wijzen er evenwel op dat deze werkwijze door weinig leerlingen toegepast werd. Blijkbaar hebben 6 à 8-jarigen er meer moeite mee om doeltreffend gebruik te maken van de commutatieve eigenschap bij opgaven van het type .+a=b dan bij type-I-opgaven waarvan beide om te wisselen termen gekend zijn. Wederom rijst de vraag of dit aan het gebrekkig abstractievermogen van jonge kinderen dan wel aan tekortkomingen of eenzijdigheden in de huidige rekendidactiek te wijten is. Wanneer van de commutativiteit geen gebruik gemaakt wordt, kan de hiervoor beschreven oplossingsweg niet meer gevolgd worden. Immers, de leerling beschikt niet over een basisgetal waarvan met bijtellen begonnen kan worden. Hoe vindt de leerling dan wel de oplossing van dergelijke indirecte opgaven? Suppes (1967, p. 227) omschrijft het oplossingsproces als volgt: 'For problems of the form x+a=b the child may, without being explicitly conscious of it, make rough estimates of x and test the guess by counting'. Ter illustratie geven we het technisch rekenproces van een eersteklasser bij de opgave 17= .+13. Eerst 'probeerde' hij met 6. Hij rekende 6+13 uit en bekwam 19. Op basis van dit resultaat besloot hij 5+13 uit te rekenen. Hij vond 18. Onmiddellijk daarop gaf hij de juiste oplossing van de rekenopgave, nl. 4. Hij zei: 'Als ik 5 invul, is de uitkomst nog te groot, nl. 18 in plaats van 17. Dus moet ik het getal invullen dat één kleiner is dan 5'.

Wanner het type-III-aftrekkingen niet omgevormd worden tot directe opgaven worden ze opgelost zoals de type-III-optellingen, behalve dat er nu afgeteld in plaats van bijgeteld wordt. We verduidelijken dit aan de hand van het oplossingsproces van een eersteklasser bij de opgave 12− .=5. Hij telde van 12 af tot hij 5 bereikt had. Telkens als er één werd afgeteld, stak hij een vinger op. Wanneer 5 bereikt was, telde hij de opgestoken vingers, nl. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 en gaf het laatst uitgesproken telwoord als uitkomst van de rekenopgave.

We hebben beschreven hoe type-IV-optellingen op twee manieren kunnen opgelost worden. Bij de aftrekkingen van het type .−a=b blijft de leerling slechts één oplossingsweg open, gezien de niet-commutativiteit van de aftrekking. Dit betekent dat voor de leerling, die de type-IV-aftrekking correct heeft geanalyseerd en niet besloten heeft om ze om te vormen tot een directe som, slechts de omslachtige strategie van het 'verstandig uitproberen' overblijft. Deze methode stelt bovendien grote eisen aan het werkgeheugen van de leerling. Ze verloopt analoog aan het oplossingsproces van de type-IV-optellingen door leerlingen die geen beroep doen op de commutatieve eigenschap. We vermelden het oplossingsgedrag van een tweedeklasser die de opgave .−7=5 volgens dit model aanpakte. Hij begon met 15 in te vullen. Hij rekende vervolgens de directe opgave die aldus ontstond snel uit: 15−7=8. Op basis van dit resultaat verminderde hij het basisgetal met 2 en loste de nieuwe directe aftrekking op, nl.

$13-7=\underline{6}$. Daarop koos hij 12 als oplossing en vond dat 12 min 7 inderdaad 5 opleverde.

8.2. *Inadequate handelingsstructuren*

We stelden twee typische fouten vast bij het technisch uitrekenen van indirecte rekenopgaven. In vergelijking met fouten op het vlak van het denkend rekenen, kwamen ze evenwel eerder zeldzaam voor.

De z.g. startfout ontstaat doordat de leerling bij het bijtellen of aftellen begint met het noemen van het basisgetal in plaats van het telwoord dat één groter resp. kleiner is dan het basisgetal. De uitkomst ligt dan ook resp. één hoger en één lager dan de juiste uitkomst. Tijdens een individuele sessie gaf Peter de volgende oplossing: $17=\underline{5}+13$. Dit was zijn technisch rekenproces: 'Ik moet vanaf 13 bijtellen tot ik 17 bekom. Dat wordt 13, 14, 15, 16, 17 . . . dus, 1, 2, 3, 4, 5. De uitkomst is 5'. Een analoog inadequaat denkproces gaf bij dezelfde leerling aanleiding tot $5=14-\underline{10}$.

Een tweede type technische rekenfouten bij indirecte rekenopgaven kunnen we aan de hand van onderstaande voorbeelden illustreren: $\underline{6}+3=6$, $17=\underline{17}+13$, $5=14-\underline{5}$ en $15-\underline{7}=7$. Gemeenschappelijk aan al deze fouten is dat de som of het verschil van de optelling resp. aftrekking ook ingevuld wordt op de plaats van het puntje. In het eerste voorbeeld wordt de som van de bekende en de onbekende term, nl. 6, ook als oplossing voor de opgave gegeven. Case (1978, p. 215) beweert dat dergelijke fouten enkel door zeer jonge of zeer zwakke rekenaars gemaakt worden. Hij meent dat de leerling in dit geval, omdat hij helemaal geen inzicht heeft in de structuur van de opgave, eenvoudigweg één van de twee getallen die reeds in de opgave staan overneemt als oplossing voor de opgave. In dit geval zou het om een zeer primaire, inadequate handeling op het vlak van het denkend rekenen gaan. Wij sluiten de mogelijkheid niet uit dat fouten zoals $6+3=6$ tot stand kunnen komen zoals door Case beschreven wordt, doch wij hebben een andere, plausibele interpretatie die door empirische gegevens ondersteund wordt. Volgens deze verklaring zijn de opeenvolgende stappen die tot deze fouten leiden voor opgaven van het type $a+.=b$ de volgende:

(a) De leerling stelt het kleinste getal als basisgetal.
(b) Hij begint vanaf dit getal bij te tellen en hij duidt tegelijk het aantal keren aan dat het basisgetal met één vermeerderd wordt.
(c) Hij stopt met bijtellen wanneer het grootste getal uit de opgave bereikt is.
(d) Hij schrijft als uitkomst het laatst uitgesproken telwoord neer.

Volgend voorbeeld illustreert deze werkwijze die pas bij stap (d) verkeerd loopt. Om de opgave $17=13+.$ op te lossen telde Hilde vanaf 13 bij tot 17, nl. 14, 15, 16, 17 terwijl ze telkens één vinger opstak. Éénmaal 17 bereikt schreef ze dit getal neer als oplossing van de opgave in plaats van het aantal opgestoken vingers te tellen. Het is alsof de leerling ook hier, op het einde van het technisch rekenproces, de werkwijze voor het uitrekenen van directe operaties overdraagt op de indirecte.

9. *Kwalitatieve analyse van de controlehandelingen bij indirecte opgaven*

Tijdens het onderzoek controleerden weinig leerlingen spontaan de gevonden oplossing van indirecte rekenopgaven. Slechts in enkele gevallen gebeurde dit bewust en expliciet. Wij geven de opeenvolgende stappen die we in de controlehandeling onderscheiden hebben.

(a) De leerling schrijft de voorlopige oplossing van de directe opgave neer waar het puntje staat.
(b) Hij maakt van de opgeloste indirecte opgave een directe opgave door de som of het verschil te 'bedekken'.
(c) Hij lost de vertrouwde type-I-opgave op.
(d) Hij vergelijkt de uitkomst ervan met het getal dat 'bedekt' werd.
(e) Naar gelang het resultaat van deze confrontatie schrijft de leerling de voorlopige oplossing neer als definitieve uitkomst of keert hij terug naar het denkend of technisch rekenen.

Of alleen maar naar het technisch rekenen of tevens naar het denkend rekenen moet teruggekeerd worden is iets wat door de leerlingen als het ware intuïtief wordt aangevoeld. Ter illustratie geven we de controlehandeling van een tweedeklasser, die de opgave $3+.=9$ met 12 beantwoord had: 'Wacht eens, dat kan niet want 3 plus 12 is toch 15. Ik heb 9 en 3 opgeteld en ik moet ze aftrekken'. Natuurlijk kan dan pas snel en efficiënt van deze controlehandelingen gebruik gemaakt worden, wanneer het oplossen van directe enkelvoudige opgaven probleemloos verloopt. Is dit niet het geval, dan is deze werkwijze niet alleen uiterst tijdrovend maar bovendien niet zonder risico.

Tenslotte wijzen we erop dat in het technisch rekenen bij type-IV-aftrekkingen en -optellingen (wanneer de commutatieve eigenschap niet wordt aangewend) de controlehandeling als het ware is ingebouwd. Het oplossingsproces van deze opgaven is immers in wezen niets anders dan het steeds opnieuw uitvoeren van de controlehandeling op het 'geraden' antwoord, waardoor de juiste oplossing geleidelijk benaderd en gevonden wordt (zie 8.2.).

10. *Conclusies*

Het constaterend onderzoek over het oplossen van aanvankelijke rekenopgaven heeft ons vooreerst geleerd dat de onderzochte 6 à 8-jarigen relatief veel fouten maken op opgaven die tot minder vertrouwde types behoren, met name de type-II-opgaven en de type-IV-aftrekkingen. Sommige relatief ongewone indirecte complexe opgaven (bijvoorbeeld .−4−5=3), die we in dit artikel niet besproken hebben, werden door minder dan de helft van de leerlingen correct opgelost (Verschaffel, 1979, p. 45 e.v.). Belangrijk is hierbij op te merken dat meerdere leerkrachten van de onderzochte klassen een onjuist zicht hadden op de moeilijkheidsgraad van bepaalde opgaventypes en op de algemene rekenvorderingen van hun leerlingen. Op het feit dat geen enkele leerkracht zoveel fouten op de type-II-opgaven verwacht had, hebben we reeds gewezen. Wat de globale rekenvorderingen betreft, bijna alle onderwijzers en onderwijzeressen voorspelden een gemiddelde totaaluitslag die aanmerkelijk hoger was dan het feitelijke resultaat. Dienes (1970, p. 18) schrijft hieromtrent: 'Il est très facile pour le maître d'avoir l'impression qu'un élève a compris alors, qu'en fait il n'a pas compris. Tous les enfants apprennent vite les réponses types aux questions types, donnant alors l'impression d'avoir assimilé les concepts. Posezleur une question moins habituelle et vous aurez un tableau tout différent. En fait, il est probable que l'étendue de la compréhension des concepts mathématiques est encore inférieure à ce qui semble à première vue.'

Uit de kwalitatieve analyse van de oplossingsprocessen is gebleken dat het oplossingsgedrag van de leerlingen zich meestal beperkt tot het identificeren van een opgave als behorend tot een welbepaalde soort (al of niet juist), het opdiepen uit het geheugen van de daarmee geassocieerde oplossingsweg en het toepassen ervan. Wanneer de leerlingen evenwel in een opgave niet onmiddellijk een standaardopgave herkennen, slagen ze er veelal niet in deze probleemopgave op een verstandige, planmatige manier aan te pakken en tot een goed einde te brengen.

Wij hebben tekortkomingen binnen de vigerende rekendidactiek – eerder dan deficiënties inherent aan het kinderlijke denken van de leerlingen – verantwoordelijk gesteld voor deze fenomenen. We stelden vast dat de meeste onderzochte leerlingen, ondanks minstens één jaar intensief rekenonderwijs, niet over een volledige oriënteringsbasis beschikten om de opgaven uit de toetsen op te lossen. Wij hebben hier een oriënteringsbasis van het derde type voor ogen (Van Parreren & Carpay, 1972, p. 42; De Leeuw, 1979, p. 18). Deze stelt de leerling niet zonder meer in staat bepaalde opgaventypes met kant-en-klare oplossingsmethodes aan te pakken. Wel houdt ze hem een bepaalde wijze van analyseren van het opgavenmateriaal voor, waardoor hij zelf voor specifieke problemen een volledige oriënteringsbasis kan opbouwen. Wat het denktechnisch aspect van deze oriënteringsbasis betreft, stelden we vast dat slechts enkele leerlingen waardevolle probleemanalysetechnieken, zoals het maken van een schema, aanwenden of spontaan de controleheuristiek uitvoeren bij opgaven die voor hen een probleem vertegenwoordigen. Met betrekking tot de denkinhouden wijzen we op het gebrekkig begrip bij de onderzochte groep leerlingen van fundamentele mathematische relaties zoals gelijkheid en de deel-geheel-relatie, die tijdens de fase van de probleemanalyse en de controle achteraf gebruikt kunnen worden.

Tot slot vermelden we enkele tekortkomingen of eenzijdigheden van het traditioneel rekenonderwijs, die o.i. voor deze onvolledige oriënteringsbasis en de daaruit voortvloeiende slechte prestaties verantwoordelijk zijn.

Ondanks de vernieuwingen van het wiskunde-onderwijs wordt in de praktijk nog steeds meer tijd en energie besteed aan de rekentechnische component dan aan het denkend rekenen. Vele onderwijzers laten de leerlingen nog steeds eindeloze rijen rekensommen oplossen, waarin zeer weinig variatie steekt met betrekking tot de structuurkenmerken die wij in paragraaf 3 onderscheiden hebben (zie ook Streefland, 1980). Het aanbieden van dergelijke opgavenreeksen leidt er weliswaar toe dat de leerlingen steeds sneller en efficiënter een aantal rekentechnieken kunnen hanteren met steeds grotere getallen, doch dit verschaft hun geen dieper inzicht in het systeem van kwantitatieve relaties dat de wiskunde is. Dit blijkt vooreerst uit de verhouding tussen de fouten op het vlak van het denken en van het technisch rekenen. Illustratief voor deze stelling is tevens dat de tweedeklassers nauwelijks betere toetsuitslagen behaalden dan de eersteklassers.

Een tweede vaststelling is dat de leerkrachten zich nog steeds voornamelijk oriënteren op de uiterlijke prestaties van de leerlingen en de onderliggende denkprocessen veronachtzamen. M.a.w. de gerichtheid op het handelen van de leerlingen is wellicht bij vele leerkrachten niet aanwezig. Dit impliceert dat deze leerkrachten ook geen zicht hebben op de nieuwe, vaak efficiëntere oplossingsmethodes en begripsschema's die sommige leerlingen uitgaande van de aangeleerde methoden en begrippen zelfstandig ontdekken en construeren. Zo waren slechts enkele leerkrachten bekend met bepaalde verkortingen die door hun leerlingen bij het technisch rekenen aangewend werden en meer dan één onderwijzer(es) had nog nooit gehoord van de methode van het 'verstandig uitproberen' die we in paragraaf 8.1. voorstelden. Dat dergelijke 'inventies' bij leerlingen voorkomen, heeft ook Resnick (1976) empirisch vastgesteld; deze inventies hebben vaak het karakter van verkortingen (Van Parreren, 1978). Leerkrachten die niet gevoelig zijn voor deze fenomenen, zullen een aantal kansen tot het doen optreden van zulke inventies mislopen en er tevens niet in slagen eventuele spontane, inadequate inventies op te sporen en bij te sturen.

Tenslotte wijzen we erop dat sommige leerkrachten de leerlingen bewust met een aantal specifieke, geïsoleerde, niet-inzichtelijke oplossingsmethoden uitrusten, omdat zij daarvan onmiddellijke resultaten verwachten (zie Freudenthal, 1979, p. 23). Zij bezorgen de leerlingen een aantal z.g. trucjes voor de diverse opgaventypes. Zo verzekerde een onderwijzer ons dat zijn leerlingen enkel de opgaven van het type $. - a = b$ slecht zouden oplossen 'omdat ze dit soort oefeningen nog niet geleerd hadden'. Uit een dergelijke aanpak spreekt de opvatting dat het leren oplossen van rekenopgaven een doel-op-zich is; tegelijk maakt men daartoe echt wiskundig probleemoplossend denken onmogelijk en opent men geen kansen voor de cognitieve ontwikkeling in het algemeen.

In dit artikel hebben we beschreven hoe een groep eerste- en tweedeklassers aanvankelijke rekenopgaven oplost en welke moeilijkheden ze daarbij ondervinden. Onze analyse van deze moeilijkheden in termen van een onvolledige oriëntatie op de vereiste denkinhouden en denktechnieken, vormde het rechtstreekse uitgangspunt van de experimentele leergang, die in een volgend artikel uitvoerig besproken wordt en waarmee we hoopten het oplossingsgedrag van de leerlingen te optimaliseren en hun cognitieve ontwikkeling vooruit te helpen.

Noten

1. Een taakleraar is een onderwijzer die remediërend optreedt ten aanzien van leerlingen die om één of andere reden een achterstand opgelopen hebben in het leerproces of ten aanzien van kinderen met partiële leermoeilijkheden die niet van die aard zijn dat ze een overgang van het gewoon naar het buitengewoon lager onderwijs rechtvaardigen.
2. Waarom we deze fout een technische rekenfout noemen en hoe ze tot stand komt, wordt in 8.2. beschreven.
3. Om de uitslagen op de onderscheiden opgaventypes vlot te kunnen interpreteren en onderling te kunnen vergelijken, hebben we voor de procentuele weergave geopteerd. De absolute waarden kunnen desgewenst bij de auteurs verkregen worden.

Literatuur

Anderson, R. C., Schema-directed processes in language comprehension, in: A. M. Lesgold, J. W. Pellegrino, S. D. Fokkema & R. Glaser (Eds), *cognitive psychology and instruction*. New York, Plenum Press, 1978, p. 67-82.

Atachanov, A. R., Over de relatie tussen kennis en cognitieve ontwikkeling bij 7 à 8-jarige kinderen, in: *Onderwijs aan en ontwikkeling van jongere leerlingen*. Kiev, 1970, (uit het Russisch vertaald door A. Pellegrom, I.P.A.W., R.U. Utrecht).

Borghouts van Erp, J. W. M., Rekenstoornissen. Een pleidooi voor visie, *Tijdschrift voor Orthopedagogiek*, 1976 (6) 215-228.

Campbell, D. T. & J. C. Stanley, Experimental and quasi-experimental designs for research on teaching, in: N. L. Gage (Ed.), *Handbook of research on teaching*. Chicago, Rand McNally, 1963, p. 171-246.

Case, R., *A developmental classroom task. Finding the sum or addend in substraction*. (Mimeo.) Berkeley, University of California, 1977.

Case, R., Piaget and beyond: toward a developmentally based theory and technology of instruction, in: R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology. Vol. I.* Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum, 1978, p. 167-228.

Case, R., Implications of developmental psychology for the design of effective instruction, in: A. M. Lesgold, J. W. Pellegrino, S. D. Fokkema & R. Glaser (Eds), *Cognitive psychology and instruction*. New York, Plenum Press, 1978a, p. 441-463.

Corte, E. De, Objecten, doelen en methodologie van de onderwijspsychologie. *Tijdschrift voor Onderwijsresearch*, 1979 (4) 209-218.

Corte, E. De, Cognitieve psychologie en onderzoek van onderwijsleerprocessen in de Verenigde Staten, in: *Liber Amicorum Prof. Dr. J. Nuttin*, Leuven, Universitaire Pers Leuven, 1980 (ter perse).

Dienes, Z. P., *Construction des mathématiques*. (l'Éducateur, n° 6) Paris, Presses Universitaires de France, 1971², 1966¹, 266 pp. Franse vertaling door G. Walunsinski van: Building up mathematics. London, Hutchinson Educational, 1970⁴.

Dumont, J. J., J. H. M. Hamers & J. J. M. Ruijssenaars, Rekenstoornissen. De samenhang van technisch en begrijpend rekenen met enkele psychologische vaardigheden, *Pedagogische Studiën*, 1977 (54) 386-397.

Eerde, D. van & L. Verhoef, Analyse van het optellen en aftrekken in de basisschool, *Pedagogische Studiën*, 1978 (55) 354-367.

Freudenthal, H., Lessen van Sovjet rekenonderwijskunde, *Pedagogische Studiën*, 1979 (56) 17-24.

Groen, G. J. & J. M. Parkman, A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review*, 1972 (79) 329-343.

Groen, G. J. & M. Poll, Substraction and the solution of open sentence problems, *Journal of experimental Child Psychology*, 1973 (16) 292-302.

Heller, J. I. & J. G. Greeno, *Semantic processing of arithmetic word problem solving*. Paper presented at the meeting of the Midwestern Psychological Association, Chicago, May 1978.

Kalmykova, Z. I., Methods of scientific research in the psychology of instruction, in: E. Stones (Ed.), *Readings in educational psychology. Learning and teaching*. London, Methuen, 1970, p. 125-142.

Leeuw, L. de, *Leren probleemoplossen: onderzoek naar het effect van het aanleren van algorithmische en heuristische oplossingsmethoden mede in verband met persoonskenmerken*. Lisse, Swets & Zeitlinger, 1979.

Lindvall, C. M. & C. G. Ibarra, *An analysis of incorrect procedures used by primary grade pupils in solving open addition and substraction sentences*. Pittsburgh, Learning Research and Development Center, University of Pittsburgh, 1978.

Mialaret, G., *l'Apprentissage des mathématiques. Essai de psycho-pédagogie*. (Psychologie et sciences humaines.) Bruxelles, Charles Dessart, 1967.

Mikulina, G. G., Algebraïsering van het aanvankelijk wiskunde-onderwijs en het denkniveau van de leerlingen, in: V. V. Davydov (Eds), *De psychologische mogelijkheden van leerlingen van de basisschool bij het onderricht in de wiskunde*. Moskou, 1969. (Uit het Russisch vertaald door Z. Nelissen & M. A. D. Wolters, I.P.A.W., R.U. Utrecht).

Nelissen, J., N. Verloop en M. Zwarts, Intelligentie en rekenen. Pleidooi voor een meer procesmatige benadering van het intelligentiebegrip, *Pedagogische Studiën*, 1978 (55) 413-426.

Parreren, C. F. van, & J. A. M. Carpay (Eds), *Sovjetpsychologen aan het woord*. (Leerpsychologie en onderwijs, 2). Groningen, Wolters-Noordhoff, 1972.

Parreren, C. F. van, Leren denken: een analyse van het leerresultaat, *Tijdschrift voor Opvoedkunde*, 1974-75 (20) 100-114.

Parreren, C. F. van, A building block model of cognitive learning, in: A. M. Lesgold, J. W. Pellegrino, S. D. Fokkema & R. Glaser (Eds), *Cognitive psychology and instruction*.
New York, Plenum Press, 1978, p. 1-12.

Parreren, C. F. van, Onderzoek van de cognitieve ontwikkeling in de Sovjetunie, in W. Koops & J. J. van der Werff (Eds), *Overzicht van de ontwikkelingspsychologie*. Groningen, Wolters-Noordhoff, 1979, p. 195-214.

Piaget, J., *De psychologie van de intelligentie*. (Academische paperbacks.) Amsterdam, De Bussy, 1970, 178 pp. Nederlandse vertaling door J. A. Meijers van: *La psychologie de l'intelligence*. Paris, Armand Colin, 1947.

Raets, K., *Rekentaken 1*. Antwerpen, Plantyn, 1977 (15de druk).

Resnick, L. B., Task Analysis in Instructional Design: Some Cases from Mathematics, in: D. Klahr (Ed.), *Cognition and instruction*. Hillsdale, N.J., Lawrence Erlbaum Associates, 1976, p. 51-80.

Snow, R. E., Individual differences and instructional theory. *Educational Researcher*, 1977 (6) n° 10, 11-15.

Streefland, L., Cognitieve ontwikkeling en wiskunde-onderwijs, *Pedagogische Studiën*, 1980 (57) 7-8.

Suppes, P., The psychological foundations of mathematics, in: *Les modèles et la formalisation du comportement*. Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, 1967, p. 213-242.

Verschaffel, L., *Kwalitatief-psychologische analyse en beïnvloeding van het probleemoplossend denken. Een onderzoek met elementaire rekenopgaven bij zes- à achtjarige kinderen*. (Niet-gepubliceerde licentiaatsverhandeling.) Leuven, Faculteit der Psychologie en Pedagogische Wetenschappen, 1978.

Wolters, M. A. D., *Het oplossen van mathematische problemen op de basisschool geanalyseerd en onderzocht vanuit ontwikkelingspsychologisch perspectief*. (Project Redactiesommen. Interimrapport IV.) Utrecht, Rijksuniversiteit Utrecht, I.P.A.W., Vakgroep Ontwikkelingspsychologie, 1977.

Wolters, M. A. D., *Van rekenen naar algebra. Een ontwikkelingspsychologische analyse*. (Doctoraatsproefschrift.) Utrecht, Rijksuniversiteit Utrecht, 1978.

Curricula vitae

E. De Corte (1941), doctor in de pedagogische wetenschappen (1970), gewoon hoogleraar aan de K.U. Leuven in het Departement Pedagogische Wetenschappen, Afdeling Didactiek en Psychopedagogiek met als voornaamste onderwijsopdrachten pedagogische psychologie (bij pedagogiek- en psychologiestudenten) en didactiek (in de lerarenopleiding).

Adres: Pedagogisch Instituut, Vesaliusstraat 2, B-3000 Leuven.

L. Verschaffel (1957) behaalde in 1979 het diploma van licentiaat in de pedagogische wetenschappen aan de K.U. Leuven; sedertdien aspirant-navorser van het Belgisch Nationaal Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek; bereidt aan de Afdeling Didactiek en Psychopedagogiek een doctoraat voor over (leren) probleemoplossend denken bij kinderen.

Adres: Pedagogisch Instituut, Vesaliusstraat 2, B-3000 Leuven.