Een exploratief onderwijsexperiment met aanvankelijke rekenopgaven bij 6 à 8-jarige kinderen

E. DE CORTE & L. VERSCHAFFEL (aspirant N.F.W.O.)
Afdeling Didactiek en Psychopedagogiek, K.U. Leuven

Samenvatting

In een voorgaand artikel (De Corte & Verschaffel, 1980) hebben we beschreven hoe leerlingen die traditioneel rekenonderwijs gekregen hebben, aanvankelijke rekenopgaven oplossen. In onderhavige bijdrage stellen we het exploratief onderwijsexperiment voor dat in september 1978 in het tweede leerjaar van een basisschool uitgevoerd werd. Dit construerend onderzoek is opgezet volgens het voortoets-natoets-design met controlegroep (Campbell & Stanley, 1963). Gedurende meer dan twee weken werd door een onderzoeker dagelijks wiskunde-onderwijs gegeven volgens vooraf opgestelde principes. Gepoogd werd de vastgestelde moeilijkheden bij het oplossen van de bestudeerde aanvankelijke rekenopgaven weg te werken door de leerlingen uit te rusten met volwaardige begrippenschema's (gelijkheid en de deel-geheel-relatie) en een wendbaar denktechnisch apparaat (probleemanalyse-technieken en controleheuristieken). Naderhand bleek dat de leerlingen uit de experimentele klas beter de betreffende én andere, structureel verwante problemen oplosten dan leerlingen die het experimenteel onderwijs niet gevolgd hadden.

1. *Doelstellingen van het onderwijsexperiment*

In het voorgaande artikel (De Corte & Verschaffel, 1980) werd verslag uitgebracht van een constaterende, kwalitatief-psychologische analyse van het oplossen van aanvankelijke rekenopgaven bij 6- à 8-jarige leerlingen die traditioneel onderwijs gekregen hebben. In het onderhavige artikel wordt een daarbij aansluitend exploratief construerend onderzoek gerapporteerd. We hebben immers gepoogd om op grond van de inzichten en ervaringen opgedaan tijdens het constaterend onderzoek, zelf actief het oplossingsgedrag van een groep leerlingen te beïnvloeden, c.q. te bevorderen. Daarmee hadden we een drievoudig doel.

Over de mogelijkheid en de wenselijkheid om jonge kinderen indirecte rekenopgaven te leren oplossen vindt men in de literatuur uiteenlopende opvattingen. Sommige onderzoekers en praktijkmensen wijten het grote aantal fouten dat ondanks het intensieve en vernieuwde rekenonderwijs bij dergelijke opgaven gemaakt wordt, aan het ontwikkelingsniveau van de betreffende groep leerlingen; hun denken zou met name nog gekenmerkt zijn door irreversibiliteit. Daaruit volgt het voorstel om te wachten met het aanleren van indirecte opgaven totdat de leerlingen het vereiste ontwikkelingsniveau hebben bereikt. Anderen zetten zich af tegen deze Piagetiaanse houding en beweren dat niet de jonge leeftijd van de leerlingen, maar wel belangrijke tekortkomingen in de huidige rekendidactiek verantwoordelijk zijn voor de slechte resultaten die bij het leren oplossen van indirecte opgaven worden bereikt (Atachanov, 1969, p. 3). De vraag die wij ten aanzien van deze problematiek gesteld hebben sluit aan bij deze tweede opvatting en luidt als volgt: kunnen we door middel van onderwijs, waarin aandacht besteed wordt aan de vereiste handelingsstructuren zowel van vakinhoudelijke als van denktechnische aard, 6 à 8-jarige kinderen leren deze rekenopgaven op een verstandige, planmatige wijze aan te pakken en tot een goed einde te brengen.

Op de tweede plaats wilden we nagaan of leerlingen die het experimenteel onderwijs gekregen hebben ook beter presteren op transfer- en retentie-opgaven. Indien dit het geval is, dan geldt dit als aanwijzing dat de cognitieve ontwikkeling van de betreffende leerlingen vooruitgeholpen is. Immers, een goede prestatie op dergelijke opgaven kan enkel verklaard worden vanuit het feit dat deze leerlingen tijdens het onderwijsleerproces een aantal inzichtelijke, stabiele en wendbare cognitieve handelingsstructuren verworven hebben. We kunnen hier niet uitvoerig op ingaan, maar sluiten ons aan bij de visie van Vygotskij terzake, die precies het concept 'cognitieve ontwikkeling' op deze wijze heeft geoperationaliseerd (zie Van Parreren, 1979, p. 197).

Sedert enige tijd wordt ook in het Westen het construerend onderzoek of het onderwijsexperiment erkend als een geschikte methode om de denk- en probleemoplossingsprocessen zelf te bestuderen. Frijda & Elshout (1976, p. 417) noemen dit 'trainingsonderzoek' en omschrijven het als 'het pogen de intellectuele prestatie te verbeteren als manier om de intellectuele structuur zelf te bestuderen'. Dit vormde meteen de derde doelstelling van onderhavig onderzoek. Indien de experimentele leergang betekenisvol succes oplevert, dan pleit dit meteen voor de realiteit van de processen en strategieën uit het hypothetisch model van het probleemoplossingsproces dat aan deze leergang ten grondslag ligt.

2. *Onderzoeksopzet*

Het construerend onderzoek is opgezet volgens het voortoets-natoets-design met controlegroep (Campbell & Stanley, 1963). Het werd in september 1979 doorgevoerd. Het ving aan met het aanbieden van een collectieve rekentoets aan de leerlingen van twee klassen van het tweede leerjaar: een experimentele klas van 27 leerlingen en een controleklas van 30 leerlingen. Daardoor beschikten we over preciese en objectieve gegevens omtrent het rekenniveau van de leerlingen uit de experimentele klas en uit de controleklas vóór de aanvang van de beïnvloeding. Tevens werd van enkele leerlingen uit beide klassen een korte individuele, kwalitatief-psychologische toets afgenomen. Er rees evenwel een moeilijkheid. De uitslagen op de collectieve toets van de leerlingen van de klas die bedoeld was als controlegroep lagen nogal wat lager dan die van de experimentele klas. Omdat de resultaten van een nieuwe controleklas eveneens aanmerkelijk lager waren dan in de experimentele klas, werd uit beide controleklassen één leerlingengroep samengesteld met dezelfde gemiddelde uitslag als de leerlingen van de experimentele klas. Deze nieuwe controlegroep telde 25 leerlingen; twaalf uit de ene en dertien uit de andere klas. Vervolgens werd door een onderzoeker zelf aan de leerlingen van de experimentele klas gedurende ongeveer twee weken dagelijks rekenonderwijs gegeven volgens de principes die verder uitvoerig besproken worden. Intussen werkten de onderwijzers van de twee controleklassen het gewone rekenprogramma verder af. Het betrof de herhaling van de leerstof van het eerste leerjaar, waarin het leren optellen en aftrekken van getallen kleiner dan twintig een zeer essentiële plaats inneemt. Regelmatig kwamen daarbij indirecte en complexe rekenopgaven aan bod.

Na afloop van de leergang werden de opgaven uit de voortoets opnieuw aangeboden aan de leerlingen uit de experimentele en uit de twee controleklassen. Sommige opgaven uit deze collectieve toets vertoonden een grote gelijkenis met de opgaven die in het programma van de experimentele en de controleklassen voorkwamen. Andere weken daar in mindere of meerdere mate van af. Ook werden dezelfde leerlingen opnieuw individueel onderzocht. Een maand na de afname van de natoetsen werden nogmaals een aantal rekenopgaven aangeboden aan de leerlingen van de experimentele klas. Om diverse praktische redenen was het onmogelijk ook de leerlingen uit de controleklassen in dit retentie-onderzoek te betrekken.

3. *Toetsen*

3.1. *De collectieve toetsen*

De collectieve voortoets bestaat uit twintig rekenopgaven en fungeerde tevens als natoets. Om spieken te voorkomen werden twee parallelle opgavenreeksen van gelijke moeilijkheidsgraad opgesteld. De eerste tien opgaven hebben een enkelvoudige structuur (bijv. .−7=5). Dan volgen acht complexe opgaven (bijv. 2+4+7= .) en twee redactiesommen (bijv. Pieter krijgt van z'n ma 9 knikkers. 's Avonds heeft hij er al 17. Hij heeft er dus . . . gewonnen). De twee redactie-opgaven en de achtste complexe rekenopgave (nl. 6−2= .+3) onderscheiden zich van de overige zeventien opgaven doordat gedurende de leergang bewust geen enkele dergelijke opgave aangeboden werd. Er werd voor een toets met open vragen geopteerd. Gesloten vragen laten weliswaar een snelle en efficiënte quotering van de resultaten toe, doch wij vermoeden dat het aanbieden van de opgave samen met bijvoorbeeld vier getallen waaruit de juiste uitkomst gekozen moet worden, het oplossingsgedrag van de leerlingen wezenlijk zal beïnvloeden. We verduidelijken dit aan de hand van een voorbeeld. Stel dat wij een leerling met de meerkeuze-opgave .−5=14 en de alternatieven: 9, 11, 19 en 18 confronteren. Het oplossingsgedrag van deze leerling kan zich in dit geval beperken tot het achtereenvolgens 'denken' van de vier alternatieven op de plaats van het puntje, waardoor telkens een eenvoudige, directe opgave verschijnt die nauwelijks problemen oplevert (bijv. 'Is 9 min 5 inderdaad 14?', 'Is 11 min 5 inderdaad 14?' enz.). Enkele leerlingen, die we bij wijze van proef met een aantal meerkeuzevragen confronteerden, pasten inderdaad de hierboven beschreven oplossingsstrategie toe. Zij vonden aldus zeer gemakkelijk de juiste oplossing voor opgaven zoals .−9=8, 15= .+8 en .−4−5=3, terwijl dit niet het geval was wanneer ze slechts enkele ogenblikken later dezelfde opgaven in open vorm aangeboden kregen.

De retentietoets bestaat uit vijf enkelvoudige en vier complexe formule-opgaven en één redactie-opgave. Aan vijf kinderen, die noch tot de experimentele groep, noch tot de controlegroep behoorden, werden de twintig opgaven van de collectieve vooren natoets en de tien opgaven van de retentietoets ter oplossing voorgelegd. De gemiddelde score bedroeg resp. 13/20 en 7/10. Uit deze schaarse gegevens mogen we besluiten dat de moeilijkheidsgraad van beide toetsen ongeveer dezelfde is.

3.2. *De individuele toets*

De bedoeling van de collectieve toetsen was in de eerste plaats kwantitatieve gegevens te verzamelen omtrent het effect van de experimentele leergang. Aan de hand van de uitslagen op deze toetsen wilden we nagaan of de leerlingen die de experimentele leergang gevolgd hadden, een grotere vooruitgang maakten dan de leerlingen uit de controlegroep die het traditionele rekenonderwijs gekregen hadden. Met de individuele toets wensten we de leerlingen meer rechtstreeks te onderzoeken op hun kennis van en inzicht in een aantal mathematische basisbegrippen en hun beheersing van enkele algemene en specifieke denktechnieken. Door de resultaten op de individuele toets vóór en na de leergang te vergelijken konden we nagaan of de experimentele leergang een betekenisvolle kwalitatieve verandering in de handelingsstructuren had teweeggebracht. De individuele toets werd afgenomen van drie leerlingen uit de controlegroep en van zes leerlingen uit de experimentele groep. Uit beide groepen werden resp. één en twee leerlingen uitgekozen die volgens de onderwijzer behoorden tot de zwakste, de middelmatige en de sterkste leerlingen van de klas.

De individuele toets bestaat uit tien opdrachten. In de eerste zeven, eerder ongewone opgaven wordt nagegaan in hoeverre de leerling een begrip, een relatie of een eigenschap van het wiskundig systeem kent, begrijpt en in een fase van probleemanalyse die voorafgaat aan het technisch rekenen, adequaat weet aan te wenden. In de opgaven 8 tot 10 worden drie rekensommen uit de collectieve toets aangeboden, het oplossingsgedrag van de leerling nauwkeurig geobserveerd en hem gevraagd achteraf de gevolgde weg mede te delen.

Opgave 1 en 2 worden als volgt gepresenteerd: 'Ik ga je nu twee oefeningen geven die eigenlijk al opgelost zijn. Je moet dus geen getal meer invullen doch enkel zeggen of wat op deze kaartjes geschreven staat juist of niet juist is'. Dan worden achtereenvolgens twee steekkaarten getoond waarop te lezen staat $8+4=4+8$ en $8-4=4-8$. Via deze opgaven wordt nagegaan of de leerling de commutativiteit en de niet-commutativiteit van resp. de optelling en de aftrekking kent, begrijpt en in zijn oplossingsproces weet te hanteren.

In opgave 3 en 4 wordt nagegaan of de leerling een juist en volwaardig begrip heeft van de gelijkheidsrelatie en meer in het bijzonder of hij twee essentiële eigenschappen van deze relatie kent en inzichtelijk kan toepassen. Opgave 3 heeft betrekking op de onderlinge verwisselbaarheid van het linker- en het rechterlid van een vergelijking. Onmiddellijk nadat de leerling de opgave $2+4+7=.$ – eventueel met hulp van de onderzoeker – correct heeft beantwoord, wordt een nieuwe steekkaart met de opgave $.=2+4+7$ vlak onder het kaartje met de intussen ingevulde eerstgenoemde opgave gelegd. Nagegaan wordt of de leerling ten aanzien van deze opgave nog technische rekenhandelingen stelt. Opgave 4 ziet er als volgt uit: $4+17=4+..$ Een leerling die inziet dat het vermeerderen van het linker en het rechter lid met eenzelfde waarde de gelijkheid niet ongedaan maakt, hoeft ook ten aanzien van deze opgave niet technisch te rekenen.

In opgave 5 en 6 wordt de leerling gevraagd een oefening op te lossen die (voor hem) onoplosbaar is, nl. $7=5+.+3$ en $7-.=8$.[1] Wij verwachten dat sommige leerlingen, nadat ze de opgave geanalyseerd hebben – eventueel met behulp van de deel-geheelrelatie – de onoplosbaarheid zullen ontdekken en aan de onderzoeker meedelen, terwijl anderen toch allerhande lukrake rekenoperaties zullen uitvoeren op beide rekenopgaven.

In opgave 7 wordt de leerling gevraagd zoveel mogelijk rekenoefeningen op te stellen met de getallen 4, 7 en 3. Andere getallen mogen noch in de opgave, noch in de uitkomst voorkomen. Zo is de opgave $7-.=3$ een juist, doch $7+3=.$ een verkeerd antwoord. Met deze opdracht wordt onderzocht of de leerling inzicht heeft in de optelling en de aftrekking als twee alternatieve uitdrukkingen van één welbepaalde relatie tussen de twee delen (3 en 4) en het geheel (7).

Met het nogmaals individueel aanbieden van drie opgaven uit de collectieve toets, nl. $17=.+8$, $.-9=8$ en $20-.-12=4$, bedoelden we na te gaan in hoeverre de leerlingen uit de experimentele groep buiten de context van de leergang en zonder dat hun dit werd opgelegd, de aangeleerde mathematische concepten en heuristische technieken hanteerden wanneer ze (moeilijke) rekensommen oplosten.

Met betrekking tot de meeste opgaven waren drie scores mogelijk, nl. 1, 1/2 en 0. De score werd vooreerst bepaald door het al dan niet correct zijn van het antwoord. In de tweede plaats werd rekening gehouden met het oplossingsproces. Daartoe werd het oplossingsgedrag geobserveerd, de oplossingstijd gemeten en achteraf naar een verslag van het oplossingsproces gevraagd. Via deze methoden kon achterhaald worden of de leerling al dan niet spontaan en functioneel de relevante eigenschap, het centrale begripsschema of de meest adequate denkregel had aangewend. Er zijn bijvoorbeeld leerlingen die weliswaar een correct antwoord geven, doch daarvoor een omslachtige of zelfs onverantwoorde oplossingsweg gevolgd hebben. In de derde plaats werden gegevens in aanmerking genomen uit een gesprekje van de onderzoeker met de leerling, waaruit moest blijken of deze laatste de relevante eigenschap of het betreffende principe kende en begreep. Sommige leerlingen passen weliswaar het juiste principe toe, doch verantwoorden zich als volgt: 'De meester heeft gezegd dat het zo mag'. Anderen weten het principe niet aan te wenden, maar hebben er wel kennis van en inzicht in. De scoring verliep als volgt: Een leerling kreeg voor een opgave score 1 als zijn antwoord correct was, het principe of de regel spontaan en adequaat toegepast werd en de verantwoording ervan ons bevredigend leek. De leerling kreeg 1/2 wanneer aan één van de bovenvermelde voorwaarden niet voldaan was en hij scoorde 0 in de overige gevallen.

4. *Algoritmische en heuristische oplossingsmethoden*

Bij het opstellen van een leergang die het grote aantal denkfouten bij aanvankelijke rekenopgaven wil verhelpen, kan men twee richtingen uit. Ofwel brengt men de leerling een aantal specifieke oplossingsmethoden bij. Het resultaat van een dergelijk onderwijsleerproces is dat de leerling uiteindelijk de volgende activiteiten stelt, wanneer hij een rekenopgave ter oplossing aangeboden krijgt: hij leest de opgave, hij herkent het type waartoe ze behoort, hij diept de bijbehorende oplossingsweg op uit het geheugen en past die toe op de concrete getallen uit de opgave (Wolters, 1978, p. 81). Elke specifieke oplossingsmethode heeft dan slechts betrekking op één welbepaald opgaventype. De opeenvolgende stappen van het oplossingsproces verlopen routinematig en (dus) probleemloos. Van zelfstandig construeren van oplossingswegen of echt nadenken over relaties is geen sprake (Bodanskij, 1969, p. 5). Deze oplossingswijze vinden we bij Greeno (1973, p. 114) en bij Van Parreren (1975, p. 394) beschreven onder de naam

Schema 1 *Overzicht van het heuristisch oplossingsproces van aanvankelijke rekenopgaven*

'algoritmen'. De taak van de leerkracht komt er in dit geval op neer dat hij de leerling met elk opgaventype vertrouwd maakt en hem ten aanzien van elk type met één welomschreven algoritmische oplossingsregel uitrust, waardoor opgaven van het betreffende type ophouden probleem te zijn. Dat de leerling opgaven die niet tot dit type behoren ook kan oplossen is binnen deze optiek niet te verwachten (Bodanskij, 1969, p. 5). In paragraaf 7.1. van het voorgaande artikel beschreven we het geval van een achtjarige die alle enkelvoudige opgaven behalve die van het type $.-a=b$ correct en zonder nadenken oploste. Enkel voor de opgaven van dit laatste type had hij nog geen specifieke, algoritmische oplossingsmethode verworven en derhalve wist hij er dan ook geen raad mee.

De aanvankelijke rekenopgaven kunnen evenwel ook door middel van een heuristisch proces opgelost worden. Dit wordt overzichtelijk weergegeven in schema 1, waaruit blijkt dat de eerste stappen, nl. de analyse van de opgave en de keuze van de gepaste rekenoperatie, anders verlopen dan die bij het algoritmisch oplossingsproces. Immers, in het heuristisch proces brengt de leerling de opgave niet onmiddellijk in een bepaalde categorie thuis doch analyseert ze met behulp van algemene en wendbare begrippen; evenmin reproduceert hij de bijpassende oplossingsweg doch construeert hij er zelf één. Centraal in het aanleren van deze oplossingswijze staat derhalve ook het bijbrengen op een inzichtelijke manier van de nodige algemene begrippen en wendbare denktechnische middelen. De bedoeling daarvan is geenszins dat de leerling na een tijdje over een aantal pasklare oplossingsmethoden zou beschikken voor de diverse opgaventypes waarmee hij geconfronteerd wordt. Anders gezegd, men verwacht niet dat de leerling na het onderwijsleerproces geen opgaven meer als probleem zal ervaren. Maar doordat hij beschikt over de vereiste begripsschema's en heuristische procedures, kan hij deze problemen verstandig aanpakken en tot een goed einde brengen.

Het onderscheid tussen algoritmische en heuristische oplossingsmethoden en de daarmee corresponderende onderwijsmethoden vatten we niet op als een dichotomie, maar – aansluitend bij de opvattingen van Landa (1971) – als twee polen van een continuum. Wij hebben voor de heuristische aanpak gekozen. Daarmee sluiten we geenszins de mogelijkheid uit dat een onderwijsleerproces, gebaseerd op de algoritmische benadering, een drastische verlaging van het aantal fouten op de toets zou kunnen teweegbrengen. Met Landa (Van Parreren & Carpay, 1972, p. 120) zijn we er zelfs van overtuigd dat met betrekking tot bepaalde terreinen een algoritmische aanpak wenselijker is. Wel vermoeden we dat een heuristische aanpak op lange termijn en voor het hier bestudeerde inhoudelijke domein meer didactische perspectieven biedt en meer kansen inhoudt de cognitieve ontwikkeling te bevorderen (zie Freudenthal, 1979).

5. *Inhoud van de experimentele leergang: beschrijving en verantwoording*

De experimentele leergang is niet tot stand gekomen op grond van materiaal uit bestaande handboeken voor het rekenonderwijs. Wel hebben we, uitgaande van een bezinning op de moeilijkheden die kinderen ondervinden tijdens het rekenproces en op de adequate handelingsstructuren van goede rekenaars, zelf gezocht hoe we het oplossingsgedrag kunnen verbeteren.

Gezien de moeilijkheden van de eerder onderzochte leerlingen zich hoofdzakelijk op het vlak van het denkend rekenen situeerden (zie De Corte & Verschaffel, 1980, paragraaf 5) is de focus van de leergang daarop gericht en worden de rekentechnische aspecten buiten beschouwing gelaten. Derhalve verwachtten we niet dat het experimentele onderwijs ook tot een daling van de technische rekenfouten zou leiden.

Uit de vorige paragraaf is duidelijk geworden dat we voor een aanpak gekozen hebben die zich niet rechtstreeks en niet uitsluitend richt op die specifieke opgaventypes welke ons vanuit het constaterend onderzoek problematisch toeschenen, nl. de enkelvoudige opgaven van het type $.=a+b$ en $.-a=b$ en de indirecte complexe opgaven. Fouten op dergelijke rekenopgaven dienen o.i. in de eerste plaats beschouwd te worden als symptomen van deficiënties in de wiskundige begripsvorming en van het ontbreken van functionele probleemoplossingstechnieken. In dit perspectief werden de volgende drie centrale thema's voor de leergang gekozen: het gelijkheidsbegrip, de deel-geheel-relatie en de controlehandelingen. Bij het zoeken naar een theoretische verantwoording en bij de concrete uitwerking van de lessen hebben we veel steun gevonden bij een aantal Sovjetrussische en Nederlandse onderwijspsychologen uit de handelings-psychologische richting, zoals Davydov (1977), Assink & Verloop (1977), Wolters (1977, 1978), Atachanov (1969, 1970) en Mikulina (1969).

5.1. *De gelijkheidsrelatie*

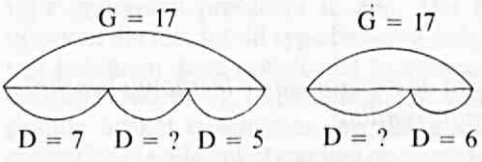
Een absolute voorwaarde voor het inzichtelijk oplossen van enkelvoudige en complexe, directe en indirecte opgaven is het beschikken over een juist en volledig begrip van het is-gelijk-aan-teken. Onderstaande drie voorbeelden tonen aan dat bij heel wat leerlingen dit begrip niet of onvoldoende aanwezig is. Tijdens het constaterend onderzoek vroegen we een leerling wat dit is-gelijk-aan-teken dan wel betekent. Hij antwoordde: 'Dit wil zeggen dat je achter dit teken de uitkomst van de oefening moet schrijven'.[2] Een dergelijk gebrekkig en onvolledig begrip maakt het misschien nog mogelijk dat de leerling de frequent voorkomende type-I-opgaven $(a\pm b=.)$ correct oplost. Doch het begrip is zo inhoudsloos en zelfs verkeerd gedefinieerd dat het ten aanzien van type-II-opgaven $(.=a\pm b)$ en indirecte opgaven niet zinvol meer te hanteren en zelfs misleidend is. De talrijke fouten (en vooral de aard ervan) die door de leerlingen gemaakt werden op de opgave $9-.=8+.$ uit één van de toetsen van het constaterend onderzoek, zijn uiteindelijk eveneens tot een onvolwaardige kennis van het gelijkheidsbegrip te herleiden. Immers, 20% van de leerlingen gaf de volgende oplossing: $9-\underline{1}=8+\underline{1}$. Zij hadden gewoonweg twee geïsoleerde operaties uitgevoerd en de uitkomsten neergeschreven op de plaats van de puntjes. 8 is inderdaad de uitkomst van $9-1$ en 9 is het resultaat van de rekenoperatie 8+1: Voor een derde illustratie van de gebrekkige kennis van het begrip 'gelijkheid' verwijzen we naar de bespreking van de fouten op de type-II-opgaven (zie De Corte & Verschaffel, 1980, paragraaf 6.2).

Wat blijkt uit bovenstaande voorbeelden? Veel kinderen beschouwen het te zoeken getal in een rekenopgave enkel als het resultaat van een aantal opeenvolgende bewerkingen, zonder dat dit gepaard gaat met het duidelijke besef dat in een rekenopgave die opgelost is, relaties en verhoudingen op een bepaalde wijze worden weergegeven. Precies daarin vervult het is-gelijk-aan-teken een essentiële functie. Immers, dit teken maakt het geheel van symbolen tot een bewering die waargemaakt moet worden en op haar juistheid getoetst kan worden. De leerlingen beseffen vaak niet echt dat ze, door dit teken te gebruiken, een uitspraak doen over de kwantitatieve gelijkwaardigheid van het linker- en het rechterlid van een bewerking.

Wat verstaan we nu onder een juist en volledig begrip van het is-gelijk-aan-teken? De leerling beschikt over dit begrip als aan de volgende drie voorwaarden voldaan is. Ten eerste, hij beseft dat datgene wat aan de ene kant van het teken staat (onder de bedoelde parameter) gelijk is aan, hetzelfde of evenveel is als wat aan de andere kant staat (Wolters, 1978, p. 72). Ten tweede, de leerling gebruikt deze kennis bij het begin en bij het einde van het oplossingsproces van rekenopgaven. Zo kan hij bij de aanvang voor zichzelf duidelijk de opgave formuleren: 'Welke waarde moet ik invullen in het ene lid of waarmee moet ik het ene lid verminderen of vermeerderen opdat het dezelfde waarde zou hebben als het andere lid'. Nadat de oplossing gevonden is, kan hij de controlevraag juist stellen: 'Is de waarde van linker- en rechterlid nu inderdaad dezelfde'. Ten derde, de leerling kent, begrijpt en hanteert in zijn oplossingsgedrag de kenmerken die rechtstreeks of onrechtstreeks voortvloeien uit dit begrip. We vermelden de onderlinge verwisselbaarheid van linker- en rechterlid en het feit dat beide leden met eenzelfde grootheid verminderd of vermeerderd mogen worden zonder dat er iets aan de gelijkheid of ongelijkheid verandert (Davydov, 1977, p. 33 en 52).

5.2. *De deel-geheel-relatie*

Met het uitdrukkelijke besef dat linker- en rechterlid gelijk moeten worden, is een eerste stap gezet, doch is de rekenopgave nog helemaal niet opgelost. Het begripsschema dat nu besproken wordt garandeert al evenmin een correct antwoord op alle opgaven, doch stelt de leerling wel in staat om zelf verantwoorde beslissingen te nemen met betrekking tot de operaties die hij zal uitvoeren. Van een leerling die over het deel-geheel-schema beschikt verwachten we dat hij typische denkfouten zoals $6=6+\underline{12}$, $7+3+\underline{27}=17$ en $20-\underline{8}-12=4$ niet zal maken. Hoe kunnen we dit begripsschema algemeen beschrijven? De deel-geheel-relatie is dit conceptueel schema, dat kinderen helpt om bij diverse typen van opgaven, alle elementen van de opgave samen en in de juiste verhouding tot elkaar te denken (Bodanskij, 1969, p. 3). Het aanleren van en het oriënteren op deze relatie verhoogt de kans dat kinderen niet meer ondoordacht aan het rekenen en het tellen slaan, maar eerst de gegeven en de gevraagde elementen uit de opgave in hun onderlinge verhoudingen proberen te expliciteren. Wij operationaliseren dit als volgt. Het beschikken over het deel-geheel-schema moet blijken uit de volgende twee vaardigheden, die betrekking hebben op twee onderscheiden momenten van het oplossingsproces. Ten eerste, de leerling moet de diverse bekende en onbekende getalswaarden van een rekenopgave kunnen benoemen als deel (D) of als geheel (G); hij moet tevens het daarbij passend schema kunnen construeren. Wat de grafische voorstelling van de relatie betreft, hebben we, in navolging van Wolters (1977, p. 49) gekozen voor de meest eenvoudige, abstracte weergave, nl. stukken van een rechte lijn als delen van het geheel. Het aantal, de grootte en de volgorde van de delen zijn op het schema af te lezen. De opgaven 7+ .+5=17 en 17− .=6 worden bijvoorbeeld geschematiseerd zoals in Figuur 1.



Figuur 1 *Schematische weergave van de deel-geheel-relaties in de opgaven 7+ .+5=17 en 17− .=6*

Natuurlijk zijn het onderscheiden van de delen en het geheel, en het opstellen van het schema twee correlatieve handelingen. Enerzijds kan men zeggen dat, na de identificatie van het geheel en de delen, het opstellen van het schema nog slechts een kwestie van techniek is (Atachanov, 1969, p. 5). Anderzijds is het ook zo dat het grafisch of mentaal hanteren van het schema het onderkennen van de delen en het geheel vergemakkelijkt.

Ten tweede, de leerling moet elke component van het schema kunnen uitdrukken met behulp van de overige componenten. Dit betekent concreet dat de leerling bij een opgave, uitgaande van de schematische weergave, één of meerdere rekenoperaties kan kiezen die leiden tot de identificatie van het onbekende getal uit het schema. Zowel met betrekking tot de eerste als de tweede voorwaarde of vaardigheid is het van wezenlijk belang, dat de leerling weet dat de optelling en de aftrekking twee alternatieve uitdrukkingen zijn van één en dezelfde verhouding, nl. de deel-geheel-relatie, die tussen een aantal getalswaarden bestaat. Dat dit voor de tweede vaardigheid, nl. de keuze van een operatie, het geval is, blijkt onmiddellijk uit de omschrijving ervan. Maar ook voor de eerste vaardigheid, nl. het ontdekken van de delen en het geheel in de opgave, is een grondig inzicht in het wezen van beide rekenoperaties en hun onderlinge samenhang vereist. We verduidelijken dit. Wanneer we een leerling met de 'situatie' $9-7=2$ confronteren, dan heeft hij weinig moeite om de delen en het geheel te vinden. Een blik op de getallen volstaat om de twee kleinste getallen de delen en het grootste getal het geheel te noemen. Wanneer we een leerling daarentegen met de 'opgave' $.-7=2$ confronteren, kan en mag hij zich niet baseren op de grootte van de gegeven getallen, maar moet hij zijn kennis van de optelling en de aftrekking aanwenden om alle waarden, ook de onbekende als deel of geheel te benoemen.

Omwille van twee redenen noemen we het deel-geheel-schema complex. In de eerste plaats is het moeilijk, zo niet onmogelijk de vraag te beantwoorden in hoeverre de handelingsstructuren die met het hanteren van het schema gepaard gaan, op het vakinhoudelijke of het denktechnische vlak te situeren zijn. Waarschijnlijk gaat het om een bijzondere combinatie van begripskennis en eerder heuristische componenten, in zoverre dat het opstellen van het deel-geheel-schema tot probleemanalyse aanleiding geeft. In de tweede plaats wijzen we op de hechte band tussen het gelijkheidsbegrip en de deel-geheel-relatie. Immers, enkel de kennis dat de delen *gelijk zijn aan* het geheel, maakt het mogelijk een oplossingsweg uit te denken. En tenslotte, met het opteren voor het deel-geheel-schema sluiten we geenszins uit dat de vastgestelde moeilijkheden ook in andere termen kunnen beschreven en verklaard worden en door middel van alternatieve begripsschema's (met bijbehorende voorstellingen) geremedieerd kunnen worden (zie bijv. Streefland, 1980). Wij hebben voor het deel-geheel-schema geopteerd, enerzijds omdat we dit begripsschema terugvonden in het heuristisch oplossingsproces van de knapste rekenaartjes (zie De Corte & Verschaffel, 1980, paragraaf 7.1.); anderzijds omdat we aldus konden aansluiten bij een rijke schat aan theoretische inzichten en praktijkrelevante suggesties, die we in publikaties van Mikulina (1969), Atachanov (1969), Assink & Verloop (1977) en Wolters (1978) hadden aangetroffen. In de meeste van deze programma's echter wordt met redactie-opgaven gewerkt, terwijl onderhavig onderzoek handelt over formule-opgaven. Derhalve rijst de vraag: is het mogelijk en wenselijk om het deel-geheel-schema dezelfde plaats en een analoge functie te geven in het oplossingsproces van formule-opgaven als van redactie-opgaven? Dit is o.i. wel het geval. Indien men een heuristische oplossingswijze voorstaat, verloopt het oplossen van formule- en redactie-opgaven bijna volkomen parallel. In beide gevallen tracht de leerling eerst de bekende en onbekende elementen uit de opgaven in te passen in het cognitief deel-geheel-schema, en besluit op grond daarvan tot het uitvoeren van die rekenoperatie welke hem het gemakkelijkst en het snelst naar de identificatie van het onbekende getal uit het schema zal brengen. Eénmaal het schema ingevuld, is voor de verdere zoektocht naar het onbekende getal de wijze waarop het probleem gesteld werd volkomen irrelevant. We merken hierbij evenwel op dat binnen de traditionele rekendidactiek van het vermelde parallellisme nauwelijks sprake is, omdat – o.i. ten onrechte – redactie-opgaven opgelost worden door eerst de corresponderende formule-opgave te zoeken in plaats van de delen en het geheel. Vele leerkrachten eisen van hun leerlingen dat ze de corresponderende formule-opgave expliciet neerschrijven.

5.3. *De controlehandelingen*

Niet alleen het ontbreken van juiste en volledige begripsschema's in de fase van probleemanalyse is oorzaak van de grote hoeveelheid fouten op aanvankelijke rekenopgaven. We vermoeden dat dit grote aantal in aanzienlijke mate zal afnemen, indien de leerling de vaardigheid en de attitude om de gegeven oplossing te controleren wordt bijgebracht. Het 'toetsen' van de oplossing garandeert weliswaar niet dat het juiste antwoord gevonden wordt, maar kan er wel toe leiden dat foutieve oplossingen tijdig ontdekt worden, waarna de oplosser een andere weg kan uitproberen. Gal'perin wijst op het algemene belang van de controlehandelingen: 'Zo'n controle blijft ook bij een volledige oriënteringsbasis nodig omdat bijvoorbeeld fouten ten gevolge van aandachtsschommelingen kunnen voorkomen. Het zelf kunnen controleren betekent, dat de leerling, althans voor deze handeling, niet meer "onderwijzer-afhankelijk" is. Het is een stap op weg naar het zichzelf-overbodig-maken, die iedere docent moet volgen'

(Van Parreren & Carpay, 1972, p. 42).

Wanneer noemen we de controlehandelingen volwaardige handelingen? Ten eerste, wanneer de leerling weet welke opeenvolgende stappen hij moet uitvoeren om de juistheid van de voorlopige oplossing te toetsen. Ten tweede, wanneer hij kan verantwoorden waarom deze controlehandelingen bij een bepaalde opgave zinvol en efficiënt zijn, m.a.w. wanneer deze handelingen inzichtelijk verworven zijn. Ten derde, wanneer de leerling deze handelingen niet enkel cognitief heeft opgenomen, maar in de totale persoonlijkheidsstructuur geïntegreerd heeft. Pas dan is het controleren tot een houding geworden, die ertoe leidt dat de leerling de handelingen spontaan toepast in die situaties waarin het wenselijk is.

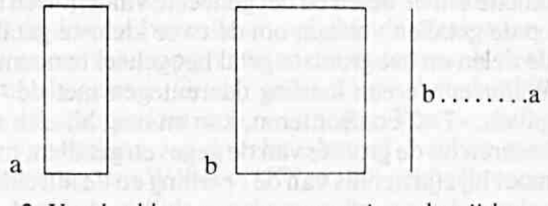
6. *Opzet en uitvoering van de experimentele leergang*

Zoals gezegd heeft één van de onderzoekers zelf gedurende een tweetal weken dagelijks een uur rekenonderwijs gegeven aan de leerlingen van de experimentele klas volgens de besproken principes. De totale leerinhoud werd verdeeld over vijf onderwijsleereenheden. In de eerste eenheid, die drie lesuren in beslag neemt, staat het begrip 'gelijkheid' centraal. Drie onderwijsleereenheden hebben betrekking op de deel-geheel-relatie, nl. een algemene oriëntatie op de deel-geheel-relatie (2 lesuren), het leren werken met deze relatie (3 lesuren) en het oplossen van formule-opgaven met behulp van het deel-geheel-schema (2 lesuren). In de laatste eenheid (1 lesuur) wordt aandacht besteed aan de controlehandeling. Tijdens de experimentele leergang kregen de leerlingen dertien werkbladen aangeboden (zie Verschaffel, 1979). Ze hadden een dubbele functie. Enerzijds werden ze gebruikt om begrippen en vaardigheden in te oefenen. Anderzijds fungeerden ze als controlemiddel voor de onderzoekers om de vorderingen van de leerlingen na te gaan.

6.1. *Eerste onderwijsleereenheid: gelijkheid (3 lesuren)*

Van de leerlingen werd verwacht dat ze op het einde van het eerste lesuur de gebruikelijke symbolen voor de relaties 'gelijk aan', 'niet gelijk aan', 'groter dan' en 'kleiner dan', konden hanteren bij het vergelijken van concrete objecten of grafische modellen op diverse parameters (lengte, grootte, inhoud). Naast de symbolen voor deze relaties werden ook letters ingevoerd. Deze letters 'a' en 'b' verwijzen niet naar de objecten op zich, maar naar de eigenschappen van de objecten die als grootheden opgevat worden (Mikulina, 1969, p. 15). De letter 'a' vertegenwoordigt bijvoorbeeld niet 'deze liniaal' maar wel 'de lengte van deze liniaal'. Niet alleen vanuit praktisch maar ook vanuit theoretisch standpunt hebben wij het zinvol geacht om het resultaat van de vergelijking in letters te laten uitdrukken. Daardoor wordt immers de kans verhoogd dat er volwaardige cognitieve handelingsstructuren ontstaan ten aanzien van de betreffende begrippen. Op die manier leren de kinderen bijvoorbeeld dat de relatie tussen de twee grootheden dezelfde blijft wanneer ze van plaats verwisseld worden. Zo waren er verscheidene leerlingen die er aanvankelijk niet in slaagden om bij de opgave uit Figuur 2 de mentale omkering te maken van 'de eerste rechthoek is kleiner dan de tweede' naar 'dus b>a'.

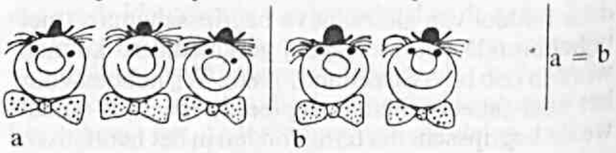
Vergelijk de grootte van de twee rechthoeken



Figuur 2 *Voorbeeld van een opgave uit onderwijsleereenheid 1 (eerste lestijd)*

In de tweede en de derde lestijd leerden de leerlingen de genoemde symbolen gebruiken om discontinue hoeveelheden, die reëel aanwezig ofwel grafisch of symbolisch weergegeven waren, onderling te vergelijken. Telkenmale werd benadrukt dat met het schrijven van het is-gelijk-aan-teken, net zoals bij de continue grootheden uit het eerste lesuur, het resultaat van een vergelijking van twee grootheden wordt vastgelegd. De aantallen waren opzettelijk zeer klein gehouden om de aandacht niet af te wenden van het gelijkheidsbegrip. Aan de hand van de laatste oefeningen uit deze onderwijsleereenheid leerden de kinderen een ongelijkheid ongedaan maken door van de grootste grootheid iets weg te nemen of bij de

Teken bij of streep door totdat het klopt!



Figuur 3 *Voorbeeld van een opgave uit onderwijsleereenheid 1 (tweede lestijd)*

kleinste iets toe te voegen. Met grafische modellen leverde dit voor geen enkele leerling problemen op. De opgave uit Figuur 3 werd opgelost door ofwel één clowntje bij te tekenen ofwel er één door te strepen.

Deze leerlingen raakten evenwel in ernstige moeilijkheden wanneer ze dezelfde opdracht moesten uitvoeren met de corresponderende getallen en symbolen. Op opgaven als: 'Maak juist door iets toe te voegen of iets af te trekken: 2 = 4' werden antwoorden als $\underline{+2}\ 2 = 4$, $2 = \underline{-2}\ 4$ en vooral $2 = \underline{2-}\ 4$ gegeven. De leerlingen hadden weliswaar de juiste mentale handeling uitgevoerd, doch bij de symbolische weergave ervan waren ze eerder 'nonconformistisch' te werk gegaan. Naar aanleiding van deze verrassende vaststelling werd door de lesgever ingegaan op de afspraken en regels bij het noteren van formule-opgaven (bijvoorbeeld dat men net zoals in een tekst de symbolen van links naar rechts moet lezen).

6.2. *Tweede onderwijsleereenheid: algemene oriëntatie op de deel-geheel-relatie (2 lesuren)*

De doelstelling van deze onderwijsleereenheid luidde als volgt: de leerlingen moeten de concepten 'deel' en 'geheel' kunnen hanteren om de relaties tussen continue en tussen discontinue grootheden weer te geven. Ze moeten dit kunnen bij concrete objecten, maar ook in verband met afbeeldingen en symbolische weergaven.

In de eerste lestijd werden de begrippen 'deel' en 'geheel' aan de hand van een spannend indianenverhaal ingevoerd. Daarna ontdekten de leerlingen de deel-geheel-relatie in een aantal opgegeven situaties. Zo sneden we een appel middendoor en de leerlingen reageerden: 'De appel is het geheel en de twee helften zijn de delen'. Aan de hand van voorbeelden, die in de loop van het onderwijsleergesprek door de leerlingen aangebracht werden, slaagden we erin een aantal relevante aspecten van de relatie te beklemtonen en enkele onzuiverheden in de begrippen te verwijderen. Zo bleek het voor sommige leerlingen moeilijk om te begrijpen dat het mathematisch begrip 'geheel' niet samenvalt met het gewone, alledaagse begrip 'vol'. Slechts enkelen slaagden er bijvoorbeeld in de vraag of een vol glas water een deel of een geheel is, correct te beantwoorden door te zeggen: 'Dat hangt ervan af wat je ermee doet'. Alle anderen lieten zich overweldigen door de perceptie van het volle glas. Veel leerlingen hadden aanvankelijk ook moeite met de relativiteit van de begrippen 'deel' en 'geheel'. Dat iets eerst geheel kan zijn en daarna deel kan worden – of omgekeerd – begrepen velen niet onmiddellijk. Wanneer we bijvoorbeeld een halve appel nogmaals in twee sneden en de leerlingen vroegen deze situatie te beschrijven, bleven heel wat leerlingen de halve appel als deel benoemen, hoewel hij nu het geheel geworden was. Op beide moeilijkheden wordt ook door Mikulina (1969, p. 11 en 12) gewezen. Een derde moeilijkheid was dat sommige leerlingen 'zomaar' een aantal delen noemden zonder dat het totaal der delen het geheel vormt. We verduidelijken dit aan de hand van een kort gesprekje.

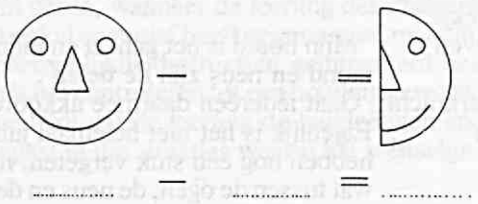
Steven : 'Mijn hoofd is het geheel en mijn ogen, mond en neus zijn de delen'.
Leerkracht: 'Gaat iedereen daarmee akkoord?'
Jan : 'Eigenlijk is het niet helemaal juist. We hebben nog een stuk vergeten, nl. alles wat tussen de ogen, de neus en de mond ligt'.

In de tweede lestijd werd de deel-geheel-relatie gehanteerd ten aanzien van discontinue grootheden. Aanvankelijk gebruikten de leerlingen de concepten 'deel' en 'geheel' om de kwantitatieve relaties tussen groepen reële objecten weer te geven. Zo beschreven ze de situatie waarin de onderzoeker negen stukjes krijt nam en er drie aan één jongen en zes aan een ander gaf, als volgt: 'Wat jij eerst had is het geheel en Tom en Michiel hebben de twee delen'. Daarna dienden de leerlingen de deel-geheel-relatie te ontdekken ten aanzien van symbolisch weergegeven kwantiteiten.

6.3. *Derde onderwijsleereenheid: leren werken met het deel-geheel-schema (3 lesuren)*

Als resultaat van deze onderwijsleereenheid verwachtten we dat de leerlingen de twee vaardigheden verworven hadden die vereist zijn om aanvankelijke rekenopgaven op een inzichtelijke manier op te lossen, althans wat het denkend rekenen betreft. Deze vaardigheden zijn in de eerste plaats het kunnen ontdekken en schematisch weergeven van de delen en het geheel in een formule-opgave en ten tweede elke component uit deze schematische weergave kunnen uitdrukken aan de hand van de overige componenten. In de eerste en tweede lestijd leerden de kinderen de elementen uit een formule opgave benoemen als delen en geheel. Wij waren van oordeel dat het niet wenselijk is om daarvoor van meetaf aan formule-opgaven met getallen te gebruiken. Uit het constaterend onderzoek was immers gebleken dat vele leerlingen, van zodra ze met een formule-opgave geconfronteerd worden, bijna onmiddellijk aan het tellen slaan, waardoor hun aandacht afgeleid wordt van de mathematische structuur van de opgave (zie ook Assink & Verloop, 1977, p. 134).

Daarom hebben we aanvankelijk gebruik gemaakt van de oefeningen die Case (1978) aanwendt om kinderen op een inzichtelijke manier indirecte rekenopgaven te leren oplossen. De leerlingen kregen een aantal opgaven in de aard van Figuur 4 aangeboden en hen werd gevraagd de ontbrekende delen bij te tekenen én van elk element te zeggen of het een deel of een geheel is.

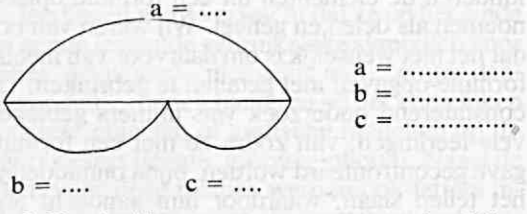


Figuur 4 *Voorbeeld van een opgave uit onderwijsleereenheid 3 (eerste lestijd)*

Dergelijke oefeningen leken ons waardevol, omdat de leerling aan de hand van eenvoudig, suggestief en ongecompliceerd materiaal geleidelijk tot inzicht komt in de logisch-mathematisch noodzakelijke plaats van de delen en het geheel binnen de formule-opgaven. Na deze oefeningen bleken de meeste leerlingen inderdaad in staat de delen en het geheel uit letterformules zoals a=b−c te halen. Daar deze generalisatie niet bij alle leerlingen tot stand was gekomen, werden in een daarop volgend onderwijsleergesprek de letterformules D+D=G en G−D=D opgebouwd. Uiteindelijk wisten en begrepen de leerlingen dat een opgave met de structuur .=.−. niet anders kan worden ingevuld dan D=G−D.

In de derde lestijd leerden de leerlingen één element uit de deel-geheel-relatie identificeren aan de hand van één of meerdere rekenoperaties op de overige, bekende elementen. Nadat de leerlingen vertrouwd waren met het schema dat we in Figuur 1 voorstelden, werden op het bord een aantal dergelijke schema's aangebracht en werd de leerlingen gevraagd beide delen en het geheel één voor één uit te drukken met behulp van de overige elementen.

Benoem a, b en c en vul de oefeningen verder aan.



Figuur 5 *Voorbeeld van een opgave uit onderwijsleereenheid 3 (derde lestijd)*

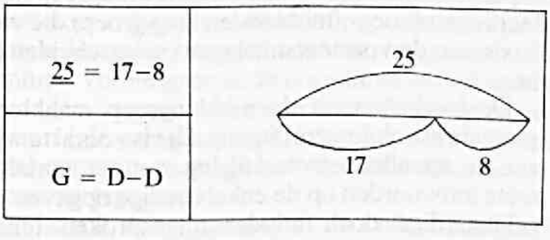
Bijna alle leerlingen losten bijvoorbeeld de opgaven bij Figuur 5 correct op.

6.4. *Vierde onderwijsleereenheid: oplossen van aanvankelijke rekenopgaven met behulp van het deel-geheel-schema (2 lesuren)*

Als resultaat van de vierde onderwijsleereenheid moesten de leerlingen in staat zijn om de diverse bijgebrachte begripsschema's te coördineren en de aangeleerde deelhandelingen planmatig uit te voeren bij het oplossen van aanvankelijke rekensommen. Voor het eerst in de loop van de experimentele leergang werden een aantal formule-opgaven aangeboden. Na één opgave klassikaal te hebben opgelost, dienden de leerlingen twaalf enkelvoudige formule-opgaven op te lossen. Elke opgave moesten ze in drie stappen oplossen: 1. de componenten benoemen als delen en geheel, het bijpassend schema tekenen en de bekende en onbekende getalswaarden erop aanduiden, 2. een rekenoperatie kiezen om het onbekende getal te identificeren, 3. deze operatie uitvoeren en de uitkomst ervan in het schema én in de formule-opgave neerschrijven. Op het eerste zicht vallen weinig fouten te verwachten op deze twaalf enkelvoudige formule-opgaven. Immers, het correct uitvoeren van de stappen 1. en 2. hadden de leerlingen in de derde onderwijsleereenheid afzonderlijk en met succes geleerd. Dat er ten aanzien van stap 3. – het technisch rekenen – veel fouten zouden gemaakt worden, leek ons, de resultaten van het constaterend onderzoek in acht genomen, onwaarschijnlijk. Bij nader toezien hadden we evenwel toch redenen om nieuwsgierig te zijn naar de prestaties op deze opgaven. Ten eerste stelde Case (1978a, p. 455) vast dat leerlingen, die dagenlang met succes geoefend hadden met opgaven zoals in Figuur 4, terugvielen op de oude, inadequate oplossingsmethoden wanneer ze naderhand weerom met gewone formule-opgaven met getallen geconfronteerd werden. Ten tweede, Van Parreren (1979, p. 15) wijst erop dat het voor sommige leerlingen erg moeilijk valt een afzonderlijk aangeleerde deelhandeling op de juiste plaats in de totale handeling in te bouwen en de onderscheiden stappen te combineren tot een totale oplossingsstrategie. De resultaten op de twaalf formule-opgaven waren erg hoopgevend. Slechts 5 van de 27 leerlingen losten één of meerdere opgaven foutief op. Deze fouten kunnen tot vier categorieën herleid worden.

Twee leerlingen slaagden er niet in bij diverse opgaven de letterformule noch het schema correct in te vullen, omdat ze de deel-geheel-relatie geenszins onder de knie hadden. Ze voerden een willekeurige rekenoperatie uit en bekwamen aldus een foutieve oplossing. Vermoedelijk was het hoog tempo en de klassikale aanpak ervoor verantwoordelijk dat de leergang bij deze twee leerlingen nauwelijks positieve effecten heeft opgeleverd.

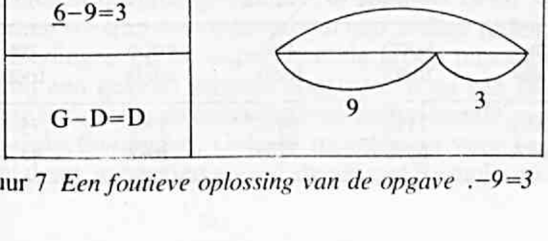
Een tweede foutief oplossingsproces bestond hierin dat onmiddellijk na het lezen van de opgave en voorafgaand aan het invullen van de letterformule en het schema, een (foutief) antwoord werd neergeschreven. Een verklaring hiervoor is wellicht dat de opgave subjectief als probleemloos ervaren werd en derhalve een probleemanalyse overbodig geacht werd. Nadat de foutieve uitkomst was ingevuld, werden ook een verkeerde letterformule en een onjuist schema gemaakt, doordat men zich niet meer oriënteerde op de oorspronkelijke opgave maar op de foutieve oplossing ervan. We verduidelijken dit aan de hand van het voorbeeld uit Figuur 6.



Figuur 6 *Een foutieve oplossing van de opgave .=17−8*

Deze fout kwam tot stand doordat de leerling onmiddellijk na lezing van de opgave het getal 25 invulde, hetgeen een typische fout is bij dit soort opgaven. Bij het opstellen van de letterformule en het schema baseerde hij zich op de verhouding tussen de getallen 25, 17 en 8 en niet op de structuur van de opgave.

Een andere leerling vulde weliswaar correct de letterformule en het schema in, doch keerde als het ware terug naar de formule-opgave om het onbekende getal te identificeren in plaats van dit te doen aan de hand van het schema. Daarbij liet hij zich dan misleiden door het klassieke valstrikje uit de type-



Figuur 7 *Een foutieve oplossing van de opgave .−9=3*

IV-aftrekking. Ook hiervan geven we een voorbeeld in Figuur 7.

Tenslotte stelden we ook een tweetal technische rekenfouten vast. In deze gevallen waren het schema en de letterformule juist ingevuld. Ook hadden de leerlingen, uitgaande van het schema, de juiste rekenoperatie gekozen, doch er was in de loop van het technisch rekenproces één of andere fout binnengeslopen. Een leerling die de overige opgaven correct oploste, gaf 8 als antwoord voor de oefening 16= .+9.

Tot zover een korte voorstelling van de inadequate handelingen die tot fouten geleid hebben op de twaalf enkelvoudige formule-opgaven. Het onderwijsleergesprek, waarmee de tweede lestijd begon en waarin de bovenvermelde inadequate handelingen werden besproken, mondde uit in het opstellen van de letterformules en schema's voor complexe opgaven (bijvoorbeeld D+D+D=G). Daarna werden zes complexe formule-opgaven aangeboden doch wegens tijdsgebrek losten de meeste leerlingen er minder dan drie op.

6.5. *Vijfde onderwijsleereenheid: de controlehandelingen (1 lesuur)*

Op het einde van de laatste les moesten de leerlingen de controlehandelingen efficiënt en inzichtelijk kunnen aanwenden. Ze dienden bovendien de controlehandelingen als een wezenlijk, geïntegreerd deel van het totale oplossingsproces te beschouwen. Bij de aanvang van deze les schreef de lesgever vier indirecte enkelvoudige rekenopgaven op het bord en loste die zelf op. Twee ervan werden onjuist opgelost. Aan de hand daarvan werden de handelingen bijgebracht die uitgevoerd moeten worden om een oplossing te controleren. Voor een uitvoerige beschrijving van deze handelingen verwijzen we naar De Corte & Verschaffel, 1980, paragraaf 9. Sommige leerlingen vertelden dat ze reeds spontaan dit procédé toepasten. Anderen toonden zich verbaasd dat er zo een simpele manier bestaat om de juistheid van je eigen oplossing na te gaan.

Vervolgens kregen de leerlingen vier eenvoudige indirecte opgaven aangeboden die zij moesten oplossen en controleren. We hebben bewust het aantal opgaven beperkt, om te voorkomen dat in de experimentele klas meer opgaven werden aangeboden die een sterke gelijkenis vertonen met de opgaven uit de natoets dan in de controleklassen.

Deze les heeft niet het effect gehad dat wij ervan verwacht hadden. Vooreerst is het bijbrengen van zo'n complexe vaardigheid niet realiseerbaar binnen

Tabel 1 *Resultaten op de voor-, na- en retentietoets bij de experimentele en de controlegroep*[3]

	voortoets	natoets	retentietoets
experimentele groep	60%	80%	79%
controlegroep	58%	60%	–

de ene lestijd die nog beschikbaar was. Dan hebben we het nog niet over het verwerven van een op systematische controle gerichte houding door de leerlingen.

7. *Resultaten van de experimentele leergang*

Eerst worden de resultaten op de collectieve voor- en natoets en de retentietoets besproken. Vervolgens geven we de resultaten op de individuele toets weer. Tenslotte vatten we de bevindingen samen en formuleren we een aantal kritische bedenkingen bij de inhoud van het experimentele programma en bij de opzet van het verrichte onderzoek.

7.1. *Resultaten op de collectieve toetsen*

In Tabel 1 worden de resultaten op de voor-, na- en retentietoets van de experimentele en de controlegroep globaal samengevat. De getallen geven het procent juiste oplossingen aan. We merken evenwel op dat een antwoord van een leerling uit de experimentele groep op de collectieve natoets en de retentietoets pas dan als correct werd beschouwd, wanneer tevens de letterformule en het schema juist waren ingevuld.

We stellen een grote en stabiele vooruitgang vast bij de leerlingen uit de experimentele groep, terwijl de resultaten op de voor- en de natoets bij de controlegroep nauwelijks verschillen. De leerlingen die de experimentele leergang volgden, losten bij de natoets gemiddeld vier opgaven meer correct op.

Na deze globale analyse gaan we eerst uitvoeriger in op de eerste zeventien opgaven uit de collectieve toetsen. Zoals reeds in 3.1. vermeld werd, behoren ze alle tot opgaventypes die hoewel niet veelvuldig dan toch expliciet in de loop van de experimentele leergang behandeld werden. Ook in de beide controleklassen werden door de leerlingen minstens evenveel soortgelijke enkelvoudige en complexe formule-opgaven opgelost tussen de afname van de voor- en de natoets. In Tabel 2 geven we de resultaten van de leerlingen uit de experimentele groep, uitgesplitst enerzijds naar enkelvoudige en complexe opgaventypes en anderzijds naar drie niveaugroepen van leerlingen (hoog-, midden- en laag-groep) die we op basis van de voortoetsuitslagen onderscheiden hebben.

De leerlingen uit de middengroep maakten de grootste absolute vooruitgang. Die is vooral te wijten aan de opvallend grote stijging van het aantal correcte antwoorden op de enkelvoudige opgaven. Een gelijkaardige doch minder uitgesproken tendens vinden we bij de leerlingen uit de laagste niveaugroep. De zwakke prestaties van deze groep op de complexe opgaven dienen voornamelijk op rekening geschreven te worden van de twee leerlingen waarover we het reeds hadden in 6.4. Niemand uit de hoogste niveaugroep maakte in de natoets nog een fout op de enkelvoudige opgaven.

In een verdere analyse hebben we de verhouding nagegaan tussen de fouten op het vlak van het denkend en het technisch rekenen in de voor- en de natoets. Gezien de doelstellingen en de uitbouw van de leergang verwachtten we dat enkel het aantal fouten op het vlak van het denkend rekenen bij de experimentele groep drastisch zou afnemen. Uit Tabel 3 blijkt dat dit inderdaad het geval is.

Tabel 2 *Resultaten op de enkelvoudige en complexe opgaven uit de voor- en natoets bij de drie niveaugroepen van de experimentele klas (n=27)*

	H-groep (n=9)		M-groep (n=9)		L-groep (n=9)	
	voortoets	natoets	voortoets	natoets	voortoets	natoets
10 enkelvoud. opg.	92%	100%	71%	94%	55%	75%
7 complexe opg.	85%	94%	65%	77%	30%	43%

Tabel 3 *Aantal fouten op het gebied van het technisch (T) en het denkend (D) rekenen in de voor- en natoets bij de experimentele en de controlegroep*[4]

	voortoets		natoets	
	T-fouten	D-fouten	T-fouten	D-fouten
experimentele groep	31	182	39	72
controlegroep	27	182	30	170

Wat de inadequate handelingsstructuren betreft, die geleid hebben tot de 111 fouten op de natoets bij de leerlingen uit de experimentele groep, volstaat een verwijzing naar 6.4. De vier foutieve denkwegen die daar onderscheiden en besproken werden, stelden we ook vast tijdens de natoets in de experimentele klas.

Met het opnemen van drie transfer-opgaven in de collectieve toets (zie 3.1.) en het aanbieden van een retentietoets één maand na de afloop van de experimentele leergang beoogden we de vraag naar een eventuele vooruitgang in de cognitieve ontwikkeling van de leerlingen uit de experimentele groep te benaderen (zie paragraaf 1). Gezien het zeer beperkt aantal opgaven, gaat het hier slechts om ruwe, exploratieve gegevens.

De laatste drie opgaven uit de collectieve toets (opgave 18, 19 en 20) noemen we transfer-opgaven, omdat noch in de controleklassen noch in de experimentele klas soortgelijke opgaven aangeboden werden tussen de afname van voor- en natoets. Bovendien verzekerden de onderwijzers van de betrokken klassen ons dat de leerlingen in het verleden nog maar uiterst zelden met dergelijke opgaven geconfronteerd waren. Opgave 18, nl. $6-2=.+3$, is een complexe formule-opgave van een type dat voor de meeste leerlingen vreemd was. In elk geval hadden de leerlingen uit de experimentele groep nooit de deel-geheel-relatie voor een dergelijke opgave opgezocht. Niemand onder hen had reeds de corresponderende letterformule $G-D=D+D$ opgesteld of het bijpassend schema geconstrueerd. Bij de natoets losten 6 van de 25 leerlingen uit de controlegroep deze opgave correct op. In de experimentele groep bedroeg dit aantal 16 op 27; bij deze 16 leerlingen was de corresponderende letterformule correct ingevuld en het schema juist getekend. De opgaven 19 en 20 noemen we transfer-opgaven om een andere reden. De leerlingen uit de experimentele groep moesten hierbij een gekend schema construeren en een gekende letterformule neerschrijven vertrekkende van een redactie-opgave. Ook dit moesten ze voor het eerst doen, aangezien vooraf steeds met formule-opgaven was gewerkt. Als voorbeeld vermelden we opgave 19: Karel komt thuis met 6 knikkers. Hij heeft er vandaag 2 verloren. Vanmorgen had hij er .... Ook bij deze twee opgaven was het aantal correcte antwoorden in de experimentele klas meer dan tweemaal zo groot als in de controlegroep, hoewel de resultaten op de voortoets nauwelijks verschilden.

Voor de resultaten op de retentietoets die enkel van de experimentele groep werd afgenomen, verwijzen we naar Tabel 1. Daaruit blijkt dat 79% van de opgaven correct opgelost werden. Dit is nauwelijks minder dan de resultaten op de natoets, die eenzelfde moeilijkheidsgraad had.

Deze gegevens in verband met de transfer- en de retentie-opgaven wijzen resp. op de wendbaarheid en de stabiliteit van de verworven handelingsstructuren. Ze zijn op zichzelf te beperkt om definitieve conclusies toe te laten, maar rechtvaardigen het aanhouden van de hypothese dat bij leerlingen die de leergang volgen, de cognitieve ontwikkeling vooruitgeholpen kan worden.

7.2. *Resultaten op de individuele toets*

Zoals eerder vermeld, werden zes kinderen uit de experimentele klas en drie kinderen uit de controlegroep individueel onderzocht om na te gaan in hoeverre ze bepaalde mathematische concepten, eigenschappen en denkregels kenden, begrepen en in hun oplossingsgedrag wisten te hanteren. De tien opdrachten uit dit individueel onderzoek hebben we in 3.2. voorgesteld. Aldaar hebben we ook de regels voor de scoring ervan verduidelijkt. Wij beklemtonen nogmaals dat de score niet enkel bepaald werd door het gegeven antwoord, maar tevens door de verantwoording daarvan en de gevolgde oplossingsweg.

Wat de kwantitatieve resultaten betreft, verdubbelden de leerlingen uit de experimentele groep hun gezamenlijke score van de individuele voortoets op de natoets, nl. van 20 op 60 naar 43 op 60, terwijl er bij de leerlingen uit de controlegroep nauwelijks een vooruitgang vast te stellen was, nl. resp. 13 op 30 en 14,5 op 30. Deze grote vooruitgang in de experimentele groep is niet in de eerste plaats te wijten aan een toename van het aantal correcte antwoorden, maar wel aan het feit dat in de natoets veel meer leerlingen spontaan het vereiste begripsschema of een passende eigenschap aanwendden en daarvoor een bevredigende verantwoording gaven. We verduidelijken dit aan de hand van een tweetal voorbeelden.

Bij de eerste opgave (Is $8+4=4+8$?) reageerden verscheidenene leerlingen uit de experimentele groep anders in de natoets dan tijdens de voortoets en ook anders dan de leerlingen uit de controlegroep. Zij begonnen niet onmiddellijk te tellen, doch analyseerden eerst de opgave en vonden de oplossing zonder enige technische rekenoperatie uit te voeren. Een meisje uit de controlegroep loste na twintig seconden deze opdracht correct op en verantwoordde zich als volgt: 'Vier plus acht is twaalf en acht plus vier is ook twaalf. Beide uitkomsten zijn gelijk, dus is $8+4=4+8$'. Op de vraag of dit ook het geval was met andere getallen, durfde ze a priori geen antwoord te geven. Bij dezelfde opgave in de natoets beweerde een leerling uit de experimentele klas dat $8+4=4+8$, omdat bij de optelling de twee getallen van plaats verwisseld mogen worden. 'Als je twee getallen optelt, is het om het even waarmee je begint'.

De 'onoplosbare' opgaven 5 en 6 werden vaak toch opgelost door leerlingen uit de controlegroep en door kinderen uit de experimentele klas bij de voortoets: bijvoorbeeld $7=5+\underline{1}+3$ en $7-\underline{1}=8$. Tijdens de natoets wezen deze laatste bijna allemaal op de onoplosbaarheid van deze opgaven: 'Hoe kan dat nu! De delen samen zijn groter dan het geheel'. Een leerling uit de controlegroep die uiteindelijk, na drie mogelijke antwoorden ingevuld en gecontroleerd te hebben, geen juiste oplossing vond voor $7-.=8$, besloot derhalve dat ze niet oplosbaar was. Doch het duurde een hele tijd alvorens hij tot deze conclusie kwam en hij slaagde er niet in ze te verantwoorden.

Bovenstaande bevindingen laten ons toe de hypothese aan te houden dat de leerlingen uit de experimentele groep doorheen de leergang een heuristische procedure verworven hebben, nl. het analyseren van een probleem alvorens zich op de getallen te richten en aan het cijferen te slaan; tijdens deze fase van probleemanalyse wendden zij de aangeleerde begripsschema's (het gelijkheidsbegrip en de deel-geheel-relatie) spontaan en functioneel aan en ze wisten tevens het gebruik ervan te verantwoorden. Aan de hand van de opgaven 8, 9 en 10 – drie rekenoefeningen die tevens in de collectieve toets voorkwamen – waren we in staat na te gaan in hoeverre de leerlingen uit de experimentele groep bij de natoets spontaan de letterformule en/of het deel-geheel-schema construeerden en de aangeleerde controlehandeling uitvoerden met betrekking tot gewone formule-opgaven. Zoals gezegd, waren uit elke niveaugroep van de experimentele klas twee leerlingen voor het individueel onderzoek geselecteerd. Wij stelden vast dat enkel de twee kinderen uit de middelste niveaugroep spontaan het deel-geheel-schema hanteerden bij het oplossen van de opgaven 8 tot 10. De leerlingen uit de hoogste groep vonden het correcte antwoord zonder een uitvoerige probleemanalyse, doch tekenden achteraf de drie schema's moeiteloos, wanneer wij hen erom vroegen. De twee leerlingen uit de laagste niveaugroep pasten het schema niet toe en slaagden er niet in achteraf de delen en het geheel te identificeren voor de tiende opgave wanneer we hen daar expliciet toe uitnodigden.

Wat het gebruik van de aangeleerde controleheuristiek betreft, stelden we vast dat deze slechts door de helft van de individueel onderzochte leerlingen uit de experimentele klas werd aangewend. Eén onder hen deed dit reeds tijdens de voortoets.

7.3. *Samenvatting en discussie*

Uit de collectieve toetsuitslagen is gebleken dat de experimentele leergang bij deze tweedeklassers een drastische verlaging van het aantal denkfouten op aanvankelijke rekenopgaven heeft teweeggebracht. De analyse van de resultaten op de individuele toets laat toe te besluiten dat deze kwantitatieve prestatieverbetering het gevolg is van een kwalitatieve verandering van het oplossingsgedrag bij deze leerlingen. In de uitslagen op de transfer- en retentie-opgaven vinden we enige aanwijzingen dat de experimentele leergang niet alleen het oplossingsgedrag ten aanzien van aanvankelijke rekenopgaven op korte termijn heeft beïnvloed, maar ook geleid heeft tot handelingsstructuren die stabiel zijn en wendbaar naar anderssoortige mathematische problemen. In die zin zouden we gewag kunnen maken van een vooruitgang van de cognitieve ontwikkeling. Tenslotte stippen we aan dat het succes van de leergang beschouwd kan worden als een aanduiding voor de realiteit van de hypothetische processen uit het model van het probleemoplossingsproces, dat wij in een voorgaand artikel hebben uitgewerkt. We hoeden ons evenwel voor overhaaste en ongenuanceerde conclusies.

Vooreerst blijkt reeds uit de onderzoeksresultaten zelf dat niet alle leerlingen in dezelfde mate geprofiteerd hebben van het experimentele programma.

Vermoedelijk heeft de leergang het meeste vruchten afgeworpen bij de leerlingen van de middelmatige niveaugroep. Voor een aantal leerlingen uit de hoogste niveaugroep was de leergang waarschijnlijk overbodig, terwijl enkele leerlingen uit de laagste groep nauwelijks enige vooruitgang maakten. De klassikale aanpak en het snelle tempo waren o.i. verantwoordelijk voor de afwezigheid van leereffecten bij laatstgenoemde leerlingen.

Verder maken enige inhoudelijke tekortkomingen van de leergang en een aantal bezwaren van methodologische aard dat aan de onderzoeksresultaten en de eruit afgeleide besluiten slechts een voorlopig en hypothetisch karakter kan toegeschreven worden. Tot de inhoudelijke tekortkomingen rekenen we die welke betrekking hebben op de deel-geheel-relatie. Ten eerste, wanneer men werkt met de begrippen 'deel' en 'geheel' wordt het ordinale aspect van het getal enigszins verwaarloosd. Immers, in de tekening van het deel-geheel-schema stelt de rechte lijn geen getallenas voor maar wel een geheel dat verdeeld wordt in een aantal stukken. In de tweede plaats wijst Freudenthal (1979, p. 22) erop dat de deel-geheel-relatie veel te 'pover' is om objecten op diverse parameters te vergelijken. Ten derde kunnen sommige complexe rekenopgaven onmogelijk rechtstreeks met behulp van het gehanteerde deel-geheel-schema opgelost worden. Dit is bijvoorbeeld het geval voor 4+7=10+ . of 6−2= .−4. Dit vonden we noch bij Wolters (1977, 1978), noch bij Mikulina (1969) of Atachanov (1969, 1970) vermeld. Tenslotte kan de vraag gesteld worden of ondanks alles, het benoemen van de elementen van de opgave als deel of als geheel en het kiezen van een gepaste rekenoperatie wel voor alle leerlingen inzichtelijke en bewuste handelingen zijn en geen stereotiepe mechanismen of gememoriseerde trucjes.

Wat de methodologische beperkingen van het onderzoek betreft, wijzen we op de korte duur van het experiment, evenals op de beperkte grootte en de geringe representativiteit van de experimentele groepen.

8. *Besluit*

In een voorafgaand en in het onderhavige artikel hebben we resp. beschreven hoe een groep basisschoolleerlingen onder gegeven onderwijscondities aanvankelijke rekenopgaven oploste en hoe gepoogd werd om door middel van een aantal wijzigingen in de onderwijsleersituatie het grote aantal fouten op deze opgaven te verminderen. Wij hebben daarbij niet gekozen voor een oppervlakkige 'symptoombestrijding', maar voor een fundamentele aanpak waarbij de leerlingen 1. georiënteerd worden op algemene mathematische concepten, zoals het gelijkheidsbegrip en de deel-geheel-relatie, en 2. uitgerust worden met een brede probleemanalysetechniek en een controleheuristiek.

De resultaten van deze exploratieve studie zijn weliswaar voorlopig, toch wijzen ze er op dat systematische beïnvloeding van de rekenhandelingen tot de reële mogelijkheden behoort en dat dit soort onderzoek werkelijk kan bijdragen tot de toetsing van hypothesen betreffende probleemoplossingsprocessen. Aldus is voortzetting gewettigd zowel in theoretisch als in praktisch perspectief. Deze potentiële integratie van een praktische optiek en theoretische bedoelingen is hoopgevend met het oog op het verder onderzoek.

Noten

1. Men kan opwerpen dat deze opgaven wel oplosbaar zijn, nl. door negatieve getallen te gebruiken. Daarom reageerden we als volgt op een leerling die beweerde dat deze opgaven niet opgelost konden worden: 'Inderdaad, nu kunnen wij dit nog niet'.
2. Een bijna woordelijk identieke bedenking vinden we bij Van Eerde & Verhoef (1978, p. 366).
3. Om de uitslagen vlot te kunnen interpreteren en onderling te kunnen vergelijken hebben we voor de procentuele weergave geopteerd. De absolute waarden kunnen desgewenst bij de auteurs bekomen worden.
4. Tabel 3 heeft betrekking op alle opgaven uit de collectieve voor- en natoets; dus ook de fouten op de drie transfer opgaven zijn in deze berekeningen betrokken.

Literatuur

Assink, E. M. H. & N. Verloop, Het aanleren van deel-geheel-relaties in het aanvankelijk rekenonderwijs, *Pedagogische Studiën*, 1977 (54), 130-142.

Atachanov, A. R., De rol van de theoretische kennis voor de cognitieve activiteit bij 7- à 8-jarige kinderen. Onderzoek naar het oplossen van indirecte opgaven, in: *Experimenteel onderzoek naar de problemen bij de vernieuwing van het basisonderwijs*. Tbilisi, 1969. (Uit het Russisch vertaald door A. Pellegrom, I.P.A.W., R.U. Utrecht.)

Atachanov, A. R., Over de relatie tussen kennis en cognitieve ontwikkeling bij 7- à 8-jarige kinderen, in: *Onderwijs aan en ontwikkeling van jongere leerlingen*. Kiev, 1970. (Uit het Russisch vertaald door A. Pellegrom, I.P.A.W., R.U. Utrecht.)

Bodanskij, F. G., Het leren van een algebraïsche oplossingsmethode voor redactie-opgaven door leerlingen van de basisschool, in: V. V. Davydov (Ed.), *De psychologische mogelijkheden van leerlingen van de basis-*

school bij het onderricht in de wiskunde. Moskou, 1969, p. 228-281. (Uit het Russisch vertaald door I.P.A.W., R.U. Utrecht.)

Campbell, D. T. & J. C. Stanley, Experimental and quasi-experimental designs for research on teaching, in: N. L. Gage (Ed.), *Handbook of research on teaching*. Chicago, Rand McNally, 1963, p. 171-246.

Case, R., Piaget and beyond: toward a developmentally based theory and technology of instruction, in: R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology. Vol. I.* Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum, 1978, p. 167-228.

Case, R., Implications of Developmental Psychology for the Design of Effective Instruction, in: A. M. Lesgold, J. W. Pellegrino, S. D. Fokkema & R. Glaser (Eds), *Cognitive psychology and instruction*. New York, Plenum, 1978a, p. 441-464.

Corte, E. de & L. Verschaffel, Kwalitatief-psychologische analyse van het oplossen van aanvankelijke rekenopgaven bij 6- à 8-jarige basisschoolleerlingen, *Pedagogische Studiën*, 1980 (57) 383-396.

Davydov, V. V., De introductie van het begrip grootheid in de eerste klas van de basisschool (een experimenteel onderzoek), in: C. F. van Parreren & J. M. C. Nelissen (Eds), *Rekenen*. (Teksten en analyses Sovjet-psychologie 2.) Groningen, Wolters-Noordhoff, 1977, p. 1-59.

Eerde, D. van & L. Verhoef, Analyse van het optellen en aftrekken in de basisschool. *Pedagogische Studiën*, 1978 (55) 354-367.

Freudenthal, H., Lessen van Sovjet-rekenonderwijskunde, *Pedagogische Studiën*, 1979 (56) 17-24.

Frijda, N. H. & J. J. Elshout, *Probleemoplossen en denken*, in: J. A. Michon, E. G. J. Eijkman & L. F. W. de Klerk (Eds), *Handboek der psychonomie*. Deventer, Van Loghum Slaterus, 1976, p. 413-446.

Greeno, J. G., The structure of memory and the process of solving problems, in: R. L. Solso (Ed.), *Contemporary issues in cognitive psychology*. Washington, Winston, 1973, p. 103-131.

Landa, L. N., Instructional grammar and types of thinking activity, in: *Proceedings of the XVII international congress of applied psychology*. Luik, 1971.

Mikulina, G. G., Algebraïsering van het aanvankelijk wiskunde-onderwijs en het denkniveau van de leerlingen, in: V. V. Davydov (Ed.), *De psychologische mogelijkheden van leerlingen van de basisschool bij het onderricht in de wiskunde*. Moskou, 1969. (Uit het Russisch vertaald door Zuzanna Nelissen & Myriam A. D. Wolters, I.P.A.W., R.U. Utrecht.)

Parreren, C. F. van & J. A. M. Carpay (Eds), *Sovjetpsychologen aan het woord*. (Leerpsychologie en onderwijs, 2.) Groningen, Wolters-Noordhoff, 1972, 400 pp.

Parreren, C. F. van, Algoritmen en heuristieken in het onderwijs, *Pedagogische Studiën*, 1975 (52) 394-405.

Parreren, C. F. van, *Het handelingsmodel in de leerpsychologie. Rede ter opening van de lessen in het kader van de buitenlandse Francqui-leerstoel aan de Vrije Universiteit Brussel*. Brussel, Vrije Universiteit, 1979, 23 pp.

Parreren, C. F. van, Onderzoek van de cognitieve ontwikkeling in de Sovjetunie, in: W. Koops & J. J. van der Werff (Eds), *Overzicht van de ontwikkelingspsychologie*. Groningen, Wolters-Noordhoff, 1979, p. 195-214.

Streefland, L., Cognitieve ontwikkeling en wiskunde-onderwijs, *Pedagogische Studiën*, 1980 (57) 344-357.

Verschaffel, L., *Kwalitatief-psychologische analyse en beïnvloeding van het probleemoplossend denken. Een onderzoek met elementaire rekenopgaven bij zes- à achtjarige kinderen*. (Niet-gepubliceerde licentiaatsverhandeling.) Leuven, Faculteit der Psychologie en Pedagogische Wetenschappen, 1979, XVI-209 pp.

Wolters, M. A. D., *Het oplossen van mathematische problemen op de basisschool geanalyseerd en onderzocht vanuit ontwikkelingspsychologisch perspectief*. (Project Redactiesommen. Interimrapport IV.) Utrecht, Rijksuniversiteit Utrecht, I.P.A.W., Vakgroep Ontwikkelingspsychologie, 1977, 111 pp.

Wolters, M. A. D., *Van rekenen naar algebra. Een ontwikkelingspsychologische analyse*. (Doctoraatsproefschrift.) Utrecht, Rijksuniversiteit Utrecht, 1978, 180 pp.

Curricula vitae

Zie Pedagogische Studiën, 1980 (57) p. 396.