Lessen van Sovjet rekenonderwijskunde

H. F. FREUDENTHAL
I. O. W. O., Utrecht

Samenvatting

Het cognitief onderzoek naar rekenpotenties van kinderen uit de school van Davydov wordt in zijn historisch verband en in het verband van het Sovjet-Onderwijs geplaatst. De denkbeelden van Davydov worden als zodanig en qua realisering geanalyseerd, aan wiskundige inzichten gerelateerd en met Westerse ontwikkelingen vergeleken. Hierbij wordt aangeknoopt een beschouwing over de didactische zin en onzin van denksommen aan de ene kant en van algebraïsering aan de andere kant.

1. Inleiding

Er is groeiende belangstelling in het Westen voor Sovjet-pedagogiek en pedagogische psychologie, speciaal wat rekenen en wiskunde betreft. Hiervan getuigen onder meer de Engelse vertalingen van Sovjet-literatuur[1 2 3], een analyse van onderzoek uit de kring van Davydov door Freudenthal[4], een uitgave – kort geleden – in het Nederlands van werk uit dezelfde kring[5] en tenslotte een aantal opstellen [6789] ten dele refererend, ten dele produktief in Nederlandse tijdschriften.

Sovjet-onderzoek, voor zover toegankelijk gemaakt, roept een verwarrend beeld op. De rekendidactische opstellen in[1] delen IV-VI zijn zo teleurstellend, dat men zich afvraagt waarvoor ze vertaald zijn. Krutetskii's boek[2] is, hoewel theoretisch zwak, een bron van inspiratie, die veel te lang op een vertaler heeft moeten wachten. Het verzamelwerk dat tot mijn analyse[4] aanleiding gaf, bevat bijdragen van zeer laag niveau naast bijdragen die wel de moeite van lezen, maar door ondragelijke langdradigheid niet de moeite van het vertalen waard zijn. De Nederlandse uitgave[5] is zowat het beste dat uit de kring rond Davydov vertaald is. Een groot raadsel is Davydov zelf – uitstekend werk in[5] (1965), dat schrijnend contrasteert met later werk (1969) (in de in[4] geanalyseerde verzameling). Ik heb er mijn verklaring voor en ik loop erop vooruit: bekwame onderzoekers gevangen in het spinneweb van een traditioneel rekenonderwijs, met als gevolg krampachtige worstelingen die zich in polemiek en ideologieënstrijd[10] uiten.

2. Historie – van Babylonië tot de 'Kinderexamens'

Onderzoek van onderwijs is, indien relevant, in hoge mate door het vigerende onderwijs en het heersende onderwijssysteem en zijn filosofie bepaald. Wat men zwart op wit omtrent onderzoek van onderwijs gerapporteerd ziet, hoort in zijn juiste context te worden geplaatst om goed begrepen en voor eventuele overdracht geschikt gemaakt te worden. Op wie met Westers reken- en wiskunde-onderwijs in zijn diverse nationale schakeringen vertrouwd is, komt het Sovjet-onderzoek van onderwijs vreemd over. De pogingen in het Westen om er belangstelling voor te wekken, zijn dan ook geïsoleerd en nog weinig effectief geweest. Voor beter begrip van wat het Sovjet-onderwijs scheidt van het Westerse, althans in rekenen-wiskunde, is een historische uiteenzetting onmisbaar. Kernpunt is dan wat men bij ons redactiesommen noemt (in 't Engels *word problems*, in 't Duits *Textaufgaben* of *eingekleidete Aufgaben)*.

Naast die van het type 'één ei kost zoveel,hoeveel kosten 12 eieren' of omgekeerd, kent men vanouds de 'denksommen':

'Een steen weegt een pond plus de helft van zijn gewicht'.

'Op een boerderij zijn er kippen en konijnen met samen 10 koppen en 26 poten; hoeveel kippen en hoeveel konijnen?'

'Van een verjaardagspartij van 10 kinderen gaat de helft van de jongens weg; 6 kinderen blijven er over; hoeveel jongens waren er en hoeveel meisjes?'

'A doet een werk in 3 uur, B doet het in 4 uur; hoe lang doen ze er samen over?'

'Twee voertuigen rijden elkaar tegemoet van een afstand van 100 km; het ene met een snelheid van 15 km per uur, het andere met een snelheid van 25 km per uur; waar en wanneer ontmoeten ze elkaar?'

'Jan en Piet wonen op hetzelfde adres en werken op hetzelfde bedrijf; Jan fietst 20 minuten over die afstand, Piet doet er 30 minuten over; Jan vertrekt 5 minuten later dan Piet; waar haalt hij Piet in?'

'Een forens pleegt precies op tijd door zijn vrouw met de auto van het station te worden afgehaald; een keer neemt hij een trein die precies een uur vroeger aankomt en loopt de auto tegemoet, waardoor ze 10 minuten eerder dan gewoonlijk thuis zijn; hoe lang was hij onderweg toen hij zijn vrouw ontmoette?'

'Een vader laat 100 goudstukken aan zijn vijf zoons na; de erfenis moet zo worden verdeeld dat ieder een goudstuk minder krijgt dan zijn naastoudere broer; hoeveel krijgt elk afzonderlijk?'

Onder deze vraagstukken zijn er van eerbiedwaardige ouderdom, zó uit de spijkerschrift-teksten van 5000 jaar geleden. Ze dienden om – zei men – het verstand te scherpen. In elk geval waren ze nog ruim een halve eeuw geleden een geliefd selectiemiddel om de knapste jongens [11] eruit te lichten, voor een toekomstige carrière als onderwijzer of boekhouder.

Een goede schoolmeester wilde uiteraard veel knappe jongens afleveren en dus ging hij zijn leerlingen in dit soort sommen trainen voor de toelatingsexamens van het voortgezet onderwijs. Hij vond de nodige steun bij de auteurs van rekenboekjes en bij de uitgevers van de 'Toetsnaald'. In de edele wedstrijd tussen de producenten van opgaven voor de 'kinderexamens' en de schoolmeesters zocht de ene partij het in steeds nieuwe complicaties en de andere in het inoefenen van een beperkt aantal types sommen. Het aantal bassins en het aantal kranen die om strijd water van het ene naar het andere bassin moesten leiden, het aantal koffiesoorten of wijnen van uiteenlopende kwaliteit en prijs, die gemengd moesten worden, het aantal werklieden die samen aan de slag gingen, bleef groeien. Een typisch voorbeeld: de hond die per minuut zoveel sprongen van zoveel meter doet, en de haas met zoveel sprongen van zoveel meter per minuut en zoveel voorsprong, die door de hond moest worden ingehaald.

De kritiek op dit soort rekenonderwijs was ook niet mals. Grappenmakers constateerden dat de leerlingen volgens de aangeleerde recepten met evengroot gemak vraagstukken oplosten als:

'Een vader doet een weg in 4 uur, zijn zoon doet hem in 3 uur: hoe lang doen ze er over als ze samen op weg gaan?'

'3 blaffende honden kunnen 20 mensen 5 uur wakker doen liggen; hoe lang kunnen 5 blaffende honden 15 mensen wakker houden?'

De meer serieuze kritiek was, achteraf bekeken, minder principieel dan die der grappenmakers. Men keerde zich tegen overdrijvingen, maar koesterde toch een geloof in gesystematiseerde oplossingsmethoden, zoals de denkpsychologie scheen aan te dragen.

Nu is er inderdaad één systematische methode om dergelijke vraagstukken op te lossen: die van de algebra: 'Noem wat onbekend is x (of als er meer zijn x, y, z enz.), schrijf alle relaties op waaraan de onbekenden voldoen en los de ontstane vergelijking (of vergelijkingen) volgens de regels van de kunst op: Het vraagstuk van de steen – stel zijn gewicht x, dan is $x = 1 + \frac{1}{2}x$, dus $x = 2$. Of de kippen en konijnen, x en y naar aantal, dus $x + y = 10$, $2x + 4y = 26$, dus $x = 7$, $y = 3$. Of de verjaarpartij, x jongens en 10-x meisjes, dus $\frac{1}{2}x + (10-x) = 6$, dus $x = 8$. En ga zo maar door. Maar de lol is er dan natuurlijk van af. Als je een keer over de algebraïsche routine beschikt, zijn dit soort vraagstukken geen 'denksommen' meer om het 'verstand te scherpen'. Willen ze dit doel vervullen, dan moet de leerling er juist mee worden geconfronteerd, wanneer hij nog niets van algebra afweet, in het rekenonderwijs. Vraagstukken, die de scherpte van het verstand moeten toetsen, zijn uiteraard een slag in de lucht, als de leerling als het ware in de algebra kan 'spieken'. Of – een ander beeld – met de kabelbaan naar de top van een berg, terwijl van je verwacht werd, dat je het ploeterend per pedes apostolorum doet.

3. *Historie – onze eeuw, hier en in de Sovjet-Unie*

Inmiddels zijn de absurde en de ingewikkelde redactiesommen uit het rekenonderwijs verdwenen, zoals rekenboekjes en – ten onzent – de CITO-toetsen kunnen getuigen. Het zou de moeite waard zijn, zoals bij heel wat andere veranderingen, uit te zoeken, wat er de oorzaak van geweest is, of veeleer hoe de diverse oorzaken samengespeeld hebben om deze veranderingen te bewerken.

Argumenten van gezag, zoals in Nederland door Kohnstamm te berde gebracht, hebben er zeker een rol bij gespeeld, maar dat die argumenten effect konden sorteren, was – dunkt me – veeleer aan sociale factoren te danken, die zich uitten in een feitelijke en juridische verandering van het schoolsysteem. De uiteindelijke selectie voor het beroep wordt naar steeds hogere leeftijden verschoven en voorbereid door een trapsgewijze selectie, waardoor de cesuur tussen lager en middelbaar onderwijs gerelativeerd wordt – zie het verdwijnen van het toelatingsexamen in ons onderwijssysteem.

Wat die redenen ook mogen zijn, er is op de algemene trend één uitzondering: de Sovjet-Unie. Ook daarvan zou het de moeite waard zijn, de oorzaken op te sporen. Overdracht van traditionele waarden, die men als cultuurgoederen beschouwt, is een onmiskenbaar principe van het Sovjet-onderwijs. Dit èn de behoefte, in een reusachtig onderwijssysteem *uniformiteit* te handhaven, leidt er toe, dat men alles tracht te vermijden, wat breuken in de traditie zou kunnen veroorzaken. Dat schijnt dan ook tot nu toe, althans wat de redactiesommen betreft, in de Sovjet-Unie gelukt te zijn. Tegenover de breuk in de rest van de wereld valt er een verbazingwekkende continuïteit te constateren. De in[1] toegankelijk gemaakte Sovjet-literatuur over de didaktiek der redactiesommen laat serieuze inspanningen zien, om de redactie-opgaven uit het aanvankelijk rekenonderwijs volgens, zeg, 20 typen te classificeren en te onderwijzen, hetgeen betekent dat de leerling kenmerken – 'cues' wordt zoiets in de Amerikaanse didaktiek genoemd – aan de hand worden gedaan om het type vraagstuk dat hij voor zich heeft, te herkennen en in elk apart geval de meest gewenste oplossingsmethode toe te passen. Bijvoorbeeld in het geval van de kippen en konijnen: stel dat het allemaal kippen waren, hoeveel poten hou je dan over? Of bij de treinen die elkaar tegemoet rijden: tel de snelheden op. Of als de treinen achter elkaar aan rijden, trek de snelheden af. Of bij de erfenis: de middelste broer ontvangt het gemiddelde.

Wiskundigen van groot gezag konden het zich permitteren dit rekenonderwijs te bestrijden. Zonder veel succes. In de jaren dertig schreef de vermaarde wiskundige A. Ja. Hinčin (Khintchine) (volgens de bron van[4]:

> Ik verzeker absoluut, dat vrijwel alle rekenkundige denk-opgaven, die de grenzen van het simpele rekenwerk overschrijden, hetzelfde karakter dragen; het zijn geheel algebraïsche opgaven, die doelen op het opstellen van lineaire vergelijkingen of systemen van lineaire vergelijkingen. Natuurlijk, als men wil, mag men altijd voor de prijs van smakeloze kunstjes en duistere methoden de hele noodzakelijke algebraïsche analyse van het vraagstuk in woorden vertalen, zonder formules en letteraanduidingen . . . maar ik hoop, dat ik niet alleen ben in mijn grondige afkeer van dit soort 'rekenkundige' oplossingen. Waarvoor dient dit? Welk 'bevattingsvermogen', welke algemeen waardevolle geestelijke bekwaamheden kan men bij het kind ontwikkelen, als men het dwingt tot zulke onnatuurlijke, instinctief afstotende oefeningen? In de algebra, in de 7ᵉ klas, leert men dergelijke vraagstukken gemakkelijk, natuurlijk, haast mechanisch op te lossen. Het is net, alsof men soldaten in het eerste dienstjaar met geweren van, zeg maar, vóór Peter de Grote, zou laten oefenen, om hun pas later een modern model in handen te geven.'

En over de efficiëntie van die methoden zegt Hinčin:

> Ik moest eens bij de goede onderwijzers van de 5ᵉ klassen informeren, hoeveel percent van de leerlingen feitelijk leren de rekenkundige opgaven op te lossen, die boven eenvoudige rekensommen uitgaan, d.w.z degene waarbij de oplossingsmethode, hoe eenvoudig ook, door de leerlingen zelf gevonden moet worden. Van alle ondervraagde onderwijzers antwoordde er één, dat tot aan de 15% erin slagen, deze kunst te leren; alle anderen zeiden, dat slechts enkelingen deze kunst verwerven; sommigen verklaarden zelfs, dat 'het onmogelijk was deze kunst in 't algemeen te onderwijzen'. Natuurlijk kan de leerling, wanneer hij een hele reeks gelijksoortige opgaven gedaan heeft, zonder moeite een opgave van precies hetzelfde type oplossen (en dit verklaart waarom repetities en examens geen volledige fiasco's zijn); maar dat de leerling zelfstandig de oplossing van een nieuwe opgave vond – hoe eenvoudig ook van type – dit is volgens unaniem oordeel der onderwijzers iets wat alleen bij uitzondering kan worden bereikt.

Aldus Hinčin's betoog. Zijn stem werd niet gehoord. Wanneer jaren later de discussie wordt hervat, is het voornamelijk de leuze 'algebraïsch versus rekenkundig' die weerklank vindt. Ik zal later duidelijk maken dat die leuze onjuist is – zoals alle leuzen een simplificatie. Ons past heden een meer genuanceerde benadering.

Maar laten we dan voorlopig die termen gebruiken. De argumenten in de Sovjet-literatuur ten gunste van de rekenkundige methode waren van tweeërlei aard: Aan de ene kant de vormende waarde – de denksommen zouden de geest scherpen en daar is de leeftijd van 7-10 de juiste tijd voor; aan de andere kant, omdat de kinderen dan nog niet aan algebra toe zijn. Het getalbegrip in deze periode zou op konkrete interpretatie en direkte perceptie berusten; de kinderen zouden derhalve tot het begrip van 'empirische' getallen en relaties beperkt zijn; aan 'algemene' getallen, zoals door letters gesymboliseerd en relaties, zoals in formules uitgedrukt, zouden de kinderen nog niet toe zijn. Deze tegenstelling van 'empirisch' en 'algemeen' (soms ook 'praktisch' en 'theoretisch'), die in de Sovjet-filosofie, psychologie en pedagogische psychologie telkens terugkeert, doet wat dilettantisch of op zijn minst ongenuanceerd aan. Ik weet er – ook met Westerse toelichtingen erbij – geen raad mee en sla de fervente ideologisch getinte discussies daarover met genoegen over.

4. *Historie – Davydov*

In de jaren zestig werden er pogingen gedaan de dogmatisch vastgestelde fasering van 'empirisch' en 'algemeen' getalbegrip aan het wankelen te brengen. Menčinskaja en Moro worden hiervoor geciteerd: algebraïsche oplossingsmethoden in een ontwikkelingsperiode, die volgens de heersende opvatting voor rekenkundige methoden was gereserveerd. Davydov ging een belangrijke stap verder. Terwijl Menčinskaja en Moro 'algemene' getallen als generalisatie van 'empirische' onderwezen en het onderwijs in operaties op algemene getallen baseerden op de vertrouwdheid met dezelfde operaties met empirische getallen, stelde Davydov een radicalere benadering voor:

> Zodoende is de algebraïsering van aanvankelijke wiskunde uit psychologisch oogpunt direct verbonden met het probleem van abstractie en generalisatie. Een der mogelijke (en meest verbreide) methodes is dat het werken met lettergegevens verschijnt als generalisatie van voorafgaande bewerkingen met concrete getallen (cijfers), als een hoger niveau van abstractie... Er is echter een andere opvatting mogelijk waarbij de algebraïsering *kwalitatief* verschilt van de weg naar generalisatie van mathematische abstractie bij jonge leerlingen. De relatie tussen concrete en algemene getallen dient herzien te worden... Lettersymboliek is met succes geïntroduceerd als middel om *relaties tussen grootheden* te beschrijven, en dat in een stadium waar van numerieke getallen nog geen sprake is... Van meet af aan werd het getal geïntroduceerd als algemeen begrip van de relatie tussen twee grootheden waarvan de ene in de andere wordt uitgedrukt...

Davydov laat – dit is vooral duidelijk in zijn werk onder[5] – het opereren met grootheden voorafgaan aan dat met getallen en hij schroomt niet hierbij met algemene niet numeriek bepaalde grootheden te werken, de grootheden met letters aan te duiden en de bewerkingen op en relaties tussen die grootheden in lettervergelijkingen vast te leggen. Hierin moet men de eigenlijke verdienste van Davydov zien; in het idee (met in casu als paradigma het getalbegrip), dat algemene voorstellingen, begrippen, inzichten niet noodzakelijk via generalisatie worden verworven – een denkbeeld dat ik deel en in grotere algemeenheid elders met nadruk heb geponeerd[12].

5. *Terminologie – grootheden*

Alvorens verder te gaan, moeten we duidelijkheid scheppen in de vrij verwarde terminologie die in de Sovjetonderzoekingen en de daaruit afgeleide literatuur rond de termen 'algebra' en 'algebraïsche methode' heerst.

Bij 'algebra' denken we aan bijvoorbeeld negatieve getallen, haakjes, machten, wortels, vergelijkingen en – last not least – letters. Negatieve getallen komen in de Sovjet methoden, die zich algebraïsch noemen, niet voor. In het Westen is juist aan negatieve getallen op basisschool-leeftijd veel aandacht besteed – ik laat in 't midden of dit terecht is geschied, in 't bijzonder of hetgeen op basisschool-leeftijd met negatieve getallen *kan* worden bereikt, de toets doorstaat van wat de *zin* van de negatieve getallen is.

De algebra van de basisschool à la Davydov is tot het positieve (en de nul) beperkt – een vreemd lijkende situatie als men voor de algebra het formele criterium van onbeperkte uitvoerbaarheid van alle operaties (dus ook van de aftrekking) beslissend acht. Toch is deze beperking minder vreemd dan het lijkt. Davydov's schoolalgebra is – zoals duidelijk wordt gezegd – een algebra van *grootheden*. Ik kan hier niet uitleggen wat de wiskundige onder grootheden verstaat. Men neme genoegen met voorbeelden zoals lengte, oppervlakte, inhoud, gewicht en met het opsommen van enige eigenschappen: Ten aanzien van een grootheid kunnen objecten op rangorde vergeleken worden (groter-kleiner, meer-minder, voller-minder vól, zwaarder-lichter), opgeteld en afgetrokken worden (het kleinere van het grotere), onbeperkt verdeeld worden.

Deze eigenschappen karakteriseren het begrip grootheid nog niet volledig, maar laat ik me nu daartoe beperken. Het voornaamste model van grootheid is uiteraard lengte.

Grootheden, in 't bijzonder lengte, als bron of medebron van het getalbegrip zijn ook voor het Westen niet nieuw. Wie kent niet de Cuisinaire-staafjes, getallen door lengtes gerepresenteerd – om van ouder Froebel-materiaal te zwijgen.

Cuisinaire-staafjes representeren de getallen van 1 tot 10 – een weinig flexibel instrument vergeleken bij de getallenlijn, mèt of zonder priori nummering, genummerd of alleen gemerkt, in sprongen van eenheden of van tientallen of vijftigtallen of honderdtallen of van deelmerken en nummers voorzien of met eenheden die in breuken zijn onderverdeeld, of, als het moet, ook naar de negatieve kant voortgezet[13]. Ik heb eens de getallenlijn de belangrijkste wiskundige aanwinst van het rekenonderwijs in de laatste decennia genoemd – belangrijk vooral ook omdat de getallenlijn het enige model voor het getalsysteem is dat definitief geldig blijft – van de kleuterschool tot de hoogste wiskunde toe.

Dit sluit andere modellen niet uit. Liefst nog flexibeler dan de getallenlijn zijn 'stroken', die bepaalde en onbepaalde waarden van grootheden representeren en operaties van vergelijken (volgens lengte), optellen (door aanplakken), aftrekken (door afknippen), delen (door doorknippen) ondergaan.[13] Blokken, waar muurtjes en torentjes uit worden gebouwd, van verschillende vorm en afmeting zijn een ander, in bepaalde situaties even flexibel voorbeeld.[13] Tenslotte mogen meetactiviteiten van al dan niet numeriek karakter in het aanvankelijk rekenonderwijs niet worden vergeten.

Er is in 't Westen een streven om het getal en de bewerkingen erop vanuit een grote verscheidenheid van uitgangspunten te ontwikkelen al zou ik niet willen beweren dat de rekenboekjes, ook de meer moderne, dit weerspiegelen. Veel heeft nog een experimenteel karakter. De aanzetten in de kring rond Davydov zijn hierbij vergeleken te smal en dogmatisch beperkt: er is uit de grote potentiële verscheidenheid van instappen vanuit de realiteit naar rekenkundig-wiskundige objecten, bewerkingen en eigenschappen telkens één enkele gekozen, degene die het beste in het systeem past, terwijl andere relaties met de realiteit achteraf desnoods in de oefenstof zijn verwerkt. Wat valt er desondanks van te leren?

6. *Terminologie – algebra*

Ik herinner er nog eens aan dat algebraïsch in de zin van Davydov niet omvat, wat normaal algebra wordt genoemd. Het is een algebra niet van getallen, maar van grootheden. De logische sequentie op de achtergrond van Davydov's analyse is:

(1) Ontwikkeling van het mentaal object getal vanuit grootheden,
(2) Onbepaalde grootheid didactisch voorafgaande aan bepaalde grootheid,
(3) Notatie van onbepaalde grootheden door letters en hun relaties door lettervergelijkingen,
(4) Formeel werken met letters en lettervergelijkingen.

Met (4) begint pas de algebra, maar hieraan komt Davydov niet toe. Indien zoiets in 't geheel op basisschool-niveau mogelijk zou zijn, dan zeker niet met Davydov's aanzetten, waarbij letteruitdrukkingen telkens weer niet als algebraïsche grootheid, maar als 'verhaal' worden geïnterpreteerd en derhalve algebraïsche transformaties op algebraïsche uitdrukkingen uit het gezichtsveld blijven.[13a].

Wat (1) betreft, is er in het Westen ervaring van grote verscheidenheid opgedaan, met dien verstande dat naast de benadering via grootheden de cardinale en de ordinale zeker gelijkwaardige rollen spelen. Zelfs indien die via grootheden de voorkeur zou verdienen zou een overmatige beklemtoning ervan averechts uitwerken: de voorschoolse ervaringen van de kinderen, de verwachtingen van de ouders en de gewoontes van de onderwijzers zouden zulk een scherpe breuk met de traditie niet gedogen.

De nadruk die Davydov op (2) legt is mijns inziens terecht. Althans dient er bewuster dan tot nu toe met mogelijke voordelen die deze visie biedt, rekening te worden gehouden. De voorbeelden hiervoor, die men in de Sovjetliteratuur vindt, zijn echter te beperkt. Een inventariserend onderzoek van de Westerse literatuur zal vrijwel zeker meer opleveren dan wat er in de Sovjetliteratuur daaromtrent is te vinden.

(3) is een originele bijdrage van Davydov waarvoor in het Westen, naar ik meen, geen tegenhangers zijn te vinden. Dat (3) een mogelijkheid is, heeft Davydov aangetoond; of het functioneel wenselijk, nuttig, nodig is, is een andere kwestie. Davydov heeft wel aangetoond dat (3) functioneert in het fossiele Sovjet-onderwijs van redactiesommen. Of het in het Westerse onderwijs functioneel kan zijn, is a priori niet zeker en experimenteel niet bevestigd. Het valt ook niet te bevestigen door proeven die alleen redactiesommen omvatten. Ik zal later uiteenzetten dat dit soort kwasi-algebra ook gevaren inhoudt, die de winsten illusoir kunnen maken.

7. *Redactiesommen*

Wat de feitelijke uitwerking van Davydov's ideeën aangaat, worden we – vergeleken bij de meestal povere Westerse rapportagegewoonten – goed op de hoogte gesteld, door gedetailleerde beschrijvingen en protocollen van lessen. Het gestroomlijnd lijkende, op de onderwijzer gecentreerde onderwijs, waarbij niets aan het toeval schijnt te zijn overgelaten, maakt een vreemde indruk op wie van het Westerse onderwijs alleen die varianten kent, die zich door een open stijl onderscheiden. Het zou onredelijk zijn hierop af te geven.

Ik heb op het einde van paragraaf 4 Davydov's verdienste in het onderzoek naar cognitieve mogelijkheden van kinderen beklemtoond. Wat ik in paragraaf 1 heb gesignaleerd als een vernauwing van visie in zijn ontwikkeling van 1965 naar 1969 is uitermate teleurstellend. Men zou willen dat hij op de eenmaal ingeslagen weg was doorgegaan. Nu komt hij wat het reken-wiskunde-onderwijs aangaat, over als eenzijdig gericht op redactiesommen en dan nog alleen de beperkte types redactiesommen die nu eenmaal het Sovjetonderwijs voor de diverse leeftijden kenmerken. Men krijgt de indruk, dat Davydov de noodzaak voelde zich waar te maken en meende dat te kunnen bereiken door de aanhangers van de 'rekenkundige' oplossingsmethoden op hun eigen terrein te verslaan – hetgeen hem dan ook gelukt is. Althans statistisch bekeken. Ik heb niet de indruk dat zijn ideeën in het Sovjetonderwijs wortel hebben geschoten. Wat de ideologisch getinte polemiek aangaat, verwijs ik naar de eerder aangehaalde uiteenzetting[10].

Wanneer vooraanstaande Sovjet-wiskundigen het Sovjet-rekenonderwijs aanvielen, dan was hun doelwit niet alleen de rekenkundige oplossingsmethode, maar de cultus van de redactiesommen als zodanig. Immers, mochten oorspronkelijk de rekenkundige methoden uitgevonden zijn, om de de geest scherpende denksommen op te lossen, inmiddels werden al lang sommen gecreëerd om de diverse oplossingsmethoden te oefenen en te toetsen. Door in deze vicieuze cirkel te stappen, heeft Davydov voor een opportunistische tactiek gekozen ,en zoiets wreekt zich op den duur.

Het was bovendien jammer, want Davydov's ideeën houden meer in dan oplossingsmethoden voor redactiesommen en wie ze niet uit deze context weet los te maken, blijve liever af van Davydov. Ik beklemtoon nog eens wat ik eerder zei: het getalbegrip als didactisch paradigma voor een leren, waarbij algemene voorstellingen, begrippen, inzichten niet noodzakelijk door generalisatie maar in een directe greep worden verworven. Er is alle reden om deze visie in vernieuwd reken-wiskunde-onderwijs serieus te nemen.

8. *Relatie van geheel en deel*

Er valt echter nog meer op de ontwikkeling rond Davydov aan te merken. Op zeker ogenblik heeft hijzelf of hebben zijn medewerkers een slogan opgegrepen en uitgebazuind, die in hoge mate misleidend is, de slogan van de *relatie van geheel en deel*. Evenals in het Nederlands denkt men in het Russisch bij 'geheel en deel' aan breuken, en mogelijk is de term erin gekomen, toen Davydov zich met de breuken ging bezighouden. Nu weerspiegelt de term 'relatie van geheel en deel' ook al bij breuken een – weliswaar algemeen gebruikelijke, maar desalniettemin – geheel ontoereikende didactiek – het taartverdelen als enig toegang tot breuken. In werkelijkheid treden breuken in een rijk geschakeerde variëteit van contexten op, waarmee al bij de introductie rekening moet worden gehouden. Wanneer Jan half zo oud is als Piet, de ene boom half zo hoog als de andere, de ene steen half zo zwaar als de andere, is er geen sprake van 'geheel en deel' en dit geldt niet pas bij de breuken. Objecten worden qua lengte, oppervlakte, inhoud, gewicht niet vergeleken door middel van de veel te povere geheel-deel-relatie. In 1966 was dit aan Davydov[5] geheel duidelijk; in 1969 (zie [4]) is dit inzicht verduisterd door de slogan van 'relatie van geheel en deel' die als alleen zaligmakend wordt aangeprezen. Davydov's breukendidactiek, hierop gebaseerd, is dan ook geheel ontoereikend – een valkuil waarvoor Westerse onderzoekers dienen te worden gewaarschuwd. Ze is trouwens puur rekenkundig zonder enige aanzet tot algebraïsering.

Ondertussen is in het Westen in de laatste 10-20 jaar ontzaglijk veel aan breuken gedaan. Waar ze zich in het Sovjetonderwijs voor de *redactiesommen* inspanden deden ze in het Westen hun best met *breuken*: pogingen dit onderwijs tot de grootste perfectie te brengen. Ik heb eerder[14] van mijn sceptisisme tegenover deze veel te technische, veel te weinig principiële pogingen doen blijken. Desalniettemin, wat Davydov op dit terrein te bieden heeft, is teleurstellend – beneden het niveau dat we in de Westerse literatuur gewend zijn.

9. *De zin van de denksommen*

Enige verdieping van het hier behandelde is nog vereist. Laten we allereerst terugkeren tot de lijst 'denksommen' aan het begin van dit opstel. Wat is er eigenlijk zo erg aan? Het zijn leuke puzzeltjes waar je – kind of volwassene – plezier in kunt hebben en waar je, als je er plezier in hebt, ook wat van kunt leren. Wat hier fout is, zijn niet de sommen, maar is een didaktiek en een onderwijsfilosofie die er leerstof van maakt, met repetities, proefwerken en examens. Zij die de sommen invoerden, om de geest te scherpen, hebben het goed bedoeld, maar in plaats van 'de geest te scherpen', zouden we tegenwoordig zeggen: om leerlingen te activeren. Het zijn sommen die je elk op velerlei manieren kunt aanpakken en dan ook nog met succes. Ik zei daarstraks dat de term 'rekenkundig versus algebraïsch' niet deugt. De denksommen vragen erom niet volgens een patroon (algebraïsch of anderszins) te worden opgelost, maar *inzichtelijk*. En met inzicht is dan niet dat van de leermeester of leerboekjesschrijver bedoeld, maar dat van de leerling. Zulk een inzicht kan heel primitief zijn. De meest primitieve manier is in al die gevallen: proberen. Maar al proberende vinden de leerlingen kortsluitingen, leren ze omwegen afsnijden en methoden om omwegen af te snijden, ze leren oplossingen vereenvoudigen, en methoden om oplossingen te vereenvoudigen. Ook al vinden ze niet de meest elegante oplossing, ze hebben dan toch iets verworven, dat meer waard is dan een aangeleerd maniertje: het zoeken, methoden om iets te zoeken en de attitude van het zoeken. Daar kunnen de denksommen dienst voor doen: Niet om er examen op te doen, maar om de vrije activiteit van leerlingen en groepen van leerlingen te stimuleren. Modern reken-wiskunde-onderwijs is niet vies van denksommen, maar zal er tegen waken, denksommen tot een viezigheid te laten ontaarden.

10. *Tekst en Context*

En waar blijven de doodgewone, simpele redactiesommen van 'zoveel eieren kosten zoveel'? Activering is heel mooi, maar 'oefening baart kunst'. Akkoord, als het oefenen niet bredere visies belet. De rekenkunde van het dagelijks leven is in een context geplaatst. De leerling moet *teksten* – redactiesommen – leren lezen, maar hij moet ook in *contexten* leren denken en om dat te bereiken, moet veel meer dan tot nu toe in een context – een zinvolle context – worden aangeboden. Als een leerling op de vraag: Hoe ver komt een auto die 1 op 10 rijdt met 50 liter benzine? met de deling van 10 op 50, dus 5 km, antwoordt, dan is de verklaring en de remedie niet, dat hij goede oplossingsmethoden dient te leren, maar dat hij of niet weet wat een kilometer en wat een liter is, of dat hij deze maten niet in een zinvolle context kan plaatsen, misschien omdat hij ze ook nooit in zulk een context is tegengekomen en dat hij dit allemaal hoort te leren. Je helpt hem niet met oplossings*methoden,* maar met oplossings*attitudes*.

11. *Algebraïsering – ten goede of ten kwade?*

Algebraïsche formules zijn ook aan het traditionele rekenonderwijs niet helemaal vreemd: $l \times b$ voor de oppervlakte en $2l + 2b$ voor de omtrek. Wel te verstaan van de rechthoek. Maar ik heb het geformuleerd zoals het in het traditionele onderwijs op de leerling overkomt en door hem gebruikt wordt[15]. Het klakkeloos en door elkaar toepassen van dergelijke formules is het gevolg van prematuur algoritmiseren. Traditioneel reken-wiskunde-onderwijs stevent rechtstreeks en in ijltempo op algoritmen af. Daartegenover zijn methoden ontwikkeld om de algoritmisering bewust uit te stellen, om zolang mogelijk inzichtelijk handelen aan te moedigen. In een leergang 'Oppervlakte', zoals door het IOWO[16] ontworpen, staat de formule voor de rechthoek op het einde van een lange sequentie van qualitatief vergelijken, van vergelijken door knip- en plakprocedures, van roosterapproximaties van kromlijnig begrensde figuren, enz. Dit is een bewuste keuze: voortijdige algoritmisering tegengaan.

Algebraïsering en algoritmisering zijn niet hetzelfde. Het hanteren van algebraïsche formules kan een nuttig algoritme zijn. Het kan ook nutteloos en zelfs schadelijk zijn – dit hangt geheel en al van het leerproces af dat eraan vooraf ging. Algebra in het basisonderwijs is, net als vuur, niet iets om mee te spelen. Zoiets vereist inzicht, niet alleen van de lerende en onderwijzende, maar ook van de onderzoeker – mathematisch en onderwijskundig inzicht.

Noten

1. *Sovjet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*, 6 vol., ed. by J. Kilpatrick and I. Wirszup. Chicago 1969-1972.
2. V. A. Krutetskii, *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago 1976.
3. Besprekingen van uitgaven onder 1 en 2: J. C. van Bruggen and Hans Freudenthal in: *Proc. Nat. Acad. of Educ*. 4 (1977), 201-234, 235-277.
4. H. Freudenthal, Soviet Research on Teaching Algebra at the Lower Grades of the Elementary School. *Eductional Studies in Mathematics* 5 (1974), 391-412.
5. C. F. van Parreren, J. M. C. Nelissen (red.), *Teksten en Analyses Sovjetpsychologie 2*. Groningen 1977.
6. E. M. H. Assink en N. Verloop, Het aanleren van deel-geheel relaties in het aanvankelijk rekenonderwijs. *Ped. Stud.* 54 (1977), 130-142.
7. Miriam A. D. Wolters, Mathematische problemen, oplossingsmethode en de kognitieve ontwikkeling van leerlingen op de basisschool. *Ped. Stud.* 54 (1977), 298-306.
8. Miriam A. D. Wolters en J. N. Streumer, Een bijdrage tot de mathematisering van het rekenonderwijs. *Ped. Stud.* 55 (1978), 169-178.
9. Miriam A. D. Wolters, De opvattingen van Davydov c.s. over onderwijs en cognitieve ontwikkeling. *Tijdschr. v. Onderwijsresearch* 3 (1978), 22-34.
10. M. Otte, Die didaktischen Systeme von V. V. Davidov/D. B. Elkonin einerseits und L. V. Zankov andererseits. *Educational Studies in Mathematics* 6 (1976), 475-497.
11. Alleen om in de stijl van die tijd te blijven, zei ik niet: jongens of meisjes.

12. *H. Freudenthal, Weeding and Sowing* 1978, Chap. IV, sect. 8. 9.
13. Zie bijvoorbeeld Wiskobas Team. Overzicht van wiskunde-onderwijs op de basisschool (Leerplanpublicatie 2). *Wiskobas Bulletin* 5 (1975).
13a. Zie de voorbeelden in [4]: als Kolja vandaag a en morgen b boeken leest, moet dit als a+b worden geschreven en is b+a fout; als een auto c uren met de uursnelheid b rijdt, moet dit als b·c geschreven worden en is c·b fout.
14. *Mathematik als pädagogosche Aufgabe* I, 248-249, Stuttgart 1973, 2. ed. 1977.
15. De traditionele didactiek van oppervlakte wordt goed weerspiegeld in: J. Kooreman en J. B. Wassink, Het onderwijzen van 'oppervlakte' op grond van een expliciete strategie, *Onderwijs & Opvoeding* 25 (1973), 13-19. De verwarring van 'oppervlak' en 'oppervlakte' wordt bekroond door de uitspraak 'De oriënteringsbasis voor het berekenen van de oppervlakte van een rechthoek bestaat uit lengte en breedte.'
16. Wiskobas Team. Oppervlakte (Leerplanpublicaties 6-7). *Wiskobas Bulletin* 7 (1977).