Structuur der wiskunde en wiskundige structuren; een onderwijskundige analyse

H. F. FREUDENTHAL
I.O.W.O. Utrecht

Samenvatting

Het denkbeeld van het wetenschapsstructuur-leerplan *is zonder twijfel uit de wiskunde afkomstig. In het volgende wordt getracht aan te tonen, dat het – althans wat de wiskunde aangaat – op een didactische misvatting berust, op een verwarring van structuur der wiskunde en wiskundige structuren. De didactische tegenpool hiervan is de* rijke niet-mathematische context *als didactisch uitgangspunt en medium – een tegenstelling die misschien ook buiten de wiskunde iets kan betekenen.*

1. *Twee stukjes historie*

Uit de eerste wereldoorlog verrees het zegevierende Frankrijk met dieper wonden dan het overwonnen Duitsland – materieel zowel als cultureel: een hele generatie jonge intellectuelen was op de slagvelden gebleven. Door vergrijsde hoogleraren werd tussen de twee wereldoorlogen aan de Franse universiteiten een vergrijsde wetenschap gedoceerd – althans wat de wiskunde aangaat. In de jaren dertig realiseerde een groep jonge Franse wiskundigen zich de achterstand die ze hadden in te halen. Tien, vijftien jaar later, en de bordjes van het paleis van het wiskunde-onderzoek waren verhangen.

Onder deze jongeren had zich een groep gevormd, die zich onder de schuilnaam Bourbaki een grootse taak stelde: de wiskunde als systeem nieuw te organiseren. In iedere wiskunde-bibliotheek vindt men thans het onvoltooide werk in talrijke delen, waarmee deze groep zich een monument heeft gezet.

'Deze groep' is niet het juiste woord voor wat onder de naam Bourbaki schuilt. De samenstelling is gedurig veranderd, alleen al omdat ze een leeftijdsgrens hanteerden; alleen de naam 'Bourbaki' bleef. Wie er lid van hebben uitgemaakt en thans uitmaken, is niet met zekerheid bekend en nog minder weten we – of geheel niet – wie er wat toe bijgedragen hebben – een uniek verschijnsel van collectieve wetenschapsbeoefening, en dan nog in een land, dat volgens eeuwenoude vooroordelen uitmunt door individualisme, zo niet door ijdelheid en verwaandheid van zijn elite.

Wetenschap *creëren* of *organiseren* lijken uiteenlopende bezigheden – de tweede de mindere van de eerste. Maar in geen wetenschap kunnen ze zo dicht bij elkaar liggen als in de wiskunde: grote creaties waren soms het resultaat van gedurfde reorganisatie. Desalniettemin, het werk van Bourbaki is niet in eerste instantie wiskunde, maar een deductieve codificatie van de wiskunde, een systeem der wiskunde – een systeem dat, nu in wezenlijke trekken achterhaald, veel tot de groei van de wiskunde heeft bijgedragen, en voor de wiskunde wil zo'n standaardformule zeggen, dat ze er inmiddels aan ontgroeid is.

Een eigenmachtig systeem – moet ik eraan toevoegen. Wat hun niet aanstond, wat er niet in paste, werd geweerd en dat was heel wat. De grote wiskundige Dieudonné, een schilderachtig impulsief en desondanks op typisch Franse wijze ridderlijk figuur, was de man die voor dictator speelde om uit te maken wat goede wiskunde was. Ervoor speelde – zei ik – en dat kon je met zijn doen en laten verzoenen. Straks breng ik die acteur terug op een toneel waar zijn dictatorschap – helaas – meer au sérieux werd genomen.

Op 't eind van de jaren vijftig – U kent het woord Spoetnik-shock – werd het Amerikaanse publiek geconfronteerd met een – echte of vermeende – achterstand op de Russen, een achterstand in wetenschap en in techniek, die veroorzaakt zou zijn geweest door een achterstand in onderwijs. Vooral het onderwijs in wiskunde en natuurwetenschappen moest het ontgelden – terecht of ten onrechte, laat ik in 't midden. De wiskunde, op school onderwezen, was zowat een eeuw achter bij de echte wiskunde en daar moest iets aan gedaan worden: 'New Math' werd de slogan; opgepakt door de OEEC, een intereuropese (later als OECD internationale) organisatie van economische samenwerking in Parijs, die zich ook met het onderwijs ging bemoeien en dan als technocratisch instrument ter bevordering van de personeelsvoorziening in de economie. Wat het wiskunde onderwijs betreft, scheepte de OEEC zich met Dieudonné in, de enige wiskundige, die bereid was hun zonder enige aarzeling te vertellen, hoe het met het onderwijs moest. In Royaumont 1959 behaalde hij enorme successen bij een publiek, dat hem niet met het korreltje zout wist te nemen dat hij verdiende, en een jaar later kwam in Dubrovnik het eerste wetenschapsstructuur-leerplan[1] voor de wiskunde tot stand, gespeend van elke onderwijskundige inbreng – wiskunde volgens Bourbaki in laadjes en met schotjes gestructureerd. Dit leerplan baarde een stortvloed van nieuwe van 't zelfde genre. Kritische geluiden waren zeldzaam[2]. Door de OEEC kanalen, rechtstreeks naar de regeringen toe, was het onderwijsveld ten enenmale uitgeschakeld. Zo kon het bijvoorbeeld in de Bondsrepubliek Duitsland gebeuren dat op 3 oktober 1968 een 'Kultusministerkonferenz' in een 'aanbeveling' decreteerde hoe in 't vervolg het rekenen als wiskunde moest worden onderwezen – inmiddels had het idee van wetenschapsstructuur-leerplan ook de basisschool veroverd. Nog geregeld weerklinkt de reactie op dit soort vernieuwing in de dagbladpers.

In ons land is dankzij de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (ingesteld in 1961) en later door haar Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs de boot van New Math afgehouden. Met succes althans wat het basisonderwijs betreft, maar daar dreigde dan ook het grootste gevaar.

Inmiddels is van de wetenschapsstructuur in het wiskunde onderwijs weinig terecht gekomen. De inhoudelijke vernieuwing in 't basisonderwijs is in 't algemeen tot oppervlakkigheden beperkt gebleven zoals driekleurendruk op kunstdrukpapier, of na wansuccessen en protesten teruggeschroefd. Maar als gezonde reactie op de wetenschapsstructurele tendenties is de bezinning op de onderwijskundige component thans harder dan ooit groeiende.

Deze lange historische inleiding was helaas onvermijdelijk. Onderwijskundig geïnteresseerden, die toevallig de naam Bourbaki tegenkomen, zonder de historie te kennen en van het bestaan van wiskundig didactische literatuur iets af te weten, raken er soms van onder de indruk als van een ontdekking die aan Nederland, waar alles een halve eeuw later heet te komen, voorbij zou zijn gegaan. Het onder de indruk raken is terecht, althans indien door meer dan oppervlakkig begrip veroorzaakt. De historische kijk is onjuist, hetgeen de voorgaande schets wilde verduidelijken.

2. *Wiskundige structuren – armer en rijker*

Algemeen gehouden gesprekken over wiskunde kunnen niet meer doen dan de oppervlakte rimpelen. Te veel details kunnen het water vertroebelen. Ik wil trachten het midden te houden om met zo eenvoudig mogelijke voorbeelden zoveel mogelijk diepte te peilen.

Van structuur wordt er in de wiskunde al lang gesproken, in de zin van 'iets *heeft* een structuur'. Nieuw is de wending 'iets *is* een structuur'. Om uit te leggen wat ermee bedoeld is, begin ik met voorbeelden: Een viervlak als structuur bestaande uit 4 hoekpunten, 6 ribben, 4 zijvlakken in hun onderlinge relaties van 'dit hoekpunt ligt op die ribbe, op dat vlak, deze ribbe bevat dit hoekpunt en ligt in dat vlak, dit vlak bevat dit hoekpunt en deze ribbe' – het is, wat je noemt, een *combinatorische* structuur, als je alleen naar deze relaties kijkt en verwaarloost, wat punten nu eigenlijk zijn, dat ribben recht en zijvlakken plat zijn. Wat heb je aan zo'n povere structuur – kun je vragen? Ik wil het kort aanduiden: Met zulke *combinatorische* viervlakken kan men abstracte veelvlakken opbouwen door zijvlakken onderling te identificeren, aan elkaar te plakken als het ware, dus viervlakken als bouwstenen voor grotere structuren te gebruiken.

Maar je hoeft het bij deze combinatorische structuur niet te laten, je mag een viervlak ook echt als ruimtelijke figuur bekijken, met echte punten, ribben, zijvlakken. Ook dit is een structuur, een *meetkundige* structuur. Het viervlak als meetkundige structuur is een *rijkere* structuur dan als combinatorische structuur, met meer body als het ware. Je kunt er meer over vertellen, bijv. zijn ribben, hoeken, oppervlakte en inhoud uitrekenen.

Een viervlak heet ook wel een driezijdige piramide. Of is het omgekeerd: een driezijdige piramide is een viervlak? Maar als dit zo is, hoe kan het dan, dat een *regelmatige* driezijdige piramide niet bepaald een *regelmatig* viervlak hoeft te zijn? Wel, driezijdige piramide en viervlak zijn verschillendsoortige structuren. Een piramide heeft per definitie ook een grondvlak en een top (al mag je de piramide best ondersteboven houden). Van elk viervlak kun je een driezijdige piramide maken – en dat op vier verschillende manieren – door een hoekpunt en overstaand zijvlak tot top en grondvlak te benoemen. De driezijdige piramide is een *rijkere* structuur dan het viervlak.

We gaan nu het viervlak als klei of gelei kneden, persen en vervormen (maar niet stukmaken of wat onsamenhangend is verenigen). De uitkomst kan een nette bol zijn of iets aardappelachtigs of een worst of een soort halter. De hoekpunten, ribben, zijvlakken zijn verdwenen, maar toch is er nog structuur over. Het geval hangt samen en wel op een bepaalde manier, bolachtig, maar (bijvoorbeeld) niet ringachtig. Het is wat je noemt een *topologische* structuur. Het is een armere structuur dan die van het meetkundige viervlak: afstanden, hoeken, rechtlijnigheid spelen geen rol meer.

3. *Wiskundige structuren door relaties gedefinieerd*

Tot nu toe hadden we de mathematische objecten, die we beschreven, evengoed figuren kunnen noemen. Om er echt structuren van te maken, ontbreekt er nog iets: ze structuurmatig beschrijven. Figuren kun je, uitgaande van onderdelen, *construeren*. Iets wat klaar is, kun je ook *structureel beschrijven*. Je merkt tussen de elementen van een figuur zekere relaties op, en om de figuur als structuur te beschrijven, verschaf je je een voldoende stel relaties tussen de elementen ervan. Het gemakkelijkst is dat met het combinatorische viervlak: vier elementen, hoekpunten genaamd, waarvan elk tweetal als ribbe, elk drietal als zijvlak erkend is en met als relatie het bevatten en bevat zijn. Het meetkundige viervlak kan bijvoorbeeld als *metrische* structuur worden beschreven, door van elk tweetal van zijn punten (of alleen de hoekpunten) te constateren, welke onderlinge afstand ze hebben. Moeilijker is het uit te leggen, hoe men een *topologische* structuur beschrijft: door zonder zich op afstanden te beroepen, als het ware kwalitatief, te vertellen, wat dicht bij elkaar ligt – inderdaad de topologie verbiedt het doorknippen en aan elkaar plakken. Als topologische structuur is een cirkelomtrek hetzelfde als een grillige gesloten kromme, maar verschillend van een recht of krom lijnstuk, die onderling topologisch weer hetzelfde zijn.

Meer en sterkere relaties verhogen de rijkdom van een structuur. Verwaarlozen van relaties verarmt, toevoegen van relaties verrijkt een structuur.

4. *Algebraïsche structuren*

Het systeem der 'natuurlijke getallen' 0,1,2,. . .laat zich op verschillende wijzen als structuur opvatten. Met de belofte om op het kardinale aspect later terug te komen, begin ik met het ordinale aspect, de telrij: een *orde*structuur van 'ergens begint het en elk element heeft een opvolger' – hoe de afzonderlijke dingen heten, doet er niet toe. In zo'n structuur kan ik een optelling definiëren: bij twee elementen hoort een derde, zijn som.

Stel nu dat je de oorsprong van deze optelling vergeten bent: je hebt een oneindig stel voorwerpen, door tekens onderscheiden, en een tabel met twee ingangen die bij telkens twee van die voorwerpen vermeldt wat je wenst dat hun som is. De relaties in zo'n systeem zijn van de vorm $a+b=c$. Zoiets noem je een *optel*structuur. Je kunt er eigenschappen van nagaan, bijv. of steeds $a+b$ hetzelfde is als $b+a$. Misschien heb je nog bij het systeem een tweede lijst, afhankelijk of onafhankelijk van de eerste, die bij elk tweetal elementen vermeldt, wat je wenst dat hun *product* is. Dat verrijkt de structuur met relaties van de vorm $u \cdot v=w$.

Structuren van dit soort heten *algebraïsche* structuren. Er zijn er in soorten, met één bewerking, met twee bewerkingen, met nog meer bewerkingen, waarbij dan de bewerkingen aan heel uiteenlopende eisen kunnen voldoen.

5. *Structuren, van kleiner naar groter.*

Onder de algebraïsche structuren zijn de voornaamste en bekendste de getallenstructuren:

De natuurlijke getallen 0,1,2,. . .

De gehele getallen . . .,–2,–1,0,1,2,. . .

De rationale getallen, voorgesteld door breuken zoals $^1/_4$, $-{}^3/_5$, . . .

De reële getallen, waaronder zoiets als $3-\sqrt{2}$, $^1/_2\pi$, . . .

De complexe getallen $a+ib$, met $i = \sqrt{-1}$.

Het is een rij structuren van groeiende *omvang*, niet direct van groeiende *rijkdom*.

De bewerkingen optelling en vermenigvuldiging zijn in alle gevallen dezelfde; de structurerende relaties zijn dezelfde, van het soort

$$a + b = c, \qquad u \cdot v = w.$$

Wel veranderen zekere eigenschappen van deze relaties.

De vergelijking

$$a + x = c$$

is naar x pas algemeen oplosbaar als je negatieve getallen toelaat, de vergelijking

$$u \cdot x = w \qquad (u \neq 0)$$

is naar x pas algemeen oplosbaar als je rationale getallen toelaat,

de vergelijking

$$x \cdot x = k \qquad (k > 0)$$

is naar x pas algemeen oplosbaar in 't gebied van de reële getallen.

$\sqrt{2}$, de oplossing van $x^2 = 2$ kun je niet als breuk van gehele getallen schrijven, maar wel door zulke breuken – rationale getallen – benaderen.

$^3/_2$, $^{17}/_{12}$, $^{577}/_{408}$, ...

zijn telkens betere benaderingen van $\sqrt{2}$. 'Benaderen' is een topologisch begrip. Het gebied der reële getallen – ook der complexe – draagt behalve de algebraïsche ook een topologische structuur; in dit opzicht is het als structuur niet alleen groter, maar ook rijker dan dat der natuurlijke getallen.

6. *De voortbrenging van het getallensysteem*

Het systeem der reële getallen is meetkundig gerepresenteerd door de *getallenlijn*, waarbij elk punt door zijn afstand van het nulpunt een getal verbeeldt – positief aan de ene kant, negatief aan de andere kant van het 'nulpunt'. De algebraïsche bewerkingen worden in dit model door eenvoudige meetkundige afbeeldingen weerspiegeld.

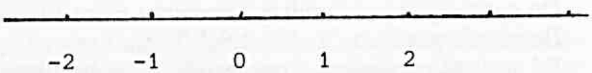

fig. 1

Deze meetkundige benadering van het getallensysteem heeft vanaf de oudheid tot ongeveer een eeuw geleden de wiskunde beheerst. Toen zette de zogenaamde *aritmetisering* in. De reële getallen laten zich door rijen van benaderende rationale getallen definiëren, de rationale getallen als breuken van gehele getallen en de gehele getallen laten zich als natuurlijke getallen beschouwen met al dan niet een min-teken ervoor. Men ging nog een stap verder: de natuurlijke getallen doen wortelen in het geheel structuurloze, de verzamelingen. Men gaat verzamelingen met elkaar *vergelijken*, door ze op elkaar af te beelden, als het ware elementsgewijs mentaal op elkaar te leggen. Als A en B op elkaar passen, heten ze *gelijkmachtig*. Als A en B niet op elkaar passend gemaakt kunnen worden, maar wel A op een deel van B, heet A van *kleinere machtigheid* dan B.

Ik heb terwille van het goede begrip voor een aanschouwelijke formulering gekozen – het 'mentaal op elkaar leggen' is een psychologisch vervangsel voor wat men puur in verzamelingentaal zou moeten en kan uitdrukken. Met machtigheid gedefiniëerd te hebben, zijn we er echter nog lang niet. Op de weg naar de natuurlijke getallen toe moet allereerst nog verklaard worden wat *eindige* verzamelingen zijn en aangetoond worden dat die volgens machtigheid op een rij gezet inderdaad opleveren hetgeen we de telrij noemden. Ik laat het erbij te beklemtonen, dat dit een uiterst delicate zaak is, die om begrepen te worden veel wiskunde kennis en inspanning vereist.

7. *Meetkundige structuren*

De ons vertrouwde meetkundige structuur is die van de ruimte der vaste lichamen – de zogenaamde *euclidische meetkunde* – met een afstandsbegrip (in feite een mogelijkheid om afstanden met elkaar te vergelijken), waarbij de ons vertrouwde rechte lijnen de kortste zijn. Deze structuur laat zich structureel beschrijven of ook algebraïsch, met zogenaamde coördinatensystemen – een punt in de ruimte door een drietal getallen.

In de vorige eeuw is men begonnen, zich voor armere meetkundige structuren te interesseren. Verarming van structuur – als het ware het wegnemen van krullen en kronkels – kan verdieping en verrijking van inzicht mogelijk maken; het is iets dat de scheppende wiskundige in de laatste eeuw met groeiende vaardigheid heeft leren beoefenen.

In de euclidische ruimte zijn ons afstanden, hoeken, rechten, vlakken, cirkels, bollen vertrouwd. De eerste verarming, die we er op kunnen toepassen, is afzien van de vergelijkbaarheid van afstanden en hoeken onder behoud van rechtlijnigheid en evenwijdigheid. De dan ontstane structuur heet *affiene meetkunde*. In de affiene meetkunde zijn alle parallelogrammen hetzelfde, rechthoeken en vierkanten zijn niet meer van andere parallelogrammen te onderscheiden; onder de ellipsen spelen de cirkels geen bijzondere rol.

Een volgende stap is, ook de evenwijdigheid te vergeten, terwijl rechtlijnigheid gehandhaafd blijft. Zodoende ontstaat de *projectieve meetkunde*, waar alle vierkanten hetzelfde zijn en alle kegelsneden over één kam worden geschoren.

Nog een stap verder en ook de rechtlijnigheid verdwijnt als structurerende relatie: de ruimte wordt verarmd tot wat we vroeger noemden een *topologische* structuur, waar we wel nog open en gesloten krommen kunnen onderscheiden, bij gesloten oppervlakken een in- en uitwendige, bij gesloten ruimtekrommen of ze een knoop vormen, bij paren gesloten krommen of ze met elkaar geschakeld zijn of niet.

Dit soort classificatie van de meetkunde is al meer dan een eeuw oud, verbonden aan de naam van Felix Klein. Het was een eerste poging van structurering van een deel van de wiskunde, de meetkunde.

8. *Structuur van de wiskunde*

Het is een ander ding, kleine of grote mathematische objecten als structuur op te vatten, zoals we tot nu toe deden, of de *wiskunde zelf als wetenschapsgebied te structureren*. Deze organisatorische werkzaamheid is begonnen met de hierarchische ordening van meetkunden, in 7 geschetst. Het denkbeeld van structurering van de wiskunde zelf is sinds een eeuw latent; het vond zijn eerste grootse realisering in het systeem Bourbaki. Het is dubieus of, rekening houdende met de groei van de wiskunde, zo'n poging nog eens zal worden aangedurfd.

Bourbaki's hierarchie is er in eerste instantie een van *armere naar rijkere* en slechts secundair van kleinere naar grotere structuren (die echter vaak doorbroken is). Zoiets is de meest natuurlijke zaak van de wereld in een systematische opbouw: van armer naar rijker. Je begint als het ware met een tabula rasa, met het geheel ongestructureerde, de pure verzameling. Hoe kun je daar vandaan komende dan toch structuren scheppen?

Is A een verzameling, dan vorm je de verzameling van alle deelverzamelingen van A, P(A) genaamd. P(A) is al een flinke structuur, met als structurerende relatie het bevatten en bevat zijn.

Zijn A en B verzamelingen, dan biedt zich als nieuwe verzameling hun 'product' A×B aan, de verzameling van de paren gevormd uit telkens een element van A en een van B, een constructie naïef geïllustreerd door de tekening hiernaast van telkens een uit drie jongens gepaard met een uit vier meisjes.

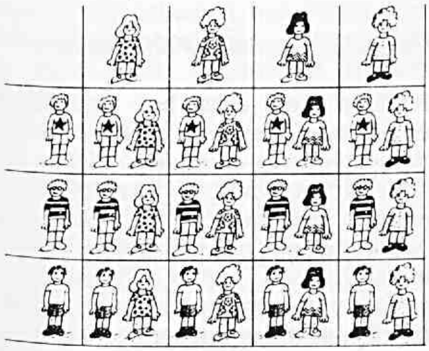

fig. 2

A×B is geweldig gestructureerd, horizontaal en verticaal om zo te zeggen. Zo kun je bijvoorbeeld ook het vlak structureren als product van twee rechten (zie figuur 3) – ieder punt voorgesteld als getallenpaar.

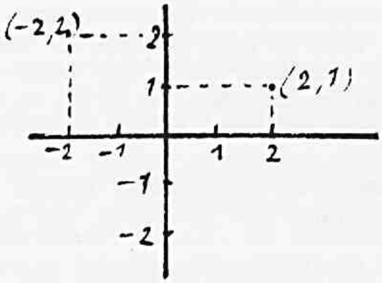

fig. 3

Dit zijn manieren om op gegeven of op ad hoc geconstrueerde verzamelingen structuren te plaatsen – ordestructuren, algebraïsche structuren, topologische structuren en ook nog deze onderling gecombineerd. Ze kunnen in een hierarchie verenigd worden om de wiskunde als zodanig een structuur op te leggen. Eén structuur – er is niet zo iets als dè structuur van de wiskunde. Ieder leerboek of college doet het weer anders, al is er zoiets als een communis opinio. De neiging, althans op universitair niveau, om wiskunde hierarchisch te onderwijzen is onmiskenbaar, al doet de een wat meer water dan de ander in de hierarchische wijn, en wel des te meer naarmate de onderwezen wiskunde in 't studiepakket van de aangesprokenen een *dienende functie* heeft.

Dit neemt niet weg dat ook 'wiskunde-consumenten' in wiskundige structuren worden geïntroduceerd, en dat hun in zekere mate dit structurele aspect ook bewust wordt gemaakt. Maar dit impliceert niet en hoeft niet te impliceren dat de wiskunde zelf als structuur al dan niet volgens Bourbaki wordt gepresenteerd. Het zou een averechtse poging zijn.

Hier komt nog bij dat een systeem als dat van Bourbaki – en welke variatie hierop ook – geen recht doet wedervaren aan de wiskunde in haar *dienende functie*. (Dat de Bourbakisten met dédain neerzagen op al hetgeen naar toepassing van de wiskunde zweemde, is een bijkomstige persoonlijke trek.)

De meest krasse tekortkoming is wellicht die bij de structuur der natuurlijke getallen: het ontbreken van de *numeratie*structuur – in casu het tientallig stelsel.

Van het laagst bijdegrondse, tot het meest geëvolueerde praktisch bezigzijn met getallen, steeds is de tientallige structuur van onze getallennotatie (van de natuurlijke getallen tot de decimale breuken toe) de *meest overheersende structuur*. Van het – puur taalkundig – leren van de getallen tot het efficiënt opereren ermee toe is deze structuur geheel onmisbaar. Maar in geen systeem der wiskunde speelt deze structuur enige rol, behalve dan misschien als een curiositeit, die net het vermelden waard is. Goede wiskunde is immers geobjectiveerd, van menselijke rudimenten zoals de tientalligheid van ons vinger- en tenensysteem ontdaan. Echte wiskunde gedraagt zich universeel, niet antropomorf.

Dit was dan de meest opvallende trek van de feitelijke ontoereikendheid van systemen van de wiskunde naar Bourbaki, maar in feite is het er maar één onder vele. Voor zoiets als computers, als functionele structuren beschouwd, is er nergens een plaats in het systeem, en aan het wiskundig modelleren van structuren ten behoeve van toepassingen van de wiskunde komt geen der systemen ook maar in de verte toe. Er zijn nog nauwelijks pogingen gedaan, om de wiskunde te structureren vanuit de realiteiten die bron en toepassingsgebied van de wiskunde zijn, al zouden we ze psychologisch, pedagogisch, didactisch, dringend nodig hebben. De deductieve systemen belemmeren door hun existentie de opkomst ervan.

9. *Structuren vanuit de realiteit*

Dit alles doet niets af aan het grote belang van wiskundige structuren. Door in de wiskunde structuren te onderkennen, heeft men beter de organisatie van onze kennis leren begrijpen. Door psychologen en pedagogen wordt cognitieve ontwikkeling nog doorgaans als begripsverwerving (concept attainment) gezien. Al oppervlakkig getuigen hiervan talrijke titels en opschriften, waar het woord 'concept' in voorkomt, en meer diepgaand praktisch alle proeven, waarbij de aanwezigheid of ontwikkeling van *begrippen* wordt getoetst. 'Concept attainment' is zelfs het kleuteronderwijs gaan beïnvloeden; men maakt hele lijsten op van begrippen die een kind dient te verwerven. Aanvankelijk leesonderwijs, begrijpend lezen, wereldoriëntatie dreigen aan 'concept attainment' ten prooi te vallen.

Kennis als een – hierarchische – collectie van *begrippen* is een visie, uit de wetenschapsleer van Aristoteles afkomstig. Die methodologie is sinds een eeuw steeds duidelijker als ontoereikend erkend, voornamelijk onder de invloed van de wiskunde. Die Aristotelische hierarchie is er één van het algemene naar het bijzondere, waarbij het algemene telkens het bijzondere omvat. Het meest volmaakt is zij gerealiseerd in biologische taxonomieën, waar men afdaalt langs de lijn van groepen, afdelingen, klassen, onderklassen, families, soorten, variëteiten. Maar buiten de systematische plant- en dierkunde is begripsvorming door classificatie methodologisch ontoereikend. Kennis is niet alleen meer, maar geheel iets anders dan een naslag-flora of -fauna.

Structureren is iets anders dan classificeren. Klassen omvatten elkaar of zijn in elkaar vervat; algemeenheid en bijzonderheid drukken zich daar in het meer of minder omvatten uit. Wil men bij structuren van algemeen en bijzonder spreken, dan is de armere structuur de algemenere en ontstaat de verbijzondering door verrijking.

Door te structureren (en niet door zomaar begrippen te vormen) krijgen we vat op de werkelijkheid. Naar gelang van de omstandigheden doen we het met rijke of arme structuren. Verarming kan veralgemening betekenen in die zin dat armere structuren een groter bereik van toepasselijkheid bezitten. Onder de armste structuren munten juist de wiskundige door hun grote mate van toepasselijkheid uit – de getallen en de meetkundige objecten zijn er voorbeelden van.

De wiskundige structuren zijn ook duidelijker herkenbaar dan structuren in 't algemeen. Het getuigt van een oppervlakkige visie op de wiskunde, wil men het wiskunde verwerven vereenzelvigen met 'concept attainment', maar deze visie is, naar ik al opmerkte, bij psychologen en pedagogen vrij algemeen – zelfs Piaget die men volgens zijn algemene denkbeelden dichter bij de structuren zou plaatsen, bevindt zich in zijn proefnemingen veeleer op het pad van begripsverwering.

10. *Wetenschapsstructuur en ontwikkeling*

Ik beklemtoon nog eens het verschil tussen *structuren in een wetenschap*, in casu de wiskunde, en *structuur van een wetenschap*. Het is een oud adagium dat de cognitieve ontwikkeling zich van het bijzondere naar het algemene toe voltrekt en deze richting wordt dan ook aan pedagogiek en didactiek ten voorbeeld gesteld. Het is een ongenuanceerd adagium, vooral ook omdat 'algemeen – bijzonder' voor verschillende uitleg vatbaar is. Men mag gerust veronderstellen dat bij een kind de bekenheid met een speciale hond (of met een aantal hunner) vooraf gaat aan die met de soort hond, maar soortvorming – waar het hier om gaat – is slechts één facet van de cognitieve ontwikkeling. Generalisaties voltrekken zich veeleer *vanuit situaties* dan *vanuit voorwerpen* en de functie van de speciale situatie is veeleer paradigmatisch dan klasse-opbouwend.

Piaget's visie is minder simplistisch dan dat oude adagium: De ontwikkeling voltrekt zich langs epistemologische lijnen, waarbij dan episteme geen individuele cognitie is, maar kennisinhoud, onafhankelijk van het individu. Van een systeem van de meetkunde of meer algemeen van de wiskunde kan men volgens Piaget de gang aflezen van de meetkundige of de algemener wiskundige ontwikkeling van het individu. Uiteraard impliceert dit de suggestie van een onderwijs beantwoordende aan het wetenschappelijke systeem.

In de biologie kent men Haeckels stelling dat de ontogenese (van het individu) de phylogenese (die van het soort) zou recapituleren. In de pedagogiek werd soms in de cognitieve ontwikkeling van het mensdom het patroon herkend van die van het individu. Voor Piaget daarentegen is de structuur, herkenbaar in de *tegenwoordige staat van een wetenschap,* tevens het cognitieve ontwikkelingspatroon van het individu. Proefnemingen dienen ertoe dit parallelisme te staven en zijn derhalve met het oog hierop geconstrueerd of worden geacht zo te zijn geconstrueerd.

Piaget huldigde deze overtuiging aleer Bourbaki zijn systeem ontplooide (althans hij er kennis van had genomen) en wel in zijn werken over meetkunde[3]. Als stramien, om de meetkundige ontwikkeling van het kind op te borduren, koos hij het enige hem bekende (en reeds toen verouderde) systeem der meetkunde, dat van Felix Klein. De ontwikkeling zou zich volgens Piaget van de armere naar de rijkere structuren heen voltrekken, zoals hij ze in Felix Klein's hierarchie vond. Na met het systeem voor de wiskunde van Bourbaki in aanraking te zijn gekomen, trok Piaget deze lijn naar de wiskunde als geheel door – een ontwikkeling van armer naar rijker volgens de hierarchie van Bourbaki.

Tien jaar geleden schreef ik[4]:

'Als systematicus van de wiskunde kent men natuurlijk Bourbaki. Hoe overtuigend is de wiskunde daar niet geordend! Zo overtuigend dat Piaget Bourbaki's systeem in de ontwikkelingspsychologie herontdekken kon. Och arme! Het verging hem zowat als Kant die er net in geslaagd was, de euclidische ruimte te consacreren als een zuivere intuïtie, toen de niet-euclidische meetkunde werd ontdekt. Piaget is geen wiskundige. Hij kon niet weten hoe onbetrouwbaar mathematische systeembouwers zijn. Nog voor Bourbaki's ordening der wiskunde voltooid was, werd de betekenis van de categorieën[5] geopenbaard. Het is vrij zeker[6] dat dit het nieuwe organisatiewerktuig van de wiskunde zal zijn en dat van Bourbaki's gebouw geen steen zal blijven staan als het in categorische stijl opnieuw zal worden opgetrokken. En als een leidende ontwikkelingspsycholoog ons dan van de categoriserende genese van alle begrippen gaat overtuigen – hetgeen nauwelijks is te vermijden – zal zeker ook het uur geslagen hebben voor de wiskunde van categorische stijl om afgebroken te worden ten gunste van een nieuw principe dat even onvermijdelijk is. Immers de wiskunde is nooit af ...'

Een merkwaardige voorspelling. Alleen kon ik, toen ik dit schreef, niet bevroeden, dat de 'leidende ontwikkelingspsycholoog', die Bourbaki door de (meer up to date lijkende) categorieën zou vervangen, Piaget zelf zou zijn. En evenmin was mij toen al duidelijk dat het geloof in de organisatorische functie van de categoriën zó spoedig zou wankelen, als in feite is geschied.

Terug naar Piaget's richtlijn dat de ontwikkeling zich in de – hem toevallig bekende – hierarchie van de armere naar de rijkere structuren voltrekt! Piaget's stelling, die betrekking heeft zowel op de apperceptieve en representatieve als op de cognitieve ontwikkeling, getuigt van groot vertrouwen in wiskundige hierarchieën, maar lijkt a priori uiterst onwaarschijnlijk. De bewijsmiddelen, zoals in[3] aangedragen, zijn ten dele absurd en ten dele geheel niet relevant, en waar dit wel het geval is, bewijzen de proeven net het tegendeel.

Het meest populaire deel van Piaget's stelling is dit, dat topologische structuur aan elke andere meetkundige structuur vooraf gaat. Het wordt door Piaget en volgelingen onder meer afgeleid uit tekenoefeningen van jonge kinderen, die, onverschillig of ze een driehoek of een cirkel moeten natekenen dezelfde soorten krabbels blijken te produceren. Het is inmiddels met alle zekerheid gebleken dat kinderen zeer vroeg deze figuren kunnen onderscheiden, dat ze bijvoorbeeld uit een viertal meer of minder goede nabootsingen van een cirkel of een driehoek de beste kunnen kiezen. Evenzeer is in tegenstelling tot Piaget's bewering van prioriteit van affiene op euclidische meetkunde gebleken dat kinderen vroegtijdig een vierkant van een scheef parallelogram kunnen onderscheiden.

Inmiddels is er met – zogenaamde – topologie op de kleuter- en basisschool en met affiene meetkunde als voorloper op euclidische, gesteund door Piaget-argumenten, heel wat onheil gesticht.

In welke mate psychologen als Piaget – en zeker niet Piaget alleen – verblind zijn door systemen van wetenschapsstructuur in de wiskunde, blijkt vooral uit het geheel negeren – althans voor zover mij bekend – van de tientalligheidsstructuur van ons talstelsel en het ontbreken van onderzoek omtrent de genese ervan. Wat is de oorzaak? Dat het niet in Piaget's conceptie van ontwikkelingsfasen past? Of wil men loochenen dat het een cognitief fenomeen zou zijn? De tientalligheid is zeker geen spontaan verschijnsel, maar welk onder de door Piaget en andere ontwikkelingspsychologen onderzochte verschijnselen kan echt uit de sociale context, de onderwijs-leer-context worden losgemaakt, om spontaan te worden genoemd? En wanneer de tientalligheid inderdaad genetisch minder fundamenteel zou zijn dan heel wat andere verschijnselen – alleen al het idee om bosjes van eenheden tot nieuwe eenheid samen te vatten en omgekeerd hogere eenheden tot bosjes van lagere op te lossen, is dit wel. In de wetenschapsstructuur van de wiskunde telt dit niet mee – akkoord – maar bewijst dit iets tegen zijn ontwikkelingspsychologische importantie?

11. *Wetenschapsstructuur en onderwijs*

Wetenschapsstructuur-leerplannen beginnen een mode te worden. Typisch is hiervoor, hoe de term 'oriënteringsbasis' gebruikt of misbruikt wordt: de oriënteringsbasis wordt vanuit een – veelal vermeende – wetenschapsstructuur geconstrueerd. In veel vakken gebeurt dit – ik wil me echter tot de wiskunde beperken. Het zou kunnen zijn, dat men, zeg, aardrijkskunde of begrijpend lezen of enige taal het beste volgens een wetenschapsstructuur van aardrijkskunde- of leesbegrip- of taalwetenschap zou kunnen onderwijzen – om het eerlijk te bekennen, ik geloof het niet. Wat de wiskunde betreft, kan ik in elk geval meer doen dan van mijn ongeloof blijk te geven.

Als *zuiver wiskundige* onderken ik duidelijker dan een ander de *betrekkelijkheid* van wat als wetenschapsstructuur van de wiskunde wordt aangedragen. Doordat ik de *wiskunde in een groter verband* van kennis en vaardigheden plaats, merk ik ook de *lacunes* van die wetenschapsstructuur op. In de *didactische context* word ik getroffen door het ontbreken in de wetenschapsstructuur van zulke belangrijke structuren als het *tientallig stelsel.* Als *wiskundige* voel ik me echter ook verplicht me met alle scherpte te keren *tegen wetenschapsstructuur om onderwijs te structureren* omdat ik van mezelf te goed weet hoe gemakkelijk wiskundigen aan deze neiging toegeven.

Dit is dan ook vaak genoeg geschied en vooral in de zogenaamde vernieuwing, die zich New Math noemt. Daar is het althans geprobeerd; dat het gelukt is, zou ik niet kunnen beweren. Veelal is het tot lippendienst beperkt gebleven of tot oppervlakkige naäping van wetenschapsstructuur, die trouwens ook al heel wat kwaad kan stichten.

Dat er geen *ontwikkelingspsychologisch* argument ten gunste van een wetenschapsstructuur-leerplan spreekt, werd al in 10 betoogd. Evenmin valt er *onderwijskundig* iets ten gunste van een wetenschapsstructuur-leerplan te zeggen. Een systeem van wetenschapsstructuur codificeert op systematische en – wat de wiskunde aangaat – op deductieve wijze de *stand* van de wetenschap op zeker ogenblik – een wetenschap die zelf niet bij benadering onderwerp zal zijn van het beoogde onderwijs.

Er zijn echter ook gewichtige argumenten ten nadele van wetenschapsstructuurleerplannen. Systemen der wiskunde vertonen een hiërarchie, die van arme naar rijke structuren wijst en die dan in zo'n wetenschapsstructuur-leerplan zou worden nagevolgd. Uit mathematisch-didactisch oogpunt is 'van armer naar rijker' een dubieus principe. Arme structuren zijn uitermate abstract – speciaal geldt dit voor de armste, de structuurloze verzameling. Er valt didactisch niets mee te beginnen, tenzij door middel van concretisering, van vulling van de abstracte vorm. Dit is hetgeen dan ook in de praktijk is geschied: *kunstmatige* en veelal zelfs *valse concretisering.* In de echte wiskunde *dienen* verzamelingen – en al die andere structuren – ergens voor; ze zijn er omdat ze *operationeel* zijn. Op het niveau waarop het wetenschapsstructuur-leerwerkplan inzet, is er echter nog niets uit de wiskunde aanwezig om met verzamelingen uit te voeren. Dus vind je als ontwerper maar iets uit, waar je verzamelingen bij te pas kunt brengen, iets dat met de behoefte aan verzamelingen in de wiskunde niets te maken heeft – een valse concretisering en een valse operationalisering – en evenmin met leerbehoeften – een valse didactisering. Het gunstigste effect is dan nog dat er geen effect is – verzamelingen en andere arme structuren in het aanvankelijke reken-wiskunde-onderwijs vervullen dan geen andere taak dan reverentie te bewijzen aan de wetenschapsstructuur.

Je kunt, los van dergelijke misgrepen, de zaak echter meer principieel zien. Er zijn – tegen Piaget in – ontwikkelingspsychologische argumenten om rijkere structuren aan armere vooraf te laten gaan en deze argumenten kunnen wel onderwijskundig relevant zijn. Het zogenaamde abstraheren is veelal een structuur-verarmen. Wiskundige structuren zijn door verarming ontstaan om in de rijkere context, waar ze vandaan komen en in hierop lijkende te kunnen worden toegepast. De richting van 'armer naar rijker' wordt gesuggereerd door een wiskunde die *kant en klaar* is. Wiskunde leren in zelfwerkzaamheid is wiskunde herscheppen – uiteraard niet in 't wilde weg, maar onder leiding. Is men het hiermee eens, dan is de didactisch aanbevelingswaardige richting dezelfde als die waarin wiskunde ontstaat, en dat is veelal juist 'van rijker naar armer'.

12. *Rijke contexten mathematisch structureren*

Ik heb hier didactisch de rijke tegenover de arme mathematische structuur geplaatst. Een voorbeeld van een rijke structuur als didactisch uitgangspunt en medium, waar de wetenschapsstructuur met een armere zou volstaan, heb ik eerder in dit tijdschrift gegeven[7]: de natuurlijke getallen met hun bewerkingen ingebed in de rijkere meetkundige structuur van de getallenlijn. Dit is één – bijzonder belangrijk – voorbeeld uit vele.

Men mag zich echter niet tot voorbeelden uit de wiskunde beperken en binnen de wiskunde rijkere tegenover armere structuren plaatsen. Men moet veeleer de aan te bieden rijkere structuren ook buiten de wiskunde zoeken, zij het dan (uit de visie van de onderwijsontwikkelaar) met wiskundig-didactische bijbedoelingen. Dit is dan ook de weg die men na de rampen van de wetenschapsstructuurleerplannen meer en meer op gaat: een niet-mathematische rijke structuur aanbieden, om de leerling ook met het structureren, schematiseren, verarmen, verschralen, mathematiseren vertrouwd te maken, om hem de machtige arme structuren in de rijke zelf te laten opsporen, met de bedoeling dat ze dan ook in andere rijke – mathematische en niet-mathematische – contexten functioneren. Met arme mathematische structuren beginnen kan daarentegen betekenen, dat men nooit aan de rijke niet-mathematische toekomt, waar het eigenlijk om begonnen was.

Ik licht dit aan enkele – paradigmatische – voorbeelden toe.

Wie kent tegenwoordig niet de zogenaamde logi-blokken! Ze zijn er in verschillende uitvoeringen, bijvoorbeeld een stel 'blokken' onderscheiden naar de kenmerken

rood-blauw, cirkel-vierkant-driehoek, groot-klein, dik-dun,

dus 24 in 't geheel – een schoolvoorbeeld van een geheel doorgestructureerde mathematische wereld: er is precies één exemplaar voor elke combinatie van die vier criteria. Je kunt er abstracte verzamelingenleer – doorsnede, vereniging, product – prachtig mee concretiseren.

Tegenover deze povere structuur kan men plaatsen wat ik elders 'een kleine wereld' heb genoemd: als het ware de speelgoedkast met auto's, dieren, huizen, poppen, enz. in diverse afmetingen, materiaal, kleuren, gradaties van bewegelijkheid, enz., waar de criteria van classificatie niet a priori opgelegd zijn, maar door de lerende zelf ondekt en ontwikkeld worden – kenmerken van grootte en kleur die niet scherp bepaald, maar voor gradatie vatbaar zijn, combinaties van kenmerken met *veel* representanten en met *geen enkele* representant, bijvoorbeeld geen zwart houten huis en een heleboel kleine rode auto's van blik – geen voorgestructureerde wereld, zoals van de logi-blokken, maar een te structureren wereld.

Structureren in dit geval door classificatie. Niet dat classificeren zulk een cognitief belangrijke activiteit zou zijn – ik heb dit voorbeeld gekozen omdat het in zijn eenvoud scherp de tegenstelling van arm en gestructureerd tegenover rijk en te structureren laat zien. De logi-blokken zijn tevens een voorbeeld voor het implementatie succes dat met mathematisch scherp voorgestructureerd materieel te behalen valt – een goedkoop succes, als het door didactische gemakzucht bepaald is. Rijk, voor structurering open materiaal, dat didactisch meer mogelijkheden in zich sluit, stelt aan de onderwijzende hogere eisen; het is dan ook moeilijker implementeerbaar.

Wenst men meer en meer ter zake doende voorbeelden van rijke contexten, bestemd om het mathematisch structureren te beoefenen, dan is er tegenwoordig heel wat keuze. Niet dat de vigerende schoolboekiiteratuur ervan zou getuigen. Schrale contexten zijn in het didactisch bewustzijn zo nauw geaffilieerd met rekenen-wiskunde, dat hun verdringing door rijkere een proces van lange duur zal zijn.

Desniettemin, aanzetten zijn er genoeg. Ik beperk me in mijn verwijzingen tot IOWO publikaties[8] als voor de lezer het gemakkelijkst bereikbaar.

Deze publicaties laten een verscheidenheid van opvattingen zien t.a.v. wat men onder een rijke niet-mathematische, te mathematiseren, context kan verstaan. Ik wil trachten diverse genres te karakteriseren.

Allereerst – en het meest opvallend – de *locatie*: een zinvol naast elkaar van situaties, die los van elkaar maar ook in meer of minder nauw verband met elkaar gehanteerd worden, zoals *Waterland* van Wikobas, een eiland, waar van alles te zien valt en gebeurt: steigers waar schepen aanleggen, bussen waar mensen in en uitstappen, wegen die ergens naar toe leiden, wegwijzers die geplaatst of te plaatsen zijn, blokkenbergen om te beklimmen, een stratennet om tochten in te maken – een overvloed van situaties om wiskunde in te bedrijven, en – daaraan voorafgaande – om wiskunde in te ontdekken, om de verbeeldingskracht van leerling, onderwijzende en ontwikkelaar te prikkelen.

Een tegenhanger hiervan is de *historie*, geen naast elkaar, maar iets dat naar zijn uiterlijk, tijdelijk gestructureerd is, met als neerslag een precies bepaalde successie van werkbladen: een verhaal, echt gebeurd of fictie, of ad hoc verzonnen, zoals Gulliver in Lilliput, waar één snaar, die van de verhoudingen, bespeeld wordt, of 'De Graankorrel' met als thema de machten van twee, of 'De reis om de wereld in 80 dagen' waar met de éne grondtoon, het reizen om de wereld, veel boventonen meeklinken, of 'Ralph de Zeerover', met als thema 'Oppervlakte', of 'Spionnen in de Stad', of 'Op het Spoor', wiskundig veelstemmig, maar qua historie één spannend geheel.

Ten derde is er, qua te scheppen realiteit, het *project*, op een locatie lijkend in het geval Belvia, de bouw van een bungalow in de brugklas, of meer op een historie lijkend, het maken van een Kiekkast in de kleuterklas, of de nieuwbouw van een school of de studie van verpakkingen of de constructie van regelmatige lichamen in de brugklas.

Ten vierde kan een stuk leerstof – met wisselende relaties tot de realiteit – op één mathematisch onderwerp afgestemd zijn: het *thema*, zoals de Abacus in de middenbouw van de basisschool met als onderwerp het positioneel rekenen, 'Breuken' in de brugklas, 'Verhoudingen' in de onderwijzersopleiding.

In alle gevallen is essentieel dat de context niet inkleding is, maar rijke structuur, die niet uitgekleed maar ten behoeve van de mathematisering verschraald wordt. Om zulke contexten te scheppen is het essentieel, dat de ontwikkelaar een open oog heeft voor de wiskunde rondom ons heen.

Noten

1. OEEC, Synopses for modern secondary school mathematics, 1961.
2. H.Freudenthal, Enseigment des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques? Enseignement Mathématique (2) 9 (1963), 28-44.
3. J.Piaget & Bärbel Inhelder. La représentation de l'espace chez l'enfant. Paris 1948, (Engels:) The Child's Conception of Space. London 1960. J.Piaget, B.Inhelder, A.Szeminska, La géométrie spontanée de l'enfant. Paris 1948. (Engels:) The Child's conception of Geometry. London 1960. – De Engelse vertalingen van de titels zijn absurd. In 't geheel heerst in de vertalingen veel willekeur.
4. Vertaald, zie bijv. Mathematik als pädagogische Aufgabe, 1973, S.50. Mathematics as an Educational task, 1973, p. 46.
5. Ik kan hier niet uitleggen wat met dit nieuwe organisatie-principe van de wiskunde bedoeld is.
6. Inmiddels is dit niet zo zeker meer.
7. Lessen van Sovjet rekenonderwijskunde. Ped.Stud. 1978 (56) 17-24
8. Zie bijv. Wiskobas Bulletin 5 (1975), nr. 2/3, Leerplanpublikatie 2. – Five Years IOWO, IOWO Snapshots, Educational Studies in Mathematics 7(1976), no.3.