# Davydov, Piaget en de breuken

L. STREEFLAND,
*I.O.W.O., Utrecht*

*Samenvatting*

*In zijn artikel 'Lessen van Sovjet rekenonderwijskunde'*[1] *gaat Freudenthal in op de ten onrechte in zwang geraakte slogan over de relatie van deel en geheel voor de omschrijving van relaties tussen grootheden, die betrekking hebben op de bewerkingen optellen en aftrekken met natuurlijke getallen.*[2] *In dit verband wordt ook Davydov's breukendidaktiek kort aangeduid, vergezeld van een waarschuwing voor Westerse onderzoekers. De door Davydov voorgestane inhoudelijke veranderingen zouden ontoereikend zijn. De inhoudelijke voorstellen van Davydov (en T̄svetkovič)*[3] *worden in dit artikel nader beschouwd. Zij baseren die voorstellen op een als onderwijseksperiment verricht onderzoek. Beginnend met de kritiek van Davydov (c.s.) op het Sovjet onderwijs in breuken, gaan we daarna puntsgewijs in op de inhoudelijke voorstellen, die in dit verband gedaan worden. Vervolgens bespreken we enkele van de onderzoeksgegevens van Davydov (c.s.). Het door Davydov gekritiseerde Sovjet onderwijs in breuken is gebaseerd op het 'taartverdelen'. Omdat Piaget en zijn medewerkers juist aan dit aspekt van het breukbegrip enige aandacht besteed hebben, betrekken we dit onderzoek eveneens in onze beschouwingen.*[6] *Tenslotte wordt enig zicht gegeven op een bredere inbedding van het breukbegrip, waardoor het volledig tot zijn recht komt en bij kinderen betekenisvol ontwikkeld kan worden.*

*Daarmee wordt dan tevens een indikatie gegeven omtrent de werkwijze, die binnen het Wiskobas-projekt gevolgd wordt om middels kwalitatief onderzoek tot een nieuwe deelleergang voor breuken (en wiskundig verwante onderwerpen zoals verhoudingen, schaal, kommabreuken en procenten) te geraken. Nog vóórafgaande aan de onderzoeken van Davydov c.s. en Piaget c.s. wordt kort geschetst hoe de fase in het Wiskobasprojekt, waarin het accent lag op de ontwikkeling van materiaal voor het wiskundeonderwijs, ontoereikend was, om afdoende met het 'breukenprobleem' af te rekenen. Daarmee wordt de aktualiteit van het betreffende onderzoeksgebied reeds kort geduid. Aan het eind van het artikel wordt hierop nader ingegaan. Tevens zullen dan de tekorten in Davydov's voorstellen aangegeven worden, alsmede de eenzijdigheid van Piaget's opvatting omtrent het breukbegrip.*

*De lezer dient vooraf gewaarschuwd te zijn: het gaat in beide onderzoeken slechts om enkele aspekten van het breukbegrip. Het algoritmisch werken met breuken blijft volledig buiten beschouwing. In het (Nederlandse) basisonderwijs schuilen daar nu juist de grote problemen voor veel leerlingen en onderwijzers.*

## 1. *De breuken in het Wiskobas-projekt, tijdens de ontwerpfase*

Tijdens de ontwerpfase (1971–1975)[4] in het Wiskobas-projekt lag het accent op de ontwikkeling van een schoolwerkplan voor de ontwerpschool, de Dr. W. Dreesschool te Arnhem. Al heel snel werd duidelijk, dat beschikbare mankracht en tijd binnen de geplande fasering ontoereikend waren voor het achterhalen van de oorzaken van de problemen, die veel leerlingen met de breuken hadden. De hoogste prioriteit moest gegeven worden aan de continuïteit van het onderwijs van alle dag. Leerlingen, ouders en leerkrachten, die ingestemd hadden met het terzijde stellen van de tot dan toe gebruikte rekenmethode, mochten niet teleurgesteld worden. Het hoofdaccent diende dus wel op de ontwikkeling van werkplanmateriaal voor het wiskunde-onderwijs op de ontwerpschool te liggen om de voortgang van het onderwijs niet in gevaar te brengen. Hierdoor ontbrak de tijd voor de nodige diepgang voor het doorgronden en oplossen van een gecompliceerd probleem als dat van de breuken. Na de voorlopige afronding van de ontwerpfase in het Wiskobas-projekt eind 1975, volgde voor enkele medewerkers een periode van diepgaande studie en explorerend onderzoek om voor dit sleutelonderwerp van de vernieuwing van het rekenonderwijs een bevredigende oplossing te vinden. Wanneer we spreken van sleutelonderwerp, dan bedoelen we daarmee, dat de verandering van het programma voor breuken (en verhoudingen, schaal, kommabreuken en procenten) niet alleen diep en breed ingrijpt in het huidige basisschoolprogramma voor rekenen, wanneer inhoudelijke samenhang tussen verwante gebieden en inzichtelijke begripsvorming worden nagestreefd, maar bovendien dat de huidige traditie binnen het rekenonderwijs met betrekking tot breuken onder andere door gestelde vaardigheidseisen bij het opereren met breuken inhoudelijke vernieuwingen in de weg staat.

Een oplossing op dit gebied zou niet alleen belangrijk bijdragen aan het effenen van de weg naar inhoudelijke vernieuwing, maar tevens aan de oplossing van het probleem van de afhakers op de basisschool door de breuken. In de kritiek op de benaderingen van Davydov c.s. en Piaget c.s. van het breukbegrip zal doorklinken in welke richting we denken bij de vernieuwing van het breukenonderwijs. Daaraan willen we in de slotparagrafen dan nog wat nader inhoud geven, zonder dat we overigens kunnen stellen, dat de werkzaamheden op dit gebied op korte termijn afgerond zullen zijn. Het ontwikkelen van uiterst gecompliceerde, over jaren 'uitgesmeerde' deelleergangen schept een heel eigen problematiek, zeker in het onderhavige geval. Alleen al het longitudinale onderzoek, dat uiteindelijk conditiebepalend zal moeten zijn voor de wijze, waarop het onderwijs in breuken optimaal kan worden ingericht is een kwestie van 'geduld en lange adem'.

## 2. *Davydov's onderwijsexperiment*

### 2.1 *De door Davydov (c.s.) gekritiseerde didaktiek voor breuken in het Sovjetonderwijs*

Meergenoemde auteurs[5] starten de rapportage van hun onderzoek met een beschrijving van de instap in het gebied van de breuken, zoals dat in het (toenmaals)[3] vigerende Sovjetonderwijs gebruikelijk was. Hierop wordt vrij uitvoerig en nogal kritisch ingegaan.

Die breukendidaktiek wordt gekenmerkt door de volgende fasering:

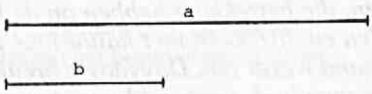
- (konkreet): konkrete voorwerpen worden in gelijke delen verdeeld;
- (schematisch): lijnstukken, cirkels e.d. worden in gelijke delen verdeeld; beschrijving door middel van breuken;
- (mentaal): het werken met breuken op mentaal nivo (dat wil zeggen zonder eksterne steun van schematische of konkrete representaties; symbolische voorstellingen worden toegestaan).

Deze aanpak blijkt, zoals de lezer zal opmerken, veel overeenkomst te vertonen met die, welke elders – ook voor ons land geldt dit – per traditie gebruikelijk is.

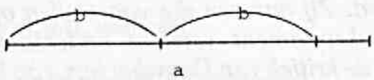
Davydov en Tsvetkovič hebben vooral tegen de eenzijdigheid van deze aanpak bezwaar. Naar hun mening is het (eerlijk) verdelen niet de enige konkrete bron van het breukbegrip. Zij kiezen in plaats daarvan 'meten' als bron.

### 2.2. *Meten als uitgangspunt*

Lengtemeting vormt het uitgangspunt. Lijnstuk a wordt gemeten met maateenheid b.

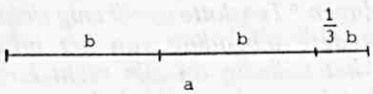



Het 'uitscheppen' van a met b gaat niet precies op, er blijft nog een stukje over:




Het gaat er nu om greep te krijgen op het resterende stukje. Wil dit in het meetresultaat betrokken zijn, dus wil het mogelijk zijn de meetprocedure voort te zetten, dan dient maatstaf b verfijnd te worden.

Als een van maateenheid b afgeleide verfijnde maat $^1/_3$ b nog 'precies' één keer uitschepbaar blijkt[7], dan wordt het resultaat uiteindelijk:

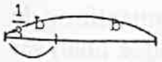



$a = 2b + {}^1/_3b$ of $a = 2^1/_3b$.

In de beschrijving $a = 2^1/_3b$ weerspiegelt zich zowel *het proces* van het meten als het *resultaat* ervan.

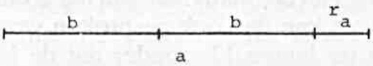
In feite zijn in de breuk $^1/_3$ in $2^1/_3b$ twee aspekten van het breukbegrip vervat:

- enerzijds schrijft $^1/_3$ de wijze voor, waarop de maateenheid b – in dit voorbeeld – verfijnd moest worden. Dit aspekt aan de breuk kenmerkt zich door dynamiek. De breuk belichaamt een signaal tot opereren (de breuk in de operator).
- anderzijds beschrijft $^1/_3$ de relatie tussen de verfijnde maat en de oorspronkelijke maateenheid:


(de breuk in de breekrelatie.)

Beschouwen we de verfijnde maatstaf en de oorspronkelijke maateenheid naast elkaar: , dan geeft $^1/_3$ ook de verhoudingsrelatie (uitgedrukt in een verhoudingswaarde) weer tussen verfijnde en oorspronkelijke maateenheid.[7]

Het is deze rijke geschakeerdheid aan aspekten, die het breukbegrip breed toepasbaar maakt. Dit is nog weinig onderkend en daardoor weinig dienstbaar gemaakt aan de dagelijkse praktijk van het onderwijs.




Na het tweemaal uitscheppen van de maateenheid b uit a, hadden we natuurlijk ook het overblijvende stuk $r_a$ tot maateenheid kunnen verheffen om daarmee vervolgens b te gaan meten. We zouden dan gevonden hebben $b=3r_a$, waarin 3 'werkt op' $r_a$ (neem $r_a$ drie keer) om b te bewerkstelligen, dus, omgekeerd, $r_a=\,^1/_3b$. De breuk $^1/_3$ blijkt zich in dit geval dan voor te doen als de inverse van de vermenigvuldigingoperator 3[8].

Voor hun inhoudelijke keuze dragen Davydov c.s. zowel mathematische als psychologische argumenten aan, die neerkomen op:

- de oorsprong van de breuken is gelegen in het meten van grootheden;
- de relatie tussen een begrip en zijn ontstaansproces is van psychologisch belang vooral in dit geval, omdat het gekozen uitgangspunt gunstige voorwaarden schept voor de verdere ontwikkeling bij de leerlingen van het verhoudingsbegrip (als abstraktie van de verhouding van grootheden).

Het breukbegrip wordt dus op de verhouding van grootheden gefundeerd. Voor het tweede halfjaar van de derde klas wordt de volgende opbouw gegeven:

- het begrip gewone breuk;
- het noteren van gewone breuken en gemengde getallen; het plaatsen op een getallenlijn;
- de gelijkwaardigheid van breuken;
- het vergelijken van breuken naar grootte.

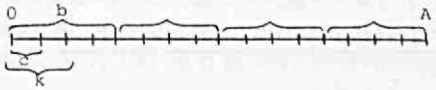
In de verschillende stadia spelen stroken en de getallenlijn als meet- en ondersteuningsmiddelen een belangrijke rol. (In het volgende overzicht van stappen in de opbouw van Davydov vervullen lijnstukken of getekende stroken de rol van papieren stroken die in de beginfase ook daadwerkelijk voorhanden zijn en door de kinderen gevouwen worden.)

De steun van deze hulpmiddelen wordt geleidelijk verminderd, zodat een steeds groter beroep gedaan wordt op de mentale aktiviteit van de leerlingen.

Men besteedt ruimschoots aandacht aan de gelijkwaardigheid van breuken. Het gaat dan niet om geïsoleerde gevallen, zoals $^1/_2 = \,^2/_4$ e.d., maar om de breuk als equivalentieklasse; $^1/_2$ staat dan voor $\{^1/_2, ^2/_4, ^3/_6, ^4/_8, ^5/_{10}, ^6/_{12}, \ldots\}$. Gelijkwaardigheid wordt beschouwd als 'basiseigenscchap van breuken'.

De aanpak van Davydov laat zich uiteenleggen in de volgende stappen:[9]

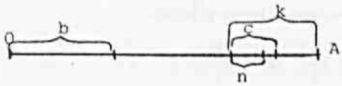
1. Twee grootheden (lijnstukken) worden met elkaar vergeleken, bijvoorbeeld:




A met b, A met k, en A met c.

Het gaat steeds op; 'b gaat 4 keer in A' of A is 4 keer zo groot als b' worden uitgedrukt in betrekkingen als: $A/b=4$, $A/k=8$, $A/c=16$, $A=4b$, $A=8k$, $A=16c$.

2. Als 1., doch er blijft nu een rest, $A/b=2+\text{rest}$ of $A=2b+\text{rest}$, die op velerlei wijze kan worden geschreven:

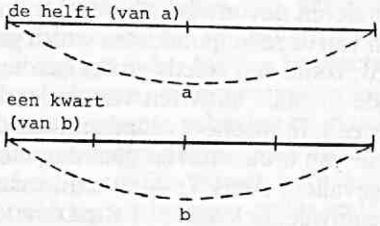



$A=2b+1k=2b+2c=2b+3n$.

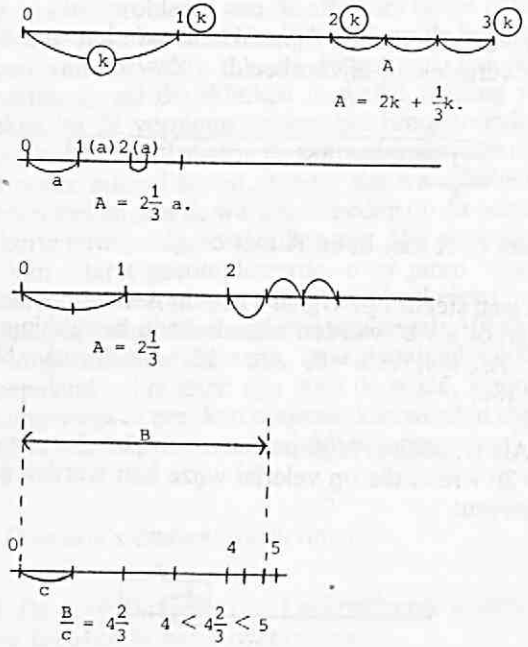
*N.B.* Merk op hoe in '$A/b = 2 + \text{rest}$' en '$A = 2b + \text{rest}$' de resten verschillend zijn. Uiteindelijk wordt voor '$A/b = 2 + \text{rest}$' gekozen (zie punt 5.).

3. Formuleringen zoals 'k gaat ongeveer 2 keer in b' ($b/k\approx2$) of 'k gaat ruim 2 keer in b' ($2<B/k$) en 'k gaat meer dan 2 en minder dan 3 keer in b' ($2<b/k<3$).

4. De uitdrukkingen 'helft', 'derde deel', 'kwart' worden ingevoerd.




5. De schrijfwijze van 2. wordt nader gespecificeerd in: $A/k = 2 + {}^1/_3$ of $A = 2k + {}^1/_3k$ ('k gaat 2 keer in A en nog ${}^1/_3$ keer').

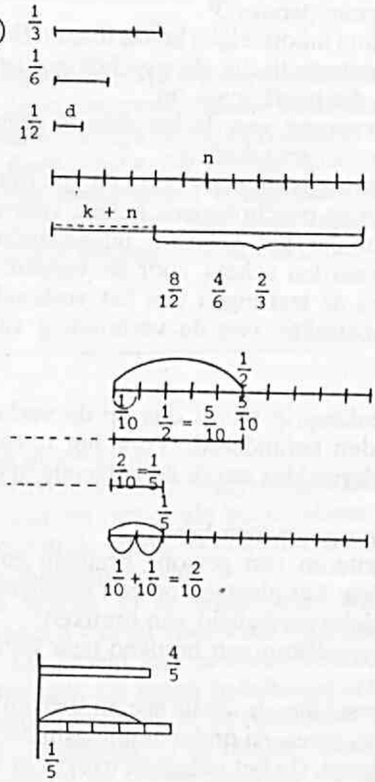


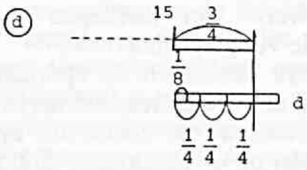

Vanaf hier wordt een traditionele weg ingeslagen, waarbij wordt toegewerkt naar het werken met breuken, die alleen nog in cijfersymbolen gegeven zijn. Het accent ligt daarbij op de eerdergenoemde 'basiseigenschap voor breuken', die vrijwel op het symbolische nivo behandeld wordt, dus algoritmisch, hoewel in eerste instantie nog wel enige visuele steun gevonden wordt bij (getekende) stroken en lijnstukken. De algebraïsche aanduiding vervalt nu. Het tot en met punt 5. toegepaste lettergebruik voor de beschrijving van onbepaalde grootheden suggereert een algebraïsering van dit deel van het rekenonderwijs.

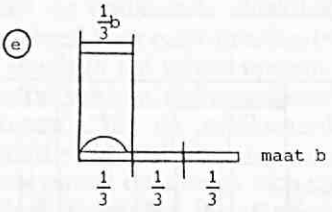
Vergelijken we dit echter met de door Freudenthal onderscheiden punten in de logische sequentie op de achtergrond van Davydov's inhoudelijke analyses dan moeten we stellen, dat Davydov ook hier weer blijft steken in nivo (3) 'Notatie van onbepaalde grootheden door letters en hun relaties door lettervergelijkingen'[10] en aan feitelijke algebra dus ook binnen dit gebied niet toekomt, hoewel het formeel opereren met breuken ons inziens wèl tot het gebied van de algebra gerekend dient te worden.

In punt 5. kwam in de voorbeelden duidelijk tot uitdrukking, dat Davydov c.s. er voorstander van zijn bij de leerling een flexibele interpretatie van het begrip maateenheid bij te brengen. Handhaving van dit principe bij het benutten van 'meten' als konkrete bron van het breukbegrip komt tegemoet aan de accentuering van de relativiteit van het breukbegrip. In het vervolg kan dan ook gesproken worden van lijnstukken ter lengte 12, zonder dat de leerlingen behoefte zullen hebben aan een nadere aanduiding voor de gebruikte maateenheid. Die 12 had net zo goed 4 kunnen zijn, wanneer de gebruikte maateenheid driemaal zo groot geweest was.

6. Op ruitjespapier delen van een lijnstuk ter lengte van 12 (ruitjes) e.d. op verschillende manieren beschrijven met (gelijkwaardige) breuken.

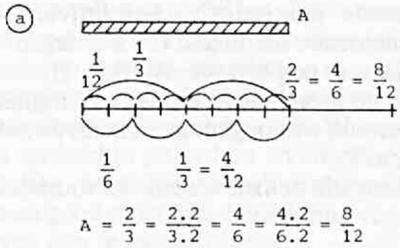


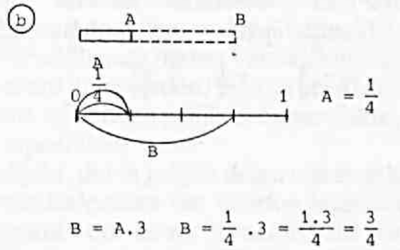



7. Vergelijking van breuken naar grootte, waarbij de volgorde direkt evident is, bijvoorbeeld: Wat is groter (of meer) $2^1/_6$ of $2^5/_6$. Hierbij wordt één van tekens $<, =$ en $>$ tussen de gegeven breuken geplaatst om de ordening aan te geven.

8. Vermenigvuldiging van teller en noemer van een breuk met dezelfde faktor. In punt 6. treffen we reeds een hierop voorbereidende aktiviteit aan. Het ging er daar om visueel en numeriek gegeven gelijkwaardige breuken met elkaar te verbinden. Die aktiviteit wordt hier nog voortgezet, waarbij de overgang naar de algoritmische behandeling van gelijkwaardigheid uit de illustraties duidelijk waarneembaar is.
Vooral voorbeeld ⓑ laat hier duidelijk zien hoe de algoritmiseringsdrang niet meer te stuiten is, blijkens de ongemotiveerde overgangen in:
$B = {}^1/_4 \,.\, 3 = {}^{1.3}/_4 = {}^3/_4$'.



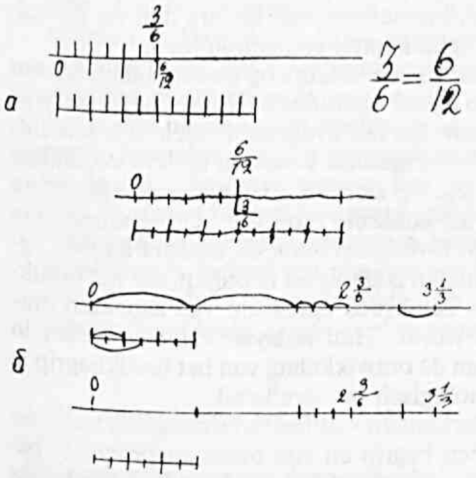



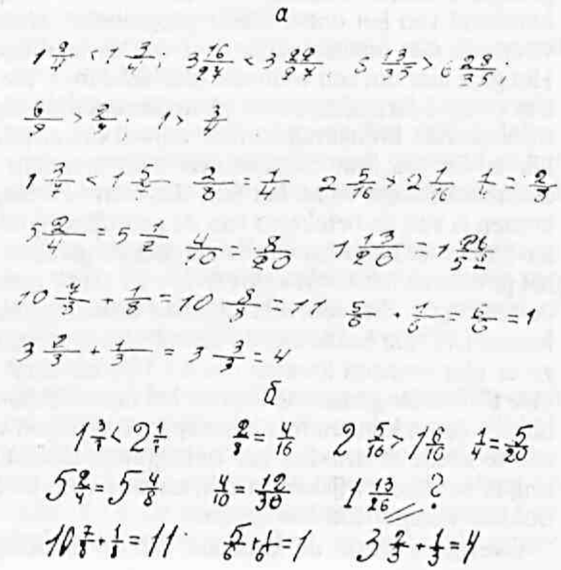

ⓒ $^3/_8 = {}^6/_{16} = {}^{15}/_{40} = {}^{21}/_{56} = {}^{300}/_{800} = {}^{3\cdot n}/_{8\cdot n}$ ontstaat uit $^3/_8$ door de opdracht teller en noemer respektievelijk met 2, 5, 7, 100 en n te vermenigvuldigen.

9. Vergelijking van breuken naar grootte via gelijknamig maken.
Bijvoorbeeld: $^1/_2$ en $^7/_{12}$. $^1/_2 = {}^6/_{12} < {}^7/_{12}$ Hiermee zou in principe de weg naar het optellen en aftrekken van ongelijknamige breuken geplaveid moeten zijn.

## 2.3. *Onderzoeksresultaten*

Aan het einde van het experimentele onderwijsprogramma – inhoudelijk gekarakteriseerd door de



voorafgaande puntsgewijze beschrijving – kregen alle deelnemende leerlingen (56 leerlingen verdeeld over 2 klassen) nog een proefwerkje. Hiermee werd nagegaan de grondigheid en nauwkeurigheid waarmee de leerstof was opgenomen, zoals de auteurs het uitdrukten.

Ter illustratie nemen we enkele voorbeelden van schriftelijk werk van leerlingen over (pagina 126/127).[3] (Zie vorige pagina onder $\alpha$)

Via dit werk laten zich de opdrachten aan de leerlingen vrij eenvoudig rekonstrueren.

Eén voorbeeld uit de toetsende opgavenreeks springt er, gelet op de resultaten, direkt uit (pagina 126/127):

5. Сравнить числа, поставить нужные знаки:

а) $2\frac{1}{6} \ldots 2\frac{5}{6}$; б) $4\frac{2}{9} \ldots 5\frac{1}{9}$; в) $3\frac{4}{10} \ldots 3\frac{2}{5}$,

г) $7\frac{3}{8} \ldots 7\frac{3}{5}$; д) $\frac{23}{23} \ldots 1$.

Таблица 7

| Выполнение | Задания. | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1-е | 2-е | 3-е | 4-е | | 5-е | | | | |
| | | | | а | б | а | б | в | г | д |
| Правильное и самостоятельное . . . . . | 48 | 47 | 45 | 56 | 53 | 52 | 47 | 48 | 35 | 55 |
| Правильное с помощью | 7 | 8 | 8 | | 2 | 3 | 6 | 7 | 11 | 1 |
| Неправильное . . . . | 1 | 1 | 3 | | 1 | 1 | 3 | 1 | 10 | — |

Из общего количества поставленных заданий правильно и самостоятельно было выполнено 86,8% заданий, 9,4% — правильно, но с помощью экспериментатора, и 3,8% — неправильно.

Het gaat om opgave 5d, waarbij tussen $7^3/_8$ en $7^3/_5$ het juiste ordeningsteken geplaatst moet worden (zie punt 7) van het inhoudelijke overzicht). Blijkens de tabel en de vertaling van de tekst daarin, waren er 35 van de 56 leerlingen, die de opgave juist en zelfstandig oplosten, 11 van de 56 leerlingen verkregen de juiste oplossing met hulp van de onderwijzer(es)[11], terwijl 10 leerlingen ondanks die hulp, bleven volharden in hun keuze van het symbool '>'. Slechts enkele leerlingen pasten het gelijkteken toe.

Vergeleken met de overige resultaten bezorgt deze opgave de leerlingen kennelijk de meeste hoofdbrekens. De resultaten die bij deze opgave gemeld worden, ontmaskeren tevens de ontoereikendheid van het ontwikkelde programma, althans voor een niet onaanzienlijk deel van de leerlingen. Het gaat hier om een welhaast klassieke fout, die bij een te snel formaliserende, abstrakerende en algoritmiserende breukendidaktiek vrijwel onvermijdelijk is. In die fout manifesteert zich namelijk op ondubbelzinnige wijze het feit, dat men niet losgekomen is van de betekenis van de gebruikte symbolen binnen de kontekst van de natuurlijke getallen. In het geval van het voorbeeld (7) $^3/_8$ . . . (7) $^3/_5$ nemen de leerlingen die voor het onjuiste ordeningsteken kiezen (>), die beslissing op grond van het feit, dat ze er niet omheen kunnen dat 8>5 is, en 'dus' (7) $^3/_8 >$ (7) $^3/_5$. De gemaakte fout en het niet zelfstandig uit de voeten kunnen met deze opgave getuigen van een te snelle abstraktie, een onbegrepen formalisering in het onderwijsleerproces, althans voor de betrokken kategorieën leerlingen.

Overigens werkt de kontekst van de natuurlijke getallen niet alleen storend bij de breuknotatie, maar ook in de breuknamen als 'derde', 'vierde' enzovoort, omdat deze breuknamen de storende invloed van het ordinaal aspekt (telgetal) van het natuurlijk getal erg dwingend met zich meebrengen.

Het duurt erg lang, zo is ons inmiddels gebleken, voordat de kinderlijke notie van het breukbegrip is opgewassen tegen deze storende invloeden, ook al, omdat in het overige rekenonderwijs die andere betekenissen van cijfersymbolen en breuknamen voortdurend bevestigd en eventueel nog verstevigd worden.[12]

## 2.3. *Voorlopige balans*

De benadering van Davydov en T̄svetkovic̄ nog eens overziende, kunnen we niet anders dan tot de volgende kritische kanttekeningen komen:

- De kritiek van de auteurs op de eenzijdigheid van de instap bij het traditionele (Russische) onderwijs in breuken (het rechtvaardig verdelen) is terecht, doch wordt ingeruild voor een andere eenzijdige benadering. Op zichzelf is het een goede gedachte 'meten' als konkrete bron van het breukbegrip te benutten. Overigens laten de auteurs kansen liggen het meten zodanig uit te buiten, dat het breukbegrip in een breed spektrum van aspekten ontwikkeld wordt. Hun analyse van het meten in dienst van de ontwikkeling van het breukbegrip is fenomenologisch ontoereikend.
- Het onderkennen van het psychologisch verband tussen een begrip en zijn ontstaansproces is belangrijk en strookt in feite met de door Wiskobas

gekozen benadering van de didaktische fenomenologie. Jammer is, dat dit idee in Davydov's latere meer theoretisch getinte geschriften weer op de achtergrond is geraakt.

- De aandacht voor de gemengde getallen (breuken $> 1$) valt eveneens positief te waarderen, vooral ook omdat de traditionele didaktiek uitsluitend oog had en heeft voor echte breuken ($< 1$), waarbij het deel steeds *in* het geheel opgaat.
- Het benadrukken van 'de basiseigenschap van het breukrekenen', nl. de gelijkwaardigheid van breuken ($a/b = c/d \Leftrightarrow ad = bc$), is eveneens belangrijk, vooral omdat de auteurs zich niet beperken tot geïsoleerde gevallen, maar ruimte scheppen voor de ontwikkeling van het begrip breuk als equivalentieklasse $\{^1/_2, \ ^2/_4, \ ^3/_6, \ ^4/_8, \ ^5/_{12}, \ldots\}$ Jammer is, dat gelijkwaardigheid op symbolisch nivo wordt afgedaan, waarmee nogal wat leerlingen juist vanwege de storende invloed van de natuurlijke getalbetekenis van de gebruikte cijfersymbolen zulke grote problemen hebben.

  Bij het eerlijk verdelen bijvoorbeeld dient ons inziens aan de symbolische behandeling van gelijkwaardigheid op zijn minst de exploratie van gelijkwaardige verdeel*situaties* vooraf te gaan. (Gelijkwaardige verdeelsituaties resulteren in dezelfde breukenuitkomst, bijvoorbeeld 2 kinderen verdelen 1 pannekoek, 4 kinderen verdelen 2 pannekoeken, enzovoort. Een dergelijke verkenning van gelijkwaardige verdeelsituaties past ook heel goed in de bedoelingen, die Davydov had door zijn breukenaanpak tevens in dienst van de ontwikkeling van het verhoudingsbegrip te stellen).
- *Meten* (en daarbinnen de verhouding van (lineaire) grootheden) vormt op zichzelf een goed uitgangspunt voor de ontwikkeling van het breukbegrip. Uit het overzicht van de opeenvolgende stappen in Davydov's (c.s.) experimentele programma blijkt, dat de auteurs vanaf een gegeven moment de traditionele weg inslaan en daarmee het goede uitgangspunt opofferen aan een veel te snelle formalisering. De gesignaleerde uitschieter in de 'retentie-toets' getuigt hiervan. Bedoelde fout illustreert het niet loskomen van de betekenis, waarmee de gebruikte symbolen binnen de kontekst van: $\mathbb{N}$ 'belast' zijn (daarbinnen is $8>5$, *dus* $^3/_8 > ^3/_5$) en duidt op een reduktie van de breuk tot algebraïsch objekt in een veel te vroeg stadium.

### 3. *Het breukbegrip bij Piaget:*[13]

Het onderverdelen van de maateenheid bij het meten om ook de gevallen, waarbij het niet zo mooi uitkomt zo goed mogelijk te kunnen beheersen, is feitelijk een vorm van 'eerlijk' verdelen.

Bij het meten vindt de onderverdeling van de gekozen maateenheid in gelijke delen plaats om redenen van eenheid in procedure en efficiëncy. De onderverdeling van de maat wordt dienstbaar gemaakt aan een zo goed mogelijke benadering van de afmetingen van een te meten objekt.

'Eerlijk' verdelen manifesteert zich eveneens in gelijkheid van de delen, waarbij bedoelde gelijkheid nog in verschillende maten van wiskundige precisie genuanceerd kan worden, bijvoorbeeld de delen zijn congruent, of hebben gelijk(e) oppervlakte, gewicht, lengte, (speel)duur o.i.d.

Het objekt, dat in gelijke delen uiteengelegd wordt en het verdeelproces dat daartoe leidt vormen het uitgangspunt voor de rechtvaardigheid van het verdelen waarom het uiteindelijk gaat. Naar de begunstigden toe kunnen (ook voor kinderen) echter heel andere rechtvaardigheidskriteria bij het 'eerlijk' verdelen gelden, bijvoorbeeld ontleend aan iemands behoefte, iemands afmetingen, iemands plaats binnen een groter geheel.

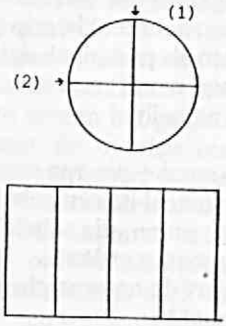
De door Davydov gekritiseerde breukopvatting berustend op het 'eerlijk' verdelen vormde voor Piaget juist het uitgangspunt van onderzoek. Volgens Piaget c.s. zijn aan het breukbegrip (breuk dient hier opgevat te worden als part, deel, dat in relatie tot het geheel beschouwd wordt) een zevental aspekten te onderscheiden, namelijk:

1 er kan slechts sprake zijn van een breuk als er een (ver)deelbaar geheel is; een geheel, dat is samengesteld uit elementen, die scheidbaar zijn, die afgezonderd kunnen worden;
2 breuk impliceert de aanwezigheid van een aantal delen dat bepaald is;
3 verdelen is een uitputtend proces; er is geen rest;
4 er is een *vaste* relatie tussen het aantal delen, waarin een kontinu geheel wordt verdeeld en het aantal te maken sneden om die verdeling tot stand te brengen;
5 het breukbegrip uit het rekenen impliceert behalve het zuiver kwalitatieve verdelen het gelijk zijn van de verkregen delen (of gelijk hier kongruent of gelijk in oppervlakte betekent, wordt in het midden gelaten);
6 als het verdelen operationeel is en aanleiding geeft tot echte breuken, dan krijgen deze een dubbelzinnig karakter in deze zin, dat ze deel van het oorspronkelijk geheel zijn, maar ook geheel op zichzelf en als zodanig kunnen ze opnieuw verdeeld worden (de relativiteit van het breukbegrip);

7 de som van de delen is gelijk aan het oorspronkelijke geheel;

Beschouwt men deze 'breukdefinitie' nader, dan zijn een drietal invloedsferen aanwijsbaar, namelijk:

- de breukopvatting uit de traditionele rekendidaktiek, die zich kenmerkt door: het verdelen van fysische eenheden (rechthoeken, vierkanten, cirkels), waarbij het deel steeds binnen het geheel blijft;
- ervaringen opgedaan in proefjes met kinderen. Het genoemde vierde aspekt van het breukbegrip bijvoorbeeld berust vermoedelijk op de ervaring, dat de jonge proefpersoontjes per af te zonderen breukdeel één keer scheuren of knippen nodig dachten te hebben. Zij negeerden daarbij het resterende gedeelte. De proefleiders bleken door dit idee kennelijk zo gepredisponeerd, dat zij na verdeling van een cirkel in vieren op de volgende wijze de verdeling van een rechthoek in vieren door drie parallelle sneden in plaats van analoog aan de cirkelverdeling als opmerkelijk signaleerden; (de gedemonstreerde verdeling van de cirkel in vieren werd door de proefleiders overigens *niet* in verband gebracht met het genoemde zesde aspekt van het breukbegrip).




- Piaget's theorie van de gefaseerde ontwikkeling van het kind; nadrukkelijk werd telkens nagegaan of de proefpersoontjes vanaf een bepaalde leeftijd (4;2) in de samengevoegde delen van een verknipte cirkel of rechthoek weer het geheel herkenden. De bedoeling hiervan is duidelijk, namelijk de vraag te kunnen beantwoorden of betrokken proefpersoontjes de fase van de konkrete operaties al waren 'binnengestapt' (dus of de operatie 'in gelijke delen verdelen' voor de proefpersoontjes reversibel is). De vraag is overigens of hier in strikt psychologische zin wel sprake is van een omkeerbare operatie (zie ook: de kritische beschouwing van Piaget's benadering. (Pagina 299)

### 3.1 *Fasering in de ontwikkeling van het (eerlijk) verdelen*

Deze fasering berust op proefjes, die gehouden werden met kinderen, die varieerden in leeftijd (2;10) tot (7;6). De proefjes bestonden uit het verdelen van papieren 'koeken' (rechthoeken, vierkanten, cirkels) onder twee, drie, etc. poppen. Op grond van een zinsnede in het protokol op pagina 307 rijst het vermoeden, dat de poppen ongelijke afmetingen hadden:
*These he shares out among the four dolls as best he can, with an eye to their size.*[14]

Fase 1: In twee gelijke delen verdelen (tot (4;0)) of zelfs (4;6).
Voorbeeld van een deel van een protokol (pag. 386):[15]

*Boc (2;10) prié d'indiquer d'avance, sur une galette en papier, comment il compte 'partager le gâteau pour que le monsieur et la dame aient la même chose à manger' couvre le cercle de toutes sortes de traits irréguliers. Invité à partager réellement il commence par enlever un morceau: 'C'est pour la dame'; puis un second: 'c'est pour le monsieur'; après quoi il continue jusqu'à six morceaux en en donnant encore un au monsieur, puis sans plus s'occuper du partage.*

Het in deze fase geobserveerde aanpakgedrag van kinderen wordt gekenmerkt door de volgende aktiviteiten:

- kinderen verdelen de koek niet in 2 delen, maar in vele kleinere delen;
- kinderen geven elk van de poppen een ongeveer gelijk stukje en een groot deel van de 'koek' blijft over;
- kinderen verdelen de koek in drie stukken (daarmee, zo luidt dan de verklaring, aantal stukken en sneden verwarrend);
- kinderen verdelen de koek eerlijk in tweeën.

Nog een protokolgedeelte (pag. 388):

*Pie (4;6), commence par sectionner la galette d'un seul trait, mais sans réaliser l'égalité des parties: 'Mais les deux veulent la même chose à manger. Oui (il découpe la plus petite partié en deux). – Et ça (la grande partie)? – ça c'est la table. –*

Opvallend in vrijwel alle protokollen van proefjes is de hardnekkigheid waarmee de proefleider volhoudt telkens dezelfde vraag te stellen. (Zie bijv. het protokol van Geo, pag. 297). Theoretische uitspraken met betrekking tot de ontwikkeling van het breukbegrip bij jonge kinderen dreigen hierdoor gebaseerd te worden op eenzijdige momentopnamen en niet op longitudinaal onderzoek. Dit bezwaar behoudt zijn geldigheid ondanks het feit, dat twee maanden later dezelfde Pie nog eens ondervraagd werd (en later nog eens). Nu moest hij een koek in drieën verdelen. Uit zijn eerste reakties blijkt duidelijk, dat hij nu weet wat halveren is. Bij de benoeming van de afzonderlijke delen negeert hij echter hun relatie tot het geheel.

Protokol (pagina 398):

*Pie (4;8), pour répartir la galette en parts égales à l'intention de trois poupées A, B et C, la coupe en deux moitiés dont l'une est attribuée à A, tandis que l'autre est elle-même partagée en deux quarts en faveur de B et de C: 'Elles sont toutes contentes? – Celle-ci (A) a une moitié et celles-ci (B et C) deux moitiés (= deux moitiés de moitiés!). Ça fait deux moitiés et une moitié. – Mais elles mangent la même chose? – Celle-ci mange plus. – Alors fais maintenant juste: chacune la même chose! – (Pie partage une nouvelle galette en deux).*

Met betrekking tot het eerlijk verdelen in tweeën wordt verwezen naar een onderzoekje van A. Rey. Dit gebeurt op grond van de stellingname (311):
*Increasing the size of the original whole postpones sharing in equal halves.*

Rey vroeg aan ca. 50 kinderen een 1 cm brede papierstrip ter lengte van 18 cm in twee gelijke stukjes te verdelen. De proefpersoontjes mochten daarbij een liniaal, een potlood en touw gebruiken. Kinderen, die de opdracht niet goed uitvoerden, mochten enkele hernieuwde pogingen doen, totdat ze de beste oplossing hadden gegeven.

Het aanpakgedrag, dat Rey waarnam vertoont veel overeenkomst met de door Piaget c.s. gesignaleerde nivo's.

Door geen van genoemde onderzoekers is een relatie gelegd met door de proefpersoontjes ervaren verdeelsituaties in het gezin, waarbij het heel gebruikelijk is, dat

- technische middelen niet toereiken om strikt eerlijke verdelingen tot stand te brengen;
- het verdelen dikwijls gefaseerd plaats vindt;
- een rest overblijft.

Fase 2: Verdelen in drie gelijke delen.
Subfase 2a.
Voor deze fase geldt:

- het probleem van de tweedeling wordt opgelost (bij kleine en regelmatige gehelen);
- bij grote of onregelmatige gehelen ondervinden de kinderen nog moeilijkheden, vooral bij herhaald halveren om vierden te krijgen;
- verdelen in drieën: de onderscheiden oplossingsnivo's zijn parallel aan die van het verdelen in tweeën, namelijk:
- drie ongeveer gelijke stukjes af- of uitsnijden en een reststuk overlaten;
- verdelen in vieren met:
  – weglating van één part;
  – verdeling van één part in drieën;

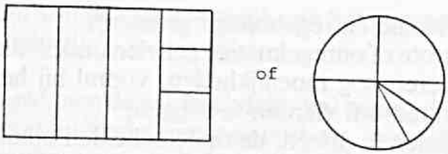
Een protokol (pagina 397):

*Geo (6;1), enfin, se rapproche du niveau II B. Il découpe d'abord dans la galette trois petites tranches qu'il distribue en négligeant le reste. 'Mais il faut qu'elles mangent tout. – (Il distribue à nouveau trois morceaux, puis un troisième ensemble de trois, mais il reste un dixième morceau). – Et ça? – C'est pour la maman. – Non, elle a déjà mangé la sienne. Que faire? – Je ne sais pas.' On redonne une nouvelle galette, mais en demandant que les poupées mangent tout, chacune la même chose que les autres et en une seule fois. – (Geo coupe quatre morceaux successifs, sans dichotomie et en échouant simplement à anticiper les tiers.) – Ça ira? – Non, c'est trop. Celui-là (4') est pour un autre jour. – Non, elles veulent tout maintenant. – (Il partage le dernier quart en trois et distribue.) – Essaie encore avec cette nouvelle galette. – (Il refait 4 morceaux et coupe le dernier en trois.)*

*Et avec cette autre galette? – (Il arrive cette fois à trois parties, mais dont l'une vaut 1 /2 et chacune des autres 1 /4).'*

*On présente alors un papier en demandant de tracer les coupures au crayon: Geo aboutit d'abord à 4, puis, lors d'un nouvel essai, à 7 (il rapetisse les parties au lieu de les agrandir, en voulant passer de 4 à 3!). Enfin, il aboutit à trois, mais de valeurs respectives d'environ 4,5; 3,5 et 2 dixièmes: 'J'ai coupé gros le premier. Autrement ça sera (= ça aurait fait) quatre morceaux.' En d'autres termes, il a en fait fusionné deux quarts en une seule première partie, pour ne pas aboutir à quatre!*

Hier blijkt, hoe de vaste relatie tussen het aantal delen en het aantal sneden (kenmerk 4 van Piagets breukbegrip) voor Geo uit het geciteerde protokol niet geldt. Hij bedenkt zijn – overigens volkomen legitieme oplossing voor het probleem van het verdelen in drieën:




De proefleider dwingt hem echter tot een rechtstreekse verdeling in drieën, daarbij volkomen voorbijgaand aan het feit, dat deze verdeling niet alleen volledig afwijkt van halveren of verdelen in vieren, maar bovendien in technisch opzicht veel lastiger is. De konklusie aan het eind van het protokol verdient daarom ook niet serieus genomen te worden.

1. het in drieën verdelen van een rechthoek blijkt eenvoudiger dan van respektievelijk een vierkant of een cirkel;
2. soortgelijke reakties worden waargenomen bij het verdelen in vijfden;
3. de proefpersoontjes realiseren zich nog niet – volgens Piaget c.s. – dat de delen samen weer gelijk zijn aan het geheel.

Subfase 2b (kinderen van 6 à 7 jaar)
– de tweedeling levert geen problemen meer;
– de driedeling eveneens;
– een hele in vijfden verdelen is nog steeds moeilijk;
– conservatie van het geheel wordt gerealiseerd, al is het intuïtief en niet-operationeel;

Fase 3: Verdelen in vijf of zes gelijke delen
Verdelen in vijf en zes gelijke delen blijft moeilijk en de juiste oplossingen worden niet vóór deze derde fase gerealiseerd. Het al dan niet kunnen voldoen aan opgedragen verdelingstaken – en dit geldt ook voor de voorafgaande fasen –, wordt verklaard vanuit het al dan niet beschikken over een operationeel 'anticipatory schema', dat wil zeggen het kind zou de opgedragen verdeling pas tot stand kunnen brengen, wanneer het bij machte is vooraf de verdeling mentaal voor te bereiden c.q. uit te voeren op basis van een bepaald vast (mentaal) schema.

### 3.2. *Deel-geheel relaties en conservatie van het geheel*

Bij de verdeling van een discontinue of een continue-eenheid blijft dit als geheel van de delen geconserveerd. Kinderen, die – verkerend in de pré-operationele fase – intuïtief op verdelingstaken reageren, zijn nog niet bij machte dit te begrijpen.

In de beginfase van het eerlijk verdelen beschikken de proefpersoontjes nog niet over een 'anticipatory schema'. Later gaat hun aanpakgedrag bij opgegeven verdeeltaken hierop berusten. Kenmerkend voor een dergelijk schema is, dat het totale verdeelgedrag er (later) door gestuurd wordt. Bovendien heeft een dergelijk schema een operationeel karakter en het stemt overeen met de verschillende onderscheiden aspekten, waardoor het breukbegrip zich kenmerkt.

Het verdeelgedrag is *trial-and-error gedrag*, wanneer dergelijke schema's het gedrag niet sturen. Is er wel sprake van een *anticipatory schema*, dan wordt het (eerlijk) verdelen tot een volwaardige operatie, ook al, omdat de vraag naar de invariantie van de hoeveelheid, die de verdeling ondergaat nu legitiem wordt: de operatie blijkt reversibel, terwijl het betrokken schema de operatie een min of meer definitief karakter verleent.

In de trial-and-error fase wordt de omkeerbaarheid van de operatie door de proefpersoontjes nog genegeerd, ofwel niet onderkend of niet begrepen. Het hergroeperen van de stukjes, waarin het oorspronkelijke geheel verdeeld is, tot een eenduidig geheel, is alleen dan de inverse van het verdelen, als dit hergroeperen eveneens verloopt langs een vaste vooraf bepaalde weg (de inverse van het oorspronkelijke anticiperende schema), want alleen dan kan die weg op ondubbelzinnige wijze in omgekeerde richting worden afgelegd.

Ter indicatie van de leeftijd, waarop een kind het laatstgenoemde aspekt van het eerlijk verdelen als konkrete bron van het breukbegrip *in de vingers heeft*, nemen we nog een protokol op (blz. 421).

*Mog (5;11) compare la galette entière et les trois tiers qu'il a sectionnés: 'Moi j'ai ça (l) et toi tu as ça (3 /3). Est-ce que nous avons la même chose à manger? – C'est la même chose, parce qu'on a coupé. – C'est tout á fait la même chose?*

*– Oui. 'Et, après avoir divisé en quatre: 'Combien de gâteaux la maman a apportés? – Un. – Et combien de gâteaux peut-on faire avec ces morceaux? – Un seul, parce qu'il n'y en avait qu'un (avant le partage).'*

### 3.3. *Konklusies van Piaget c.s.*

De beschreven bevindingen dragen bij tot een beter begrip van:
– het aanbrengen van ruimtelijke verdelingen door kinderen (zij het tweedimensionaal);
– de parallel die er is tussen het onderverdelen van continue hoeveelheden en discrete hoeveelheden (*nesting logical classes*);
– het kwantificeren van delen door middel van breuken;

Het falen van kinderen bij een opgedragen verdeeltaak zou berusten op het niet anticiperen op mogelijke relaties tussen de delen en het geheel. De gevergde operaties voor het verdelen van vlakdelen of continue gehelen zijn dezelfde als die, welke optreden bij de verdeling van de discontinue collecties. In beide gevallen is er een nieuwe inverse relatie tussen het verdelen en het bijeenvoegen (of, voor de *logische klassen*: 'the nesting of sub-classes within a hierarchical total structure', pagina 334).

Voordat de parten, waarin een geheel wordt onderverdeeld op overeenkomsten met de aspekten van het breukbegrip vergeleken worden, dient eerst de nodige aandacht aan het verdelen zelf besteed te worden (the elaboration of operations of subdivision is a lengthy process, pagina 335). De delen moeten eerst geconstrueerd worden als integrerende delen van een geheel dat uit-een-gelegd en bijeen gevoegd kan worden. Dan pas kunnen de delen onderling vergeleken worden. Het breukbegrip sluit nauw aan bij het voorgaande, want delen, die in relatie tot het geheel beschouwd worden, kunnen ook onderling vergeleken worden (en weer als nieuwe eenheid gaan optreden). Wanneer het eenmaal zover is, is het breukbegrip volledig geconstitueerd. Voor het zesde à zevende levensjaar komt het kind aan dit *volledige breukbegrip* niet toe.

### 3.4. *Kritische kanttekeningen bij het voorafgaande*

N.a.v. Piaget's bevindingen met betrekking tot de ontwikkeling van het breukbegrip bij jonge kinderen, kan men stellen: het kind, dat een fysisch geheel volgens een vooropgezet mentaal plan in gelijke delen kan verdelen, de verkregen delen zowel in relatie tot geheel als tot elkaar kan beschouwen en in de samengevoegde delen weer het oorspronkelijke geheel herkent, heeft het breukbegrip volledig verworven.

Het is een verdienste te noemen, dat het belang van het (eerlijk) verdelen voor de constitutie van het breukbegrip onderkend is. Eveneens van belang is de benadrukking van het relatieve in het breukbegrip. Deze vaststelling heeft op zijn minst twee implicaties voor het onderwijs, namelijk:

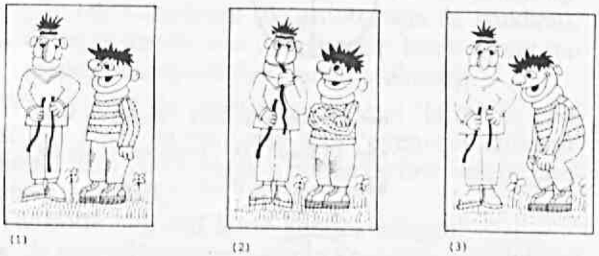
- het is niet juist, zoals in de traditionele didaktiek van het onderwijs in breuken gebeurt, de delen, waarin een geheel verdeeld wordt, van een permanent breuketiket te voorzien, bijvoorbeeld in breukendozen omdat breuk daarmee de betekenis van absolute waarde krijgt; en
- een deel zelf niet meer als geheel kan optreden. De weg naar het fleksibel omspringen met eenheden wordt hierdoor geblokkeerd.

Men heeft bij het (eerlijk) verdelen het concept *eerlijk verdelen* teveel vereenzelvigd met de vaardigheid in het (eerlijk) verdelen. Vooral bij de verwijzing naar het experiment van Rey komt dit tot uitdrukking: *Increasing the size of the original whole postpones sharing in equal halves.*

Met andere woorden: het bemoeilijken van de technische omstandigheden van het verdelen schort het verdelen in twee 'gelijke helften' op. Hieraan een uitstel van de begripsvorming te koppelen, lijkt voorbarig, hoewel gesteld wordt (335): *. . . the elaboration of operations of subdivision is a lengthy process, the concept of a fraction follows closely on that of a part.*

De technische vaardigheid van het (eerlijk) verdelen zal wellicht metterdaad een 'lengthy process' vergen. Deze conclusie ook geldig te verklaren voor het begrip zelf, vereist meer benaderingen. Het elimineren van de technische vaardigheid van het eerlijk verdelen vormt één mogelijkheid. Tegenover het geciteerde eksperiment van Rey zou men ook de benadering van het *oneerlijk* verdelen kunnen stellen.[17]

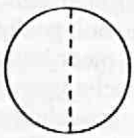
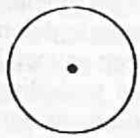
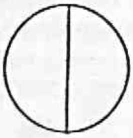
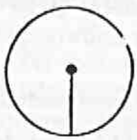
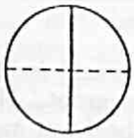
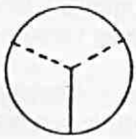
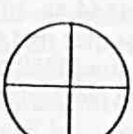
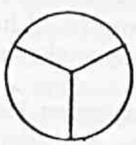
Paradigmatisch kan in dit verband genoemd worden het 'eerlijk' verdelen van een dropveter door Bert en Ernie, twee bekende Sesamstraatfiguren (educatief programma van de NOS voor kleuters):



(1) (2) (3)

Als de dropveter verdeeld is (1) blijkt: 'de twee helften zijn niet even groot.' Het verschil tussen beide delen en zelfs heel wat meer dan dat, wordt letterlijk weggewerkt door Bert (2).
'Jammer, nu is de andere helft weer groter.' Het 'konflikt met het eerlijk verdelen' dient opgelost en het proces herhaalt zich(3).
De verdeler nuttigt uiteindelijk de hele dropveter. De ander verbergt in wanhoop het hoofd in zijn armen. Twee kijkende kleuters (4 en 5 jaar) die we observeerden, leefden intens mee met de gedupeerde, vol onbegrip over zoveel stupiditeit en oneerlijkheid bij de verdeler. Zouden zij niet weten wat eerlijk verdelen in tweeën is?

Piaget c.s. veronderstellen klaarblijkelijk een toename in moeilijkheid van de verdeeltaak bij toename van het aantal delen, waarin het geheel verdeeld moet worden, getuige de suksessieve bespreking van halveren, in drieën verdelen en verdelen in vijven en zessen (het verdelen in vieren wordt geïnterpreteerd als herhaald halveren). Het verdelen van een cirkelvormige 'koek' in drieën en/of vijven is veruit het gecompliceerdst, al was het alleen al vanwege het wezenlijk anders verlopen van het verdeelproces.

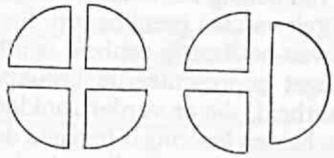
| *Verdelen in vieren* | *Verdelen in drieën* |
| --- | --- |
| globaal bepalen van een middellijn: | globaal schatten van de ligging van het middelpunt (de middelpuntsbepaling van een cirkel blijkt voor derdeklassers nog een vrij lastig probleem): |
|  |  |
| het doorknippen of doorsnijden, brengt een echte verdeling tot stand: | het doorsnijden van de cirkel langs een straal (er wordt dus nog geen verdeling tot stand gebracht): |
|  |  |
| het opnieuw globaal bepalen van een middellijn (loodrecht op de aangebrachte doorsnijding): | het op het oog in drieën verdelen: |
|  |  |
| het opnieuw dóór-knippen of dóórsnijden, brengt voor de tweede maal een echte (eerlijke) verdeling tot stand: | het daadwerkelijk uitvoeren van de verdeling (pas bij de laatste snede komt een eerlijke verdeling tot stand: |
|  |  |

In deze vergelijkende analyse manifesteert zich niet alleen een technisch verschil tussen het respectievelijk in vieren en in drieën verdelen, maar vooral ook een psychologisch verschil. Bij het in drieën verdelen, lijk je inderdaad over zoiets als een 'anticipatory schema' te moeten beschikken. Bij het verdelen in vieren is wat ruimte voor 'beslissingen onderweg'. Het in zessen verdelen sluit veel meer aan op het in vieren verdelen en zou beter aan het verdelen in drieën vooraf hebben kunnen gaan. Ook hier is ruimte voor maatregelen onderweg. Het kind, dat geneigd is eerst te halveren kan daarna het vervolg van de verdeeltaak uitvoeren op grond van een nieuwe beslissing, die dan pas genomen wordt en niet per se op grond van een vooraf aanwezig mentaal schema.

Bij het doen van onderzoek naar de ontwikkeling van mathematische begrippen bij kinderen loopt men het gevaar de vergissing te begaan mathematisch-(fysische) evidenties ook psychologisch evident te verklaren. Een dergelijke vergissing wordt welhaast voor de handliggend, wanneer de epistemologische visie van de onderzoeker (volwassen) mathematische begrippen aan dàt kennisgebied toedicht, dat het kind zelf konstrueert. Van een dergelijke epistemologische visie is bij Piaget c.s. sprake, vandaar dat aan de waarneming van de proefleiders mogelijk enkele details ontsnapt zijn, die opmerkelijk genoemd mogen worden, althans de moeite waard zijn te vermelden. Ze berusten op de genoemde impliciete veronderstelling dat mathematisch evidenties ook psychologisch evident zouden zijn. Het betreft hier het begrip 'conservatie van het geheel':

a. een rechthoekige, vierkante of cirkelvormige koek wordt omwille van het eerlijk verdelen in stukken geknipt. Als omgekeerde van deze verdeeloperatie wordt het weer bijeenvoegen genoemd. Ook hier geldt het bekende adagium uit de Gestaltpsychologie: 'Het geheel is meer dan de som der delen.' Het geheel werd omwille van het eerlijk verdelen letterlijk gebroken en geen enkele 'inverse concrete operatie' – zeker niet die van het bijeenvoegen – vermag dit geheel weer in takt te brengen, dat wil zeggen de breekoperatie teniet te doen. Zowel psychologisch als objektief is de situatie na het knippen anders als ervoor. Alleen vergelijking van begin- en eindtoestand leert, dat (in dit geval) de oppervlakte invariant is gebleven. Om daaraan toe te kunnen zijn, dienen de proefpersoontjes ruimte gehad te hebben kontekst van het eerlijk verdelen onder poppen emotioneel te verwerken. Dit vormt de eerste bron van misverstanden voor de geciteerde proefpersoontjes.

b. In een protokol, dat we niet opgenomen hebben verkeert Pie (zie pagina 297) in de volgende situatie:
Twee ronde koeken zijn alsvolgt verdeeld:



De vraag is of de twee aanwezige poppen dezelfde hoeveelheid koek ( . . . 'la même chose' . . . ) zullen eten. Als Pie 'ja' zegt, heeft hij de conservatie van het geheel te pakken, maar Pie zegt geen 'ja'. Hij geeft elke pop (opgelucht, omdat één stuk op de grond gevallen was) drie stukken, ergo . . .

De geschetste situatie is echter gecompliceerder, dan ze op het eerste gezicht lijkt, zeker voor een kind van (4;8). Allereerst geldt de onder a) genoemde psychologische bron van misverstand. Verder kan aan de geschetste situatie een drietal kwantitatieve aspekten onderkend worden, namelijk:

- het niet equivalent zijn van de delen;
- de equivalentie van twee porties koek vanuit oppervlaktestandpunt (de grootte van de stukken);
- de equivalentie van twee porties koek vanuit numeriek standpunt (het aantal stukken);

Wat bedoelt de proefleider nu met 'la même chose'?[15] Pie's interpretatie van 'evenveel stukken' houdt hem voorlopig nog buiten de fase van de concrete operaties.

Tenslotte nog wat korte kanttekeningen:

- de gebruikte poppen waren kennelijk verschillend van afmeting, getuige het eerder weergegeven citaat. Eerlijk verdelen betekent in dit verband (wellicht): Rekening houden met ongelijke behoeften[14].
- de breukopvatting, die als uitgangspunt voor het onderzoek dient, is eenzijdig en – voorzover het de verdeelprocedure betreft – sterk gedetermineerd. Er is louter sprake van de breuk als breker, die 'werkt' op vlakdelen. Er is een vaste relatie tussen het aantal sneden en het aantal delen, waarin de eenheid onderverdeeld wordt. Gefaseerd verdelen past niet binnen het gepresenteerde concept.
- de beschreven situaties zijn bepaald door een volwassen breukopvatting. Er wordt geen melding gemaakt van spontane uitingen, die wijzen op een in ontwikkeling zijnd breukbegrip.

### 3.5. *Samenvattend*

Piaget's onderzoekingen hebben vooral duidelijk gemaakt, dat ervaring in het uitvoeren van verdeeltaken een noodzakelijke voorwaarde is bij de constitutie van het breukbegrip.

Verder is van belang het accent, dat gelegd werd op de relativiteit van het breukbegrip. Een flexibele interpretatie van het begrip eenheid is inherent aan het door Piaget gepresenteerde breukbegrip, ondanks alle starheid, die er verder aankleeft.

De onderscheiden fasering is bepaald door de volgorde van de probleemaanbieding. Andere faseringen zijn evenzeer denkbaar[12].

## 4. *De breuken in het Wiskobas-programma*

Uit de analyse van voorafgaande studies resulteerden enkele aandachtspunten, die onder andere in het vervolg van de Wiskobas-aanpak van het 'breukenprobleem' van invloed zijn geweest. Onder verwijzing naar de paragrafen 2.3. en 3.4. noemen we nogmaals opsommenderwijs:

- er zijn meerdere bronnen voor het breukbegrip (meten/verdelen);
- de relativiteit van het breukbegrip;
- de veelheid van aspekten aan het breukbegrip;
- de breuk als equivalentieklasse;
- het belang van een zorgvuldige breukentaalontwikkeling;
- aandacht voor het vergelijken en ordenen van breuken;
- observatie van (spontane) kinderlijke aktiviteiten, waarin breuken veroorzakende processen een rol spelen;
- analyse van breukenveroorzakende processen;
- het onderscheid maken tussen begripsvorming en waarneembaar gedrag, dat de aanwezigheid van begrip zou (moeten) illustreren.

### 4.1. *Kenmerken van een vernieuwd onderwijsprogramma voor breuken volgens Wiskobas*

We stellen ons voor te kiezen voor een veelsporige benadering van het breukbegrip, waarbij het in alle aspekten vanuit verschijnselen in de realiteit en rijke konteksten ontwikkeld wordt.

De methode van de didaktische fenomenologie heeft inmiddels geleid tot een analyse van het breukbegrip in al zijn rijkdom aan toepassingsmogelijkheden.[18] Als belangrijke konkrete bronnen van het breukbegrip noemen we het eerlijk verdelen, het meten en vergroten en verkleinen.

*Het eerlijk verdelen*

Dit gebeurt niet op grond van een vooraf vastgelegd stramien, zoals bij Piaget, maar uitgaande van het verschijnsel als zodanig, zoals het zich voordoet in de praktijk van alle dag.

Het eerlijk verdelen in het breukenonderwijs van nu is al een modelmatig verdelen, waarbij voldaan moet worden aan eisen van

- gelijkwaardigheid van de delen en de eenheden, in geval er meerdere eenheden verdeeld moeten worden;
- de uitputtendheid van het verdeelproces zelf (het derde kenmerk van Piaget).

Bij allerlei verdeelsituaties in de praktijk van alle dag blijft er juist vaak een rest of schieten de technische middelen tekort om aan de gestelde gelijkwaardigheidseisen te voldoen.

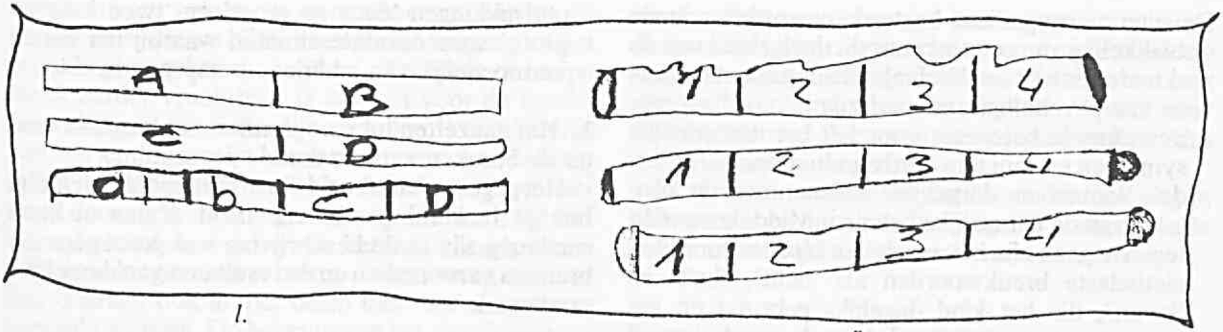
Van dergelijke regels bij het verdelen als proces, dat breuken veroorzaakt, dienen de leerlingen (zich) bewust (gemaakt) te worden. Evenals bij 'meten' kan ook hier de breuk een signaal zijn tot het uitvoeren van een breekoperatie en anderzijds het resultaat van een dergelijke operatie beschrijven. Voor Piaget c.s. betekende verdelen een aan vaste regels gebonden procédé, getuige de als dwingend vooraf geformuleerde vaste relatie tussen aantal delen en aantal sneden bij een verdeling.

Een dergelijke starheid kan – zoals we gezien hebben – uiterst bruikbare reacties van kinderen als ongepast, dat wil zeggen niet passend binnen het concept van de onderzoeker, doen elimineren. Aan een eenvoudig voorbeeld willen we laten zien welk waardevol materiaal voor het breukenonderwijs behouden blijft, wanneer kinderen niet binnen het stramien van het vooraf door de onderzoeker gedefinieerde concept behoeven te reageren, doch de ruimte krijgen hun eigen ideeën in bepaalde verdeeltaken te verwezenlijken[19]:

Het probleem betreft twee kinderen uit één gezin, die samen met een vriendje en vriendinnetje uit school komen en nu gevieren van moeder 'iets lekkers mogen hebben'. Er blijken 3 dropstaven en 2 dropveters te verdelen. De leerlingen laten in tekeningen zien hoeveel ieder krijgt. Ze verdelen eerst de dropstaven: De onderwijzer observeert de aktiviteiten van de leerlingen nauwgezet en registreert (o.a.) de volgende oplossingen en tekent deze op het bord:

A, B, C en D respectievelijk 1, 2, 3 en 4 zijn aanduidingen voor de vier kinderen in het probleem.

Na deze aktiviteit begint de gezamenlijke bespreking. De leerlingen brengen onder woorden dat je bij beide verdelingen wel hetzelfde krijgt, maar dat de




l.

r.

verdelingen zèlf toch duidelijk verschillen. Dit komt in de verhalen over het verloop van de verdeelprocessen duidelijk naar voren en ook heel nadrukkelijk in de manier waarop het resultaat van die processen beschreven wordt. Met het grootste gemak wordt de volgende bloemlezing aan beschrijvingen bij de tekeningen geproduceerd.

Ieder krijgt: – een half en een kwart (l) – een kwart plus een kwart plus een kwart (r), – drie keer een kwart (r), – een hele min een kwart (l en r), – een half en de helft van een half (l)

De omschrijvingen worden ook in symbolentaal genoteerd:
$1/2 + 1/4$, $1/4 + 1/4 + 1/4$, $3 \times 1/4$, $1 - 1/4$, $1/2 + 1/2 \times 1/2$

De hele klas is er zich van bewust, dat het allemaal omschrijvingen zijn, die uitdrukken, dat ieder $3/4$ dropstaaf krijgt en dit wordt ook onder woorden gebracht.

*Meten*
Bij dit onderwerp wordt evenmin de roete bepaald door een eng geplaveid paadje, zoals bij Davydov. Het probleem georiënteerd meten van grootheden als lengte, oppervlakte, inhoud en gewicht wordt voor de ontwikkeling van het breukbegrip en het opereren met breuken ten volle benut. De breuken vormen daarbij geen doel in zichzelf doch staan in dienst van benaderingsprocedures, waarbij het meten verfijnder, nauwkeuriger wordt. De decimale verfijning van maten waarmee gemeten wordt resulteert in kommagetallen als beschrijvers van meetresultaten. Met *meten* als gemeenschappelijke bron wordt er dus een nauwe inhoudelijke relatie gelegd tussen gewone breuken en kommagetallen. Eerder hebben we laten zien hoe bij het verfijnen van de standaardmaat in een meetproces zich allerlei aspecten van het breukbegrip kunnen voordoen.

*vergroten en verkleinen* (uitrekken en inkrimpen). Wiskundig gezien gaat het om gelijkvormigheidstransformaties. Hoewel er bijvoorbeeld bij het vergelijken van een objekt uit de realiteit met diverse afbeeldingen daarvan op verschillende grootte geen sprake meer is van gehelen en verdelen in delen, blijken breuken toepasbaar om bepaalde grootterelaties numeriek te beschrijven. (Zie in dit verband het eerste aspect van Piaget's breukopvatting). Deze concrete bron van het breukbegrip bewerkt tevens, dat in een vroeg stadium ook de ontwikkeling van het schaal- en verhoudingsbegrip in de totaalleergang wordt ingebed.

N.B. Ook 'het maken van mengsels' in de ruimste zin van het woord, is een rijk gebied voor verhoudingen en breuken. We kunnen in dit korte bestek onmogelijk streven naar volledigheid. We willen de lezer slechts een impressie geven in welke richting we denken en bezig zijn. Hetzelfde geldt voor het terrein van de waarschijnlijkheidsrekening dat zich zowel als bron van het breukbegrip en als toepassingsgebied laat benutten, doch dat met betrekking tot het zo uiterst gecompliceerde kansbegrip veel onderzoek vereist. Onderzoekers op het gebied van de cognitieve ontwikkeling hebben tot nu toe weinig aandacht aan de ontwikkeling van het stochastische denken besteed.

Samenvattend kan men met betrekking tot de veelsporigheid stellen, dat we gezocht hebben naar breuken veroorzakende processen in een zo breed mogelijk kader, waarbij dynamische en statische breuken respectievelijk hun rol spelen als beschrijvers van dergelijke processen en de resultaten ervan.

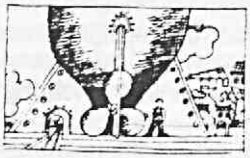
## 4.2. *Principes*

Enkele belangrijke principes daarbij – die zich aan het gegeven voorbeeld laten illusteren, zijn de volgende:
1. Ontwikkeling van een breukentaal:

De uiterste zorg dient besteed te worden aan de ontwikkeling van een taal voor dit deelgebied van de wiskunde. Een tweetal belangrijke argumenten hiervoor van psychologische aard zijn:

- de storende betekenis voor het breukbegrip die symbolen en rangtelwoord aanduidingen als 'derde', 'vierde' en dergelijke ontlenen aan de kontekst van de natuurlijke getallen. Middelen om dit tegen te gaan zijn het aansluiten bij de natuurlijke, nietbelaste breukwoorden als 'helft', 'half' en 'kwart', die het kind dagelijks gebruikt en het toepassen van uitsluitend formele symbolentaal uitstellen. In het voorbeeld hebben we laten zien hoe vanuit uitdrukkingen ontleend aan de omgangstaal de notatie in symbolen ontwikkeld wordt. Beide notaties worden een tijdlang naast elkaar toegepast.
- de storende invloed van het rekenonderwijs in het algemeen op de attitude van de leerlingen bij de behandeling van verhoudingsproblemen. Telkens opnieuw blijkt, dat leerlingen, wanneer ze verondersteld worden een zekere verhoudingsconstantie in acht te nemen niet multiplicatief doch additief redeneren.[20].

Bv.



Binnen aktiviteiten in het kader van *vergroten en verkleinen* werd de vraag gesteld: 'Als de man 1.80 m lang is, hoe groot is dan de scheepsschroef?' en vervolgens 'als de schroef nu eens 2.40 m is, hoe groot is dan de man?' In de volgende redenering manifesteert zich het bedoelde additieve aanpakgedrag: 'In het eerste geval was de man 1.80 m. De schroef is ongeveer gelijk aan $1^1/_2$ man, dus 2.70 m. De tweede keer is de schroef 30 cm korter, *dus* de man ook.' Door een vroege ontwikkeling van het verhoudingsbegrip en het taalgebruik daarbij worden de leerlingen zich bewust van verschillende standpunten, waarop men zich bij verhoudingsproblemen kan stellen, namelijk beschouwing onder het opzicht: zoveel keer zo veel, groot, lang, klein, o.i.d. (het multiplicatieve standpunt) en zoveel erbij, groter, langer, kleiner, korter o.i.d. (het additieve standpunt) en dat beide standpunten inhoudelijk van elkaar afhankelijk zijn. In de omgangstaal blijkt het misverstand omtrent het standpunt bij verhoudingszaken uit de uitdrukkingen 'eens zo groot' en 'twee keer zo groot' voor dezelfde situatie, waarbij het eerste vermoedelijk van additieve oorsprong is.

2. Het aanzetten tot de operaties met breuken vanuit de breuken veroorzakende processen.

Het gegeven voorbeeld illustreert ondubbelzinnig, hoe de bewerkingen al van meet af aan in kiem aanwezig zijn in de beschrijving van processen die breuken veroorzaken en de resultaten van dergelijke processen.

3. Modelgebruik

Hetzelfde voorbeeld toont tevens hoe het verdeelprobleem van de dropstaven als een strokenprobleem getekend wordt door de leerling, die voor de meest efficiënte verdeling gekozen heeft. In de andere oplossing zijn de dropstaven nog herkenbaar. Deze ruimte voor gedifferentieerde oplossingen stelt de leerling voortdurend in staat zijn eigen ideeën met die van anderen te confronteren en bepaalde keuzen te doen voor het vervolg, al dan niet ten gunste van eigen vondsten.

Op soortgelijke wijze worden behalve de strook bijvoorbeeld ook de klok en de rechthoek ontleend aan konkrete situaties en later als model gebruikt voor het oplossen van breuken en verhoudingsproblemen in andere konteksten. Op deze wijze blijkt het materiaal, waaraan het mentale object breuk geconstitueerd wordt, van blijvende betekenis te zijn.[7]

4. Uitgestelde algoritmisering

Reeds bij het gedeelte over het onderzoek van Davydov c.s. maakten we melding van het feit, dat we het opereren met breuken, die in betekenis gereduceerd zijn tot algebraïsche objecten, dat wil zeggen het algoritmiseren met breuken als doel in zichzelf, tot het gebied van de algebra rekenen. Aan bewerkingen met breuken willen we dus alleen aandacht besteden voorzover deze gemotiveerd worden vanuit de aangevatte probleemstellingen en zonder dat daarbij eenduidig vastgelegde algoritmen zijn voorgeschreven. Deze dienen in het algoritmiseringsproces voor de diverse bewerkingen zelf samen met de leerlingen ontwikkeld te worden. Dat daarbij een kernrol is weggelegd voor 'de basiseigenschap van de breuken', zoals Davydov de equivalentie van breuken noemt, spreekt vanzelf, maar dan wel vanaf het prilste stadium, beginnend met gelijkwaardige verdeelsituaties (zie ook pag. 295)

5. Eénsporigheid bij het algoritmiseren

Bij de feitelijke algoritmisering van de bewerkingen met breuken, volgen we voor elk ervan één spoor van de vele, die we bij de veelsporige toegang tot het breukbegrip gekozen hebben. Hetzelfde principe bleek eerder vruchtbaar te werken voor de hoofdbewerkingen met natuurlijke getallen.[21] Omdat vrijwel alle leerlingen niet alleen veel ervaringen hebben in het (rechtvaardig) verdelen, doch bovendien heel sterk door die kontekst gemotiveerd blijken, ligt het voor de hand deze bron van het breukbegrip daarvoor in ieder geval uit te buiten. In een vroeg stadium kan daaraan ook al 'het delen met rest' dienstbaar gemaakt worden. Op het punt van het algoritmiseren bij de breuken zullen we wellicht in een later fase nader publiceren.

4. *Besluit*

In het breukenonderwijs van nu kampen veel leerlingen met allerlei (psychologische) problemen van uiteenlopende aard:

- de eenzijdige instap op basis van konkretiseringen van formele begrippen;
- de te korte konkrete fase om een volwaardig begripsvormingsproces te kunnen garanderen;
- de taalproblemen door de belasting van gebruikte symbolen en breuknamen binnen de kontekst van de natuurlijke getallen;
- de gebrekkige relatie tussen de konkrete fase en de abstractere nivo's;
- het afdoen van gelijkwaardigheid als gelijkheidsrelatie;
- de algoritmische behandeling van gelijkwaardigheid en de reductie daarvan tot geïsoleerde gevallen;
- de negatie van de relativiteit van het breukbegrip;
- het ontbreken van een betekenisvolle band tussen het materiaal waarvan het begrip ontwikkeld wordt en de algoritmen voor de hoofdbewerkingen;
- de behandeling van de algoritmen voor de vier hoofdbewerkingen met breuken als ongemotiveerde recepten (regels als 'teller keer teller' en 'noemer keer noemer' en '. . . vermenigvuldigen met het omgekeerde'

En zo zou men kunnen doorgaan.

In dit artikel hebben we iets willen laten zien van de – wellicht wat ongebruikelijke – methoden waarmee we het probleem van de breuken hebben aangepakt.

De kritische beschouwing van enkele uit de literatuur beschikbare onderzoeken op dit terrein liet zien hoe didactische fenomenologie vanuit 'hoog inhoudelijk' doch 'onbevangen' standpunt en observatie met een open mind, openstaand voor individuele leer- en ontwikkelingsprocessen van kinderen in al zijn facetten een opbrengst kunnen geven, waaruit de kondities voor de inrichting van onderwijsleerprocessen op dit gebied afleidbaar zijn. Er moet nog veel werk verzet worden. De resultaten[19] rechtvaardigen echter het doen van de veronderstelling, dat we op de goede weg zijn.

In verband met het feit dat het onderzoek nog in volle gang is en bijsturen dus mogelijk nodigen we de lezers uit tot reakties op genoemde aanzetten.

*Noten*

1. *Ped. Studiën, jrg. 56, no. 1. pagina 17–25.*
2. *Zie bv.* Assink E. M. H. en Verloop N. *Het aanleren van deel-geheel-relaties in het aanvankelijk rekenonderwijs.* Ped. Studiën 1977 (54) pagina 130–142, of Wolters, M.A.D. *Van rekenen naar algebra, een ontwikkelingspsychologische analyse.* Rijksuniversiteit Utrecht (1978).
3. Davydov V. V. en Tsvetkovič Z., *Over de konkrete bronnen van het breukbegrip.* Hoofdstuk II uit: Davydov V. V. (c.s.) *Psychologische mogelijkheden van jonge schoolkinderen in het wiskundeonderwijs,* Moskou (1969).
4. Zie Treffers A.: *Wiskobas doelgericht.* IOWO Utrecht (1978).
5. De beschikbaarheid van een (officieuze) vertaling in het Nederlands van het onder[3] genoemde hoofdstuk, dat op het IPAW aan de RU te Utrecht intern gebruikt wordt, maakt dit artikel o.a. mogelijk. Een geautoriseerde vertaling is voorzover bekend, niet gepubliceerd.
6. Piaget J., Inhelder B., Szeminska A.: *The child's conception of geometry.* (in het bijzonder hoofdstuk 12: *'The subdivision of area'*). London (1966).
7. Terminologie en procedure van de didactische fenomenologie zijn ontleend aan: Freudenthal H.: *Didactische fenomenologie van wiskundige grondbegrippen,* een nog niet voltooide interne IOWO-publikatie. Voor een voorbeeld van een gepubliceerde didactische fenomologie over het onderwerp verhouding en evenredigheid zij de lezer verwezen naar Freudenthal H. *Weeding and Sowing – Preface to a science of mathematical education;* Dordrecht, Holland; Boston USA (1978) of Freudenthal, H.: *Lernzielfindung im Mathematikunterricht,* in: Zeitschrift für Pädagogik, Jahrgang 20, Heft 5, oktober 1974. pagina 719–739.
8. De genoemde aspekten van het breukbegrip als resultante van de gepleegde fenomenologische analyse worden zeker niet allemaal door Davydov (c.s.) onderscheiden, integendeel zelfs, hij beschouwt alleen de breuk in de verhoudingsrelatie en gaat zelfs voorbij – en in de praktijk blijkt dit onderscheid psychologisch uitermate belangrijk – aan het dynamische complement ervan, namelijk de breuk in de verhoudingsoperator.
9. In de oorspronkelijke Russische tekst zijn de tekeningen erg onduidelijk. Hier en daar zijn wat

gegevens aan de plaatjes toegevoegd, omwille van de duidelijkheid.
10. Ped. Studiën, jaargang 56, no. 1, pagina 21.
11. Deze hulp van de leerkracht moet ongetwijfeld bezien worden in het licht van de door Vygotsky gehypothetiseerde 'zone van naaste ontwikkeling'. Het ware wenselijk, dat lezers van westerse publikaties over onderwijsexperimenten in de Sovjet-Unie de vaak verbluffende resultaten, die daarbij dan dikwijls vermeld worden in verband brengen met door de leerkracht verleende hulp (zie bv. Parreren C.F. van en Carpay J. A. M. *Sovjet-psychologen aan het woord*. Groningen (1972) pagina 261. Overigens verdient het idee op dergelijke wijze onderwijs te evalueren de nodige aandacht. Het door het IOWO in onderzoek genomen evaluatie-middel van de TOETSLES tijdens het onderwijsleerproces vertoont trekken van overeenkomst met de evaluatiewijze van Davydov c.s. en blijkt erg vruchtbaar zoals de eerste voorlopige resultaten leren. Dit komt niet alleen vanwege het evaluerend effekt van een toetsles, maar vooral ook door de diagnotiserende werking, die er van de resultaten van een dergelijke evaluatiemethode kan uitgaan.
12. Zie in dit verband: Streefland L. *Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction*. Educational Studies in Mathematics 9 (1978) 51–73 of Van den Brink J. en Streefland L. *Berichten uit het buitenland*. Wiskobas Bulletin, jaargang 8, no. 3, pagina 31–36.
13. Zie noot[5]. Op basis van Piaget's theorie over de cognitieve ontwikkeling is ook door anderen onderzoek gedaan naar de ontwikkeling van het breukbegrip. Zie in dit verband bv. Desjardins M. en Hétu J. C.: *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions*. Quebec, Canada (1974).
14. De vraag die hierbij onmiddellijk opkomt, is dan: Betekent rechtvaardig verdelen voor jonge kinderen inderdaad, dat ieder evenveel krijgt? Eerlijk verdelen kan voor een kind ook betekenen – getuige: *(. . . ) with an eye to their size* – rekening houden met verschillende behoeften. De 'eerlijkheid' manifesteert zich dan juist in ongelijke porties.
15. Omwille van de zuiverheid van betoog nemen we de protokollen over uit de oorspronkelijke Franse versie: Piaget J.; Inhelder B.; Szeminska A.; *La géométrie spontanée de l'enfant*. Paris (1948). De betrouwbaarheid van de Engelse versie van deze protokollen kan niet optimaal zijn, omdat een goede vertaling ervan uiterst lastig is. De Franse taal kent bijvoorbeeld geen woord op kinderlijk niveau voor evenveel. Gebruik van 'autant que' of la même chose', waarop de proefleider dan aangewezen is, werkt voor de kinderen verwarrend. Kinderen van 4 à 5 jaar kennen nog geen vergelijkende trappen. Uitdrukkingen als 'plus long' en 'moins long' begrijpen zij (nog) niet. N.B. Buiten de protokollen om wordt steeds naar de tekst van de Engelse versie van Piaget's boek verwezen.
16. Ook Desjardins en Hétu vinden deze 'nivo's',
17. Met een dergelijke benadering dient wel de nodige voorzichtigheid betracht te worden, omdat tegenvoorbeelden het ingang zijnde begripsvormingsproces kunnen verstoren wanneer ze in een te vroeg stadium gegeven worden. Ook Bruner waarschuwt hiervoor: Zie: *Toward a theory of instruction* (hoofdstuk 3). Camebridge (1967).
18. Zie voetnoot 7.
19. Het longitudinale onderzoek, waarvan we melding maakten vindt plaats in een school, waarvan de schoolbevolking zeker niet representatief genoemd mag worden voor de gemiddelde Nederlandse basisschool. Het aantal kinderen uit minder kansrijke milieus is er in de meerderheid. Aan de ervaringen daar ontlenen we dit voorbeeld.
20. Desjardins en Hétu gaan uitvoerig op deze kwestie in. Zie ook: Piaget J.: *Understanding causality*. New York 1971. (Vooral hoofdstuk 12: 'Linearity, proportionality and distributivity).
21. Zie bijvoorbeeld leerplandeel 10/11 *Vermenigvuldigen en delen met natuurlijke getallen*. Wiskobas Bulletin, jaargang 8, no. 5 en 6 en jaargang 9, no. 1. (Is gepland voor de tweede helft van 1979).
Deze aankondiging dient gemaakt te worden onder het voorbehoud, dat de departementale voornemens om het IOWO te elimineren uit de verzorgingsstruktuur van het onderwijs, dan nog niet geëffectueerd zijn.

*Literatuur*


Davydov V. V., Tsvetkovič Z., *Psychologische mogelijkheden van jonge schoolkinderen in het wiskundeonderwijs,* Moskou, 1969.

Desjardins, M., Hétu J. C., *L'activite mathématique dans l'enseignement des fractions,* Les presses de l'université du Quebec, Canada; 1974

Dienes, Z. P. *Fractions. An operational Approach,* Paris, 1967.

Erlwanger, S. H., Benny's Conception of Rules and Answers in IPI Mathematics, *The journal of children's Mathematical Behavior,* vol. 1, no. 3, 1973.

Erlwanger, S. H., Case studies of Children's Conceptions of Mathematics – Part 1, *The journal of children's mathematical behavior,* vol. 1, no. 3.

Freudenthal, H., *Didaktische fenomenologie van wiskundige grondbegrippen.* Intern, IOWO, 1976/1977/1978/1979.

Freudenthal, H., *Mathematics as an educational task,* Dordrecht, 1973.

Freudenthal, H., Lernzielfindung im Mathematikunterricht, *Zeitschrift für Pädagogik,* Jahrgang 20, Heft 5, Okt. 1974, 719–739.

Freudenthal, H., *Weeding and sowing – Preface to a science of mathematical education,* Dordrecht, Holland, Boston USA, 1978.

Griesel, H., *Algebra und Analysis der Grossensysteme, Mathematisch-psysikalische Semesterberichte,* Band XVI, 1969.

Griesel, H., Eine Analyse und Neubegründung der Bruchrechnung, *Mathematisch-physikalische Semesterberichte,* Band XV, 1968.

Griesel, H., Eine verbandstheoretische Analyse der Bruchrechnung, *Mathematisch-physikalische Semesterberichte,* Band VI, 1959.

Kieren, T. E., On the Mathematical, Cognitive, and Instructional Foundations of Rational Numbers. uit: *Number and measurement,* Eric Smeac, 1976.

Kirsch, A., An analysis of commercial arithmetic, *Educational Studies in Mathematics,* 1, 1969.

Luriya, A. R., *On the pathology of computational operations,* 1964.

Payne, J. N., Review of Research on Fractions, *Number and Measurement,* 1976.

Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A., *The child's conception of geometry,* Londen, 1966.

Pickert, G., Die Bruchrechnung als operieren mit Abbildungen, *Mathematisch-physikalische Semesterberichte,* Band XV, 1968.

Seyfferth, S., Bruchrechnung und natürliche Sprache. *Der Mathematikunterricht,* Jahrgang 21, Heft 1, März 1975.

Steiner, H. G., Magnitudes and rational numbers, *Educational Studies in Mathematics,* 2, 1969.

Streefland, L., *Breuk in ontwikkeling, een oriëntatie in psychologie,* IOWO, 1976.

Streefland, L., Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction, *Educational Studies in Mathematics,* 9, 1978, 51–73.

Suydam, M. N., *Review of Recent Research related to the Concept of Fractions and of Ratio,* Ohio State University, USA.

Treffers, A., *Wiskobas Doelgericht,* IOWO Utrecht, 1978.

*Curriculum vitae*

*L. Streefland* (geboren 1939) was na zijn opleiding tot onderwijzer werkzaam in diverse takken van onderwijs als onderwijzer, schoolleider en leraar wiskunde. Na voltooiing van zijn wiskundestudie (MO B.) trad hij in 1971 in dienst van het IOWO (Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs) aan de Rijksuniversiteit te Utrecht. Momenteel is hij bezig met de doctoraalstudie pedagogiek (specialisatie onderwijskunde). Sinds enige jaren houdt hij zich bezig met kwalitatief onderzoek op het terrein van de begripsontwikkeling bij kinderen met betrekking tot breuken en verhoudingen, en mathematische begrippen in het algemeen.

*Adres:* IOWO, Tiberdreef 4, Utrecht-Overvecht.