Analyse van het optellen en aftrekken op de basisschool*

DOLLY VAN EERDE EN LEONARD VERHOEF
Kwantiwijzer, SVO-projekt 0327, Psychologisch Lab., R.U. te Utrecht

Samenvatting

Dit artikel is het resultaat van onderzoek op het gebied van het leren rekenen binnen het door de stichting voor onderzoek van het onderwijs gesubsidiëerde projekt kwantiwijzer *(SVO-projekt 0327). In de inleiding wordt kort ingegaan op de doelen van dit projekt en de opvattingen omtrent diagnostiek.*

Vervolgens wordt een overzicht gegeven van de bestaande kwalitatieve en kwantitatieve onderzoeken en testen op het gebied van het optellen en aftrekken op de basisschool.

Hierop volgt een beschrijving van de drie onderzoeken waar de analyse van het optellen en aftrekken, zoals dat geobserveerd werd, op gebaseerd is. In deze analyse worden de handelingen beschreven aan de hand van de verkortingen die plaatsvinden door herstrukturering van opgaven op grond van de eigenschappen van het getallensysteem. Daarbij komen aan de orde: kommutativiteit, tientalligheid en inwisselen, en het positiestelsel.

Tenslotte wordt in de diskussie aangegeven wat mogelijke oorzaken zijn van stagnaties bij het rekenen, voorzover deze in het onderwijs zijn gelegen.

1. *Kwantiwijzer*

Het projekt kwantiwijzer beoogt de konstruktie van een diagnostisch instrumentarium waarmee men aan kan *wijzen* waar het onderwijsleerproces aan moet sluiten bij het opereren met hoeveelheden *(kwantiteiten)* en welke van belang geachte handelingen het kind kan uitvoeren. Het instrumentarium is bedoeld voor de kleuterschool en de onderbouw van de basisschool. Het zal gebruikt kunnen worden voor individuele hulp aan leerlingen en voor de evaluatie van gegeven onderwijs en van bestaande en experimentele leergangen. Een eerste experimentele versie van dit kwantiwijzerinstrumentarium zal eind 1978 beschikbaar komen en waarschijnlijk uit de volgende onderdelen bestaan: klassifikatie, seriatie, konservatie, meten, ruimtelijke oriëntatie, getallen, rekenhandelingen en een vragenlijst voor de leerkracht.

De term diagnostisch vatten wij op volgens de omschrijving die Rispens hiervan geeft: 'in een diagnostische toets probeert men te achterhalen waarom een bepaald gedeelte van de instruktie gemist wordt: op welke vaardigheden wordt daarin een beroep gedaan, welke kennis en kunde wordt verondersteld aanwezig te zijn' (Rispens, 1973, 7). Verder zegt Rispens dat er in een diagnostische toets ook opgaven aan de orde komen die in bestaande methoden niet voorkomen omdat ze bekend verondersteld worden of omdat men meent dat ze maar van zeer beperkte betekenis zijn. Een ander belangrijk aspekt dat Rispens onderscheidt bij diagnostisch onderzoek is de uitslag in termen van voor de leerkracht relevante instruktie. In de kwantiwijzer zal dit voorlopig gerealiseerd worden door verwijzing naar bestaande methoden en materialen. In een later stadium zal ook aandacht besteed worden aan het ontwikkelen van ontbrekende methoden en materialen. Deze werkzaamheden dienen ons inziens gebaseerd te zijn op een geëxpliciteerde theorie van het leren rekenen. Daarom wordt er momenteel door ons gewerkt aan de ontwikkeling van een dergelijke theorie; daarin zullen wij trachten zowel wiskundige (welke inhouden) als leertheoretische (hoe verloopt het leerproces) komponenten te expliciteren en te integreren.

2. *Bestaande onderzoeken en testen*

2.1. *Indeling*

Wij zouden de bestaande onderzoeken en testen

*) Met dank aan de leden van de stuurgroep, de studentassistenten, de sekretaresse van het projekt en de scholen voor hun waardevolle opmerkingen en medewerking.

m.b.t. het rekenen in twee groepen willen verdelen.

Ten eerste onderscheiden wij de *niet-kwalitatief psychologische onderzoeken en testen.* Hierbij zijn de rekensommen ingedeeld op grond van formele kenmerken van de som, zoals bijvoorbeeld optellen of aftrekken, gewone som, puntsom of redaktiesom, grootte van de getallen. Deze kenmerken zijn niet ontleend aan een vakinhoudelijke analyse van de leerstof. Een vakinhoudelijke analyse zou naar ons idee namelijk resulteren in een overzicht van de eigenschappen en de struktuur van het getallenstelsel. Behalve op grond van formele kenmerken worden de opgaven ook wel ingedeeld op grond van de empirische moeilijkheidsgraad, of de reaktietijd. Het is ook mogelijk om op grond van ervaring de verwachte moeilijkheidsgraad te schatten. Deze gegevens zijn slechts bruikbaar om het algemene rekennivo te bepalen.

Ten tweede onderscheiden wij de *kwalitatief psychologische onderzoeken en testen.* Hierbij gaat het om een psychologische analyse van het oplossingsproces. Zo'n analyse beschrijft de deelhandelingen die bij het oplossen van rekenopgaven verricht worden.

2.2. *Niet-kwalitatief psychologische onderzoeken en testen*

2.2.1. *SDAT*

Schonell en Schonell hebben een aantal testen ontworpen (Schonell Diagnostic Arithmetic Tests) die ze zelf diagnostisch noemen. Een belangrijk doel van de SDAT is het duidelijk aangeven van welke aard de moeilijkheden bij een kind zijn, welke lacunes er bestaan en wat de oorzaken zijn van de achterstand in een bepaald gebied (Schonell en Schonell 1958, 113). Daartoe wordt het aantal goede antwoorden en de benodigde hoeveelheid tijd om de sommen op te lossen vergeleken met het gemiddelde voor de leeftijdsgroep waar het geteste kind toe behoort. De feitelijke foutenanalyse moet, begrepen wij, door de proefleider zèlf gedaan worden. In de test worden slechts enkele voorbeelden van fouten gegeven. Deze hebben echter voornamelijk betrekking op vergissingen.

Het werk van Schonell en Schonell is erg uitgebreid, het omvat het cijferen van de basisschool. Weliswaar wordt aandacht besteed aan aanvullende opgaven en oorzaken van stagnaties, maar een geëxpliciteerde theorie van het leren rekenen ontbreekt volledig en de meeste uitspraken worden op geen enkele wijze gefundeerd.

2.2.2. *Schiedamse Rekentoets*

Bij het onderzoek van rekenprestatie op de basisschool wordt in Nederland over het algemeen gebruik gemaakt van de in 1967 gekonstrueerde Schiedamse Rekentoets (SRT). De test is bedoeld om de mate van beheersing van de traditionele rekenstof in het basisonderwijs te meten en om bij kinderen met leermoeilijkheden een duidelijk uitspraak te kunnen doen over de ernst van de achterstand (Heesen e.a. 1967, 1968). In de handleiding staat expliciet vermeld dat de test niet is bedoeld als een specifiek instrument ter opsporing van oorzaak en achtergronden van gevonden lacunes (Heesen e.a. 1971, 9). Alhoewel de SRT overeenkomsten vertoont met de SDAT zijn de auteurs veel bescheidener over de mogelijkheden van hun test. De samenstellers hebben gestreefd naar een zo volledig mogelijke inventarisatie van de rekenstof van het basisonderwijs en sluiten expliciet aan op traditionele leerstof (Heesen e.a. 1967, 490 en 1971, 9) om op deze wijze zo goed mogelijk aan te sluiten bij de meest gangbare leerplannen en methoden.

De opgaven die bedoeld zijn voor het begin van de basisschool zijn gekozen op grond van formele kenmerken van de som en zijn geordend naar moeilijkheidsgraad. Omdat de SRT vooral bedoeld is om de ernst van de eventuele achterstand aan te geven, volstaat men bij de interpretatie van de skores met een kwantitatieve vergelijking van de prestaties van het onderzochte kind met die van zijn jaargenoten. Het uitgangspunt van de normen voor de SRT is een analyse van bestaande rekenmethoden (van voor 1967) en het oordeel van onderwijsautoriteiten (voornamelijk enkele inspekteurs) Heesen e.a. 1971, 12).

2.2.3. *Analytische rekenproeven*

Voor de leerlingen van de Polyvalente Beroepsschool werd door Swinnen en Vandenberghe (1970, 1973) een serie analytische rekenproeven ontworpen. Deze proeven zijn bedoeld om lacunes te lokaliseren en te beschrijven. De proeven geven aan welke taken het kind wel, en welke taken het kind nog niet kan oplossen. Gemeten wordt inzicht in de natuurlijke getallen en het tientallig stelsel (positiewaarde, struktuur van elk natuurlijk getal en rij der natuurlijke getallen). Swinnen en Vandenberghe noemen hun proeven analytisch omdat de term diagnostisch zou suggereren dat men op basis van deze proeven een bevredigende diagnose zou kunnen opstellen. Daarvoor is volgens Swinnen en Vandenberghe echter vaak ook een individueel diagnostisch onderzoek nodig waarbij men probeert de denk- en werkwijze van een leerling vast te stellen; daarbij kunnen de analytische rekenproeven uitgangspunt vormen.

De analytische rekenproeven verschillen op enkele punten met ons werk. Allereerst wordt het individueel diagnostisch onderzoek bij Swinnen en Vandenberghe nauwelijks uitgewerkt terwijl daar bij ons juist het accent op ligt. Ten tweede gaan Swinnen en Vandenberghe bij het opstellen van de opgaven uit van het traditionele rekenen. Wij zijn, zoals wij hiervoor al aangaven, van mening dat er pas sprake is van diagnostisch onderzoek wanneer ook opgaven aan de orde komen die niet in de bestaande leergangen behandeld worden maar wel van belang zijn.

2.2.4. *Pump-projekt*

In het begin van de jaren zeventig is Lundgren in Zweden begonnen met een analyse van het rekenen. Uitgangspunt daarbij is het werk van Dahllöf en Lundgren die een onderwijstheorie (theory on teaching) ontwikkelden waarin de relatie tussen randvoorwaarden, onderwijsproces en leerresultaat aangegeven wordt (Van Dam 1976, 7).

De analyse van het rekenen resulteerde in een diagnostische rekentest waarmee het rekenproces beschreven kan worden, de leerkracht geholpen kan worden en waarmee een theoretisch onderwijsmodel getoetst kan worden (Kilborn en Lundgren 1975, Johansson in Kilborn 1975). Daarbij wordt uitgegaan van een hiërarchie met als dimensies de formele kenmerken van de som (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) en de grootte van de getallen[1]. Op basis van de skores kan bepaald worden welke kennis gemist wordt, wat de konsekwenties voor het onderwijs zijn en welke leerlingen extra onderwijs nodig hebben. Dit alles wordt echter slechts beschreven in termen van formele kenmerken van de opgave.

2.2.5. *Verder onderzoek*

Verder kunnen wij onderzoeken noemen waarbij kwantitatieve psychologische analyses gemaakt zijn. Suppes (1969) heeft bijvoorbeeld door middel van variantie-analytisch onderzoek faktoren vastgesteld die bepalend zijn voor de moeilijkheidsgraad van een som. Hij vond dat puntsommen moeilijker zijn dan gewone sommen, dat de puntsom iets gemakkelijker is wanneer de punt op de plaats van de tweede term staat dan wanneer de punt op de plaats van de eerste term staat en dat de rekensnelheid afhankelijk is van de grootte van de onbekende term.

Dumont, Hamers en Ruijssenaars (1977) gaven onlangs een verslag van een faktor-analytisch onderzoek naar de samenhang van technisch en begrijpend rekenen met enkele intelligentietaken. Zij vinden een samenhang tussen rekenprestaties (met name SRT) en intelligentietaken. Dit soort onderzoek is ons inziens weinig vruchtbaar en wel om de volgende redenen. Wanneer men inzicht in oorzaken van rekenstoornissen wil verkrijgen, geven korrelationele verbanden alléén te weinig informatie. Hiermee vindt men immers geen causale verbanden, die bij stoornissen juist essentieel zijn. Daarvoor zijn ook kwalitatieve onderzoeksmethoden noodzakelijk. Bovendien leveren korrelationele verbanden geen enkele praktische bijdrage aan het verhelpen (remediëren) van rekenstoornissen. Tenslotte merken wij op dat het intelligentiebegrip erg omstreden is.

Andere onderzoekers proberen inzicht te krijgen in het oplossen van sommen door al dan niet met behulp van elektronische apparatuur reaktietijden te meten. Dit soort onderzoek is bedoeld om door de onderzoeker veronderstelde kognitieve processen aan te tonen op grond van tijdmetingen (bijvoorbeeld Groen en Parkman 1972, Svenson 1975).

2.2.6. *Beperkingen van niet-kwalitatief psychologisch onderzoek*

Bovengenoemde onderzoeken en testen geven een analyse van de rekenopgaven of de uitkomsten. De indelingskriteria zijn meestal ontleend aan kenmerken van de opgave. De skores geven aan hoe ver het kind met het rekenen gevorderd is, welke soort opgaven het kind kan oplossen. De meeste auteurs merken zelf al op dat een diagnose die aangeeft wat de oorzaak van de stagnaties is en waar het onderwijsleerproces moet aansluiten niet mogelijk is. Deze testen zijn dan ook niet diagnostisch in de betekenis die wij er in navolging van Rispens en van Swinnen en Vandenberghe aan geven. Om een dergelijke diagnose toch te kunnen stellen, is het naar ons idee nodig te beschikken over psychologisch onderzoek op basis van een geëxpliciteerde theorie van het leren rekenen. Men kan dan namelijk aangeven waar het leerproces gefaald heeft, welke voor het leerproces relevante handelingen niet beheerst worden èn hoe het onderwijs moet aansluiten.

2.3. *Kwalitatief psychologisch onderzoek*

Bij kwalitatief psychologisch onderzoek naar de rekenhandelingen van het kind gaat het niet zozeer om de formele kenmerken van de opgave of de statistische gegevens van de oplossingen (moeilijkheidsgraad, reaktietijd), maar om de wiskundige kenmerken van de opgave. Daarom dient men bij een dergelijke analyse uit te gaan van de eigenschappen van het getallensysteem.

2.3.1. *Stahl*

Een van de onderzoeken van Stahl (1975, 297) had betrekking op het optellen en aftrekken tot 100. Het bestaande leerplan in de DDR voor klas 2 onderscheidt achtereenvolgens vier stappen waarbij rekening gehouden werd met de grootte van de tweede term en het overbruggen. Stahl merkt daarover op dat de abstraktie van de essentiële kenmerken die alle opgaven binnen het gebied gemeen hebben pas mogelijk wordt na behandeling van de laatste stap. Voor een optimale organisatie van het leerproces is het volgens hem echter nodig de leerlingen juist van te voren met alle delen van de oriënteringsbasis[2] vertrouwd te maken. Deze moet volgens Stahl in elk geval omvatten:

- kennis over de eigenschappen van rekenoperaties (kommutativiteit, associativiteit).
- kennis over de samenhang tussen operaties (aftrekken als omkering van optellen).
- kennis over de volgorde van de natuurlijke getallen en over het tientallig positiestelsel.

De effektiviteit van deze uitgangspunten werd in zijn onderzoeken bewezen.

We zien dat Stahl, zij het op beperkte schaal, een leerpsychologische terminologie hanteert. Vanuit het leerpsychologische concept 'oriënteringsbasis' komt hij tot een andere analyse van het rekenen dan de wijze waarop dit rekenen in het leerplan van de DDR geanalyseerd wordt.

2.3.2. *Kwantiwijzeronderzoek*

In dit artikel zullen wij proberen een kwalitatief psychologische analyse te geven van de rekenhandelingen die wij bij de kinderen geobserveerd hebben. Hierbij hebben wij de theorie van Gal'perin als leerpsychologisch beschrijvingskader gekozen. Voor het vakinhoudelijke aspekt van het optellen en aftrekken maken wij gebruik van de eigenschappen van het getallensysteem.

3. *Onderzoeksopzet*

3.1. *Ontwikkelingsonderzoek*

De gegevens voor deze analyse zijn ontleend aan drie onderzoeken die in het kader van dit projekt verricht zijn in de periode van januari 1976 tot en met juni 1977.

Eert vond er een ontwikkelingsonderzoek plaats waaraan door 36 kinderen van 6 kleuter- en 6 basisscholen werd deelgenomen. De verdeling van de kinderen was als volgt:

6 jongste kleuters (4-jarige 'bijdehandjes')
12 oudste kleuters (5- en 6-jarige 'gemiddelde' leerlingen)
12 eersteklassers ('gemiddelde' leerlingen)
6 tweedeklassers (slechte rekenaars)

Aan deze kinderen werd individueel drie maal met een tussenpoos van telkens zes weken éénzelfde verzameling items afgenomen. Deze items zijn afkomstig uit een door ons samengestelde itembank, die opgaven bevat op het gebied van klassifikatie, seriatie, konservatie, meten, getallen en ruimtelijke oriëntatie. Het doel van dit onderzoek was vooral na te gaan hoe de prestaties op enkele van belang geachte operaties zich ontwikkelden in de loop van het onderzoek. Het accent lag vooral op ontwikkelingspsychologische voorwaarden voor het leren rekenen. Dit onderzoek liep van januari tot en met mei 1976.

3.2. *Korrelationeel onderzoek*

Ten tweede is er in november 1976 een korrelationeel onderzoek verricht waaraan 42 tweedeklassers van acht scholen deelnamen. Op deze scholen werden vier verschillende rekenmethoden gebruikt: elke methode werd door twee scholen gebruikt.

Elke klasseleerkracht werd gevraagd zes kinderen te selekteren: twee leerlingen die over de hele linie zwak zijn, twee leerlingen die alleen met rekenen zwak zijn, terwijl de andere vakken voldoende of goed waren, en twee leerlingen die over de hele linie goed zijn.

Niet elke klas bevatte 2 van de boven beschreven leerlingen, daardoor is de N van elke groep niet 16 (maar 14 leerlingen die over de hele linie zwak zijn, 12 leerlingen die alleen met rekenen zwak zijn en 16 leerlingen die over de hele linie goed zijn).

Aan deze groepen werden in een gestandaardiseerde situatie de hierboven (3.1) genoemde onderdelen van de itembank voorgelegd met daarbij nog het onderdeel regelvinden en een aantal sommen.

Dit onderzoek werd gedaan omdat gebleken was dat ontwikkelings-psychologische voorwaarden alléén een te enge basis waren voor een diagnostisch instrumentarium. Daarom werd in dit onderzoek ook op andere gebieden (onder andere rekenen en algemene gedragskenmerken) gezocht naar verschillen tussen goede en slechte rekenaars.

3.3. *Klinisch onderzoek*

Ten derde is er in mei en juni 1977 een klinisch onderzoek gedaan om de knelpunten bij slechte rekenaars die in het korrelationeel onderzoek naar voren gekomen waren, nader te onderzoeken. Het onderzoek was gericht op het vinden van de oorzaken van stagnaties én op de konstruktie van opgaven waarmee de oorzaak hiervan efficiënt vastgesteld zou kunnen worden. Het klinisch onderzoek vond plaats bij 32 kinderen met rekenproblemen uit de onderbouw van de basisschool.

Van de acht scholen waar onderzoek gedaan is, zijn er per school door de klasseleerkracht maximaal 4 kinderen aangewezen die problemen hadden met rekenen. Op de acht scholen werden in totaal 5 verschillende methoden gebruikt. Uit de eerste klas werden 11, uit de tweede klas 16 en uit de derde klas 5 kinderen onderzocht. De gemiddelde leeftijd was 8;4 jaar.

Tijdens het onderzoek was de proefleider vrij een keuze te maken uit alle items van de itembank. Ook nieuwe ter plekke bedachte vragen en opgaven mochten aan de orde komen. Indien één zitting niet voldoende was om tot konklusies te komen, dan kon een tweede onderzoek gedaan worden.

Na het onderzoek moest de onderzoeker zijn veronderstellingen over de oorzaken van de problemen en de wijze waarop het kind geholpen zou kunnen worden, expliciteren in een onderzoeksverslag. Hij kon daarbij gebruik maken van het schriftelijke schoolwerk van het kind, en het op de band opgenomen verslag van de gang van zaken tijdens het onderzoek. Alle verslagen werden besproken met de leerkracht. Acht verslagen werden vergeleken met de onderzoeksverslagen van dezelfde kinderen die gemaakt waren door medewerkers van een SBD. Tenslotte werden handelwijze van de proefleider en de konklusies die hij getrokken had, geëvalueerd in de stuurgroep van het projekt.

De handelingen die wij hierna beschrijven, zijn onderscheiden op grond van een uitvoerige analyse van de drie onderzoeken.

Bij de analyse werd gezocht naar relevante handelingen; deze werden gedefinieerd en vervolgens werd nagegaan hoe vaak deze handelingen voorkwamen. Doordat de handelingen vaak pas in de loop van de onderzoeken aan de onderzoekers duidelijk werden en geformuleerd konden worden, was het niet altijd mogelijk alle reakties eenduidig te skoren. Daarom kwamen er veel missing skores voor en spreken we in dit verslag vaak slechts van 'een aantal' of 'enkele kinderen'.

4. *Verkorting van de oplossingsprocedure door herstrukturering van de opgave*

4.1. *Algemeen*

Voor beschrijving van de handelingen die wij bij de kinderen observeerden, hebben wij gebruik gemaakt van de theorie van Gal'perin. Aan een handeling zijn volgens Gal'perin de volgende parameters te onderscheiden (Gal'perin 1969, 250; Van Parreren en Carpay 1972, 37 en Van Parreren 1973):

1. nivo van handeling. Een handeling kan op verschillende nivo's uitgevoerd worden. In Van Parreren en Carpay (1972, 38) worden het materiële, het verbale en het mentale nivo genoemd. Bovendien kan het perceptieve nivo onderscheiden worden.
2. mate van verkorting. Een handeling zal in het begin van het leerproces erg uitvoerig zijn maar zich later gaan verkorten.
3. mate van generalisatie. De mate van generalisatie geeft aan in hoeverre een handeling op verschillende situaties kan worden toegepast (wendbaarheid).
4. mate van beheersing.

Voor de beschrijving van de door ons geobserveerde handelingen hebben wij de verkorting als uitgangspunt gekozen omdat deze parameter het meest duidelijk naar voren kwam.

Het verkortingsproces speelt volgens de sovjetpsychologie een belangrijke rol in het leerproces (Van Parreren 1977, 4). Gal'perin spreekt van een verkorte handeling wanneer niet meer alle deelhandelingen volledig worden uitgevoerd, maar verkort zijn, zodat bepaalde schakels worden overgeslagen of slechts vluchtig aangeduid (Van Parreren en Carpay 1972, 38). Dit is slechts één vorm van verkorten van het oplossingsproces, namelijk het versnellen van een bepaalde serie handelingen. Van Parreren (1977, 4) onderscheidt minstens drie verschillende vormen van verkortingen. Deze zijn: verkorting bij perceptuele klassifikatie (onmiddellijk zien dat twee objekten in een bepaald opzicht gelijk zijn, na een fase waarin de objekten uitgebreid met elkaar vergeleken werden), vermindering van het aantal kontrolepunten dat vooral plaatsvindt bij motorische vaardigheden (bijvoorbeeld autorijden), en ten derde verkorting door ontdekking van een kortere weg tot het doel, inzichtelijke verkorting (bijvoorbeeld het verkorten van het optellen van hoeveelheden zoals wij dat boven beschreven hebben). Het is vooral deze derde vorm die wij hier zullen beschrijven. In de meeste gevallen ontstaat deze verkorting doordat het probleem, de opgave of onderdelen daarvan op een bepaalde manier gestruktureerd of geherstruktureerd worden zodat de opgave eenvoudiger, verkort opgelost kan worden.

Bij het rekenen kunnen deze verkortingen bereikt worden door de opgave te herstruktureren op basis van de eigenschappen van het getallensysteem. Kennis van deze eigenschappen maakt deel uit van de oriënteringsbasis[2] voor het toepassen van deze verkortingen.

Bij het leren optellen en aftrekken wordt aanvankelijk geteld bij het oplossen van sommen. Deze teloperaties worden weliswaar verkort maar deze verkortingen zijn slechts beperkt en leiden niet tot de gewenste oplossingsmethoden. Dit geldt wel voor verkortingen door herstrukturering van de opgave op basis van eigenschappen van ons getallensysteem. Voor het oplossen van optel- en aftreksommen gaat het dan om de volgende eigenschappen: kommutativiteit, tientalligheid (met name het inwisselsysteem) en het positiestelsel.

Deze eigenschappen vormen dan ook het uitgangspunt voor de beschrijving van de verschillende geobserveerde handelingen. Na een korte omschrijving van elke eigenschap zullen de verschillende handelingen die de kinderen uitvoerden bij het hanteren van deze eigenschappen beschreven worden. Tenslotte zullen volledig verkorte handelingen beschreven worden.

4.2. *Verkortingen van telmethoden*

4.2.1. *Fasen in het tellen als oplossingsmethode*

Wanneer het kind de volgorderelaties en het aantalaspekt van de getallen (resp. ordinaliteit en kardinaliteit) heeft leren kennen, kan het kind opgaven leren oplossen door middel van tellen[3]. De telmethoden zijn aanvakelijk nog zeer uitgebreid en materieel van aard, maar worden allengs korter. De handelingen die wij bij de kinderen observeerden, wanneer zij telden bij het uitrekenen van sommen, kunnen wij in de volgende fasen indelen.

aftellen:

Optellen van groepen van voorwerpen door de eenheden van beide termen één voor één af te tellen. De opgave 4 + 2 wordt, nadat groepjes van voorwerpen zijn gemaakt, als volgt uitgevoerd: '1, 2, 3,4 – 5,6 is 6' (het – teken geeft de overgang naar de tweede term aan).

bijtellen met voorwerpen:

Optellen van groepen voorwerpen, waarbij alleen de tweede term wordt bijgeteld. Wij spreken hier van 'bijtellen' in navolging van Davydov. De opgave 4 + 2 wordt, nadat groepjes van voorwerpen zijn gemaakt, als volgt uitgevoerd: '4 + 2 = 4, – 5, 6 is 6'.

Het aftellen en het bijtellen met materiaal werden tijdens het klinische onderzoek alleen bij eersteklassers geobserveerd. Van de negen eersteklassers waren er nog zes die deze oplossingsprocedures hanteerden.

bijtellen zonder voorwerpen:

Optellen waarbij de eerste term als één geheel en abstrakt opgevat wordt en de tweede term bijgeteld wordt. Hierbij wordt het oplossingsproces dus niet meer zoals in de vorige fasen begonnen met het materialiseren van beide termen. Het bijtellen van de tweede term wordt slechts ondersteund doordat op een of andere konkrete wijze het aantal getelde eenheden wordt bijgehouden. Bij de opgave 4 + 2 zegt het kind '4', steekt dan 2 vingers op en telt door '5, 6 is 6'.

Overigens is bij deze fase niet precies vast te stellen in welke mate kinderen materiële steun zoeken bij het bijtellen van de tweede term. Wij gaan hier in de volgende paragraaf verder op in.

Bij het aftrekken zien wij een analoge fasering als bij het optellen. Het aftellen zien wij wanneer de eerste term gematerialiseerd wordt met voorwerpen, de hoeveelheid van de tweede term geteld en eraf gehaald wordt en de resterende hoeveelheid 'afgeteld' wordt. Een verkorting ontstaat wanneer er tegelijkertijd met het afhalen van de blokjes teruggeteld wordt. Dit *terugtellen* (bij optellen 'bijtellen') wordt weer verder verkort wanneer het zonder voorwerpen wordt gedaan. Een variant hierop is het aftrekken door middel van *doortellen* (bijvoorbeeld: 15 – 12 = ... 13, 14, 15 = 3).

Het terugtellen leverde veel problemen op: zeven van de 11 eersteklassers en vier van de 16 tweedeklassers (allen uit het klinisch onderzoek) konden niet terugtellen vanaf 15.

Een aantal kinderen uit onze onderzoeken dat de bijtelmethode hanteerde, bleek dit zonder inzicht te doen. Deze kinderen maakten nl. zogenaamde 'startfouten'. Hierbij maakt het kind geen sprong vooruit, maar start met het noemen van het getal dat de hoeveelheid van de eerst term aangeeft: '18 + 5 is 5 erbij doen, bij 18 beginnen, 18, 19, 20, 21, 22 is 22'.

Dit soort fouten kan men soms ook alleen op grond van een uitkomst (schriftelijke gegevens) vaststellen. De uitkomst is dan één lager dan de juiste uitkomst. Het aantal startfouten dat de tweedeklassers in het klinische onderzoek maakten, is opmerkelijk: van de 13 kinderen die tellen als oplossingsmethode hanteerden, maakten er vier startfouten. Uit het maken van een startfout blijkt dat het kind geen juist inzicht in de optelling (aftrekking) heeft, het kind hanteert het tellen zuiver als verbaal telproces, maar weet niet precies op welke materiële handeling dit gebaseerd is.

Koster (1975, 116) wijst er in dit verband op dat er bij het leren rekenen meer aandacht besteed zou moeten worden aan het reekskarakter van de getallenrij, waarbij het optellen in de vorm van volwaardig bijtellen zou kunnen aansluiten.

bijtellen met toepassing van de kommutatieve wet:
Wanneer de tweede term het grootst is, worden de termen omgedraaid en wordt de kleinste bij de grootste geteld. De kommutatieve wet houdt in dat de som van een optelling niet verandert wanneer de volgorde waarin de termen opgeteld worden, verandert ($a + b = b + a$). Vooral wanneer een som door middel van bijtellen opgelost wordt, kan van deze wet handig gebruik gemaakt worden. We observeerden dit in onze onderzoeken bij een klein aantal kinderen. Zo draaide een kind de termen om ($5 + 2$ in plaats van $2 + 5$) omdat hij van de juf geleerd had dat dit mocht. Een aantal kinderen bleek deze wet echter niet toe te passen, hetgeen bijvoorbeeld bleek uit hun lange reaktietijd bij een som als $2 + 7$. De 7 werd er dan kennelijk bijgeteld.

Wanneer de kommutatieve wet niet wordt toegepast, blijkt hier ons inziens uit dat het kind de opteloperatie niet volledig begrijpt.

4.2.2. *Optellen en aftrekken met steun*
Uit onze drie onderzoeken is gebleken dat de kinderen die volgens de leerkracht problemen hebben met het rekenen, vrijwel allemaal een materiële steun nodig hebben bij het oplossen van sommen door middel van aftellen. Het lijkt ons goed daar dieper op in te gaan. De meest gebruikte methode is natuurlijk het tellen op de vingers. Daarbij verschilt de mate van interiorisatie. Sommige kinderen steken hun vingers bij het tellen duidelijk op en raken ze soms ook aan met de vingers van de andere hand; dit is de meest uiterlijke vorm van tellen op de vingers. Er zijn echter ook kinderen die alleen maar naar hun vingers hoeven te kijken; dit zou men een perceptieve handeling kunnen noemen. De mate van interiorisatie zal mede afhankelijk zijn van de houding van de leerkracht ten aanzien van het optellen met behulp van de vingers. Tijdens de verschillende onderzoeken durfden veel kinderen niet te laten zien dat ze op hun vingers telden, vaak omdat ze het niet mochten van de leerkracht of omdat ze het kinderachtig vonden. Deze kinderen hielden hun handen onder tafel of achter hun rug (er schijnen zelfs kinderen te zijn die hun tenen bij het tellen gebruiken). Het is dan erg moeilijk vast te stellen of ze nu wel of niet hun vingers gebruiken bij het tellen.

Het te lang gebruiken van de vingers bij het uitrekenen van sommen wijst erop dat het kind niet in staat is de sommen op een andere manier uit te rekenen. Dit dient opgevat te worden als een waarschuwing in de richting van het onderwijs. Het op de vingers tellen dient dan ons inziens echter niet verboden te worden. Door het verbod wordt het op de vingers tellen alleen maar onzichtbaarder en ontstaan er onlustgevoelens.

Wij observeerden een aantal opvallende fouten bij het tellen op de vingers. Zo waren er kinderen die na het uitrekenen van de som de stand van hun vingers niet konden interpreteren; wanneer zij bijvoorbeeld twee vingers overhielden, wisten zij niet of de uitkomst 2 of 8 was. Ook konstateerden wij bij enkele kinderen dat zij een verkeerd aantal vingers opstaken. Zo stak een kind bij het uitrekenen van de opgave $4 - 3$ vijf vingers op, haalde er drie weg en gaf als antwoord 2.

Beter dan het verbieden van het tellen op de vingers lijkt het ons om kinderen die te lang op hun vingers blijven tellen, oplossingsmethoden en hulpmiddelen aan te bieden die voor het kind minstens even aantrekkelijk zijn en die het verkortingsproces stimuleren. Wij komen hier nog op terug. Overigens gebruiken volwassenen hun vingers ook wel bij het tellen. Bijvoorbeeld wanneer de elementen van de te tellen hoeveelheid niet direkt waarneembaar zijn maar één voor één uit ons geheugen opgezocht moeten worden (bijvoorbeeld wanneer men telt hoeveel medewerkers er bij een projekt werken). Omdat het zoekproces het denken te zwaar belast, heeft men voor het onthouden van het aantal gevonden elementen materiële steun nodig.

Er bleken ook kinderen te zijn die andere hulpmiddelen gebruikten dan hun vingers. Zo zette een jongen bij het maken van een optelsom eerst evenveel puntjes neer als de tweede term. Bij het doortellen werden deze één voor één aangeraakt zodat hij wist wanneer hij moest stoppen (proefleider: '$4 + 3 = ?$', kind schrijft op: $4 + 3 \overset{..}{=} 7$). Een ander kind tikte bij het doortellen met zijn pen op tafel. dit tikken ging niet willekeurig maar in bepaalde figuren: als hij bijvoorbeeld 8 moest bijtellen, tikte hij 2 groepjes van 4 tikken die een vierkant vormden. Ook observeerden we bij één eersteklasser en één tweedeklasser de volgende 'verbale' methode: proefleider: '17 + 4 = ?', kind: '17 + 4 is 18 één, 19 twee, 20 drie, 21 vier, er komt dus 21 uit'. Er was ook een kind dat vertelde dat ze tijdens het tellen de hoeveelheden in groepjes verdeelde. De opgave 84 − 6 werd dan opgelost door er telkens 3 af te halen: '6 is 3 + 3; 84 − 6 = 83, 82, 81 en dan nog een keer 80, 79, 78'. Ook zijn er kinderen die tijdens het bijtellen van grote getallen tientallen 'in hun hoofd' of 'op hun neus' bewaren.

De hierboven genoemde voorbeelden vormden uitzonderingen, de meeste kinderen zochten steun bij hun vingers.

In onze onderzoeken observeerden wij naast de hierboven omschreven fouten de volgende telfouten. Bij sommen met hoge getallen konden sommige kinderen helemaal nog niet tellen. Verder werden er regelmatig telfouten gemaakt bij het overbruggen van het tiental, met name bij het terugtellen. Bijvoorbeeld: '84 − 6 = 83, 82, 81, 70, 69, 68' of '65 + 5 = 66, 67, 68, 69, 90'. In een onderzoek van Ippolitova (1971) kwam deze kategorie van fouten ook heel duidelijk naar voren. Zij vond dat bij kinderen met een tijdelijke achterstand in de psychische ontwikkeling veel fouten veroorzaakt werden doordat kinderen niet over het tiental heen konden gaan.

4.2.3. *Tellen en leren optellen en aftrekken*

In Tabel 1 staat een overzicht van het aantal kinderen dat alléén telmethoden hanteerde bij het oplossen van de sommen. Hieruit blijkt zonder meer dat veel kinderen die rekenproblemen hebben, tellen altijd als oplossingsmethode gebruiken.

Om de overgang van telmethode naar verkorte oplossingsmethoden soepeler te laten verlopen, zal hieraan in het onderwijs en in de diagnostiek meer aandacht besteed moeten worden. Dit knelpunt wordt ons inziens te weinig gesignaleerd omdat, zoals wij hiervoor al opmerkten, bestaande toetsen en onderzoeken op het gebied van het rekenen bijna uitsluitend gericht zijn op de oplossingen (uitkomsten van de sommen) en niet op de oplossingsmethoden.

Het vasthouden aan telmethoden bij het oplossen van sommen wordt ons inziens door twee faktoren veroorzaakt.

Ten eerste wordt er te weinig goed gestruktureerd materiaal aangeboden. Daardoor wordt het verkortings (abstraktie-)proces belemmerd en ontstaan er ongewenste oplossingsmethoden.

Voorbeelden zijn de bovengenoemde ver doorgevoerde systemen die kinderen ontwikkeld hebben om ook moeilijke sommen op te kunnen lossen d.m.v. aftellen.

Bij het leren rekenen is de mate waarin het te tellen materiaal (vingers, blokjes, kralen al dan niet op een telraam) gestruktureerd is, van belang. Gestruktureerd materiaal heeft het voordeel dat er sneller mee gewerkt kan worden en wat veel belangrijker is, dat het telproces door middel van (her-)strukturering verkort kan worden. De struktuur van de vingers heeft bijvoorbeeld het voordeel dat je onmiddellijk weet dat een hand vijf vingers bevat. Het aantal vijf hoeft dus niet volledig afgeteld te worden (een van de nadelen van de vingers is echter dat er maar tien van zijn).

Ten tweede kregen wij duidelijk de indruk dat kinderen erg bang waren een fout antwoord te geven. Dit bleek o.a. uit het feit dat kinderen omslachtige telmethoden bleven toepassen, terwijl ze bij andere opgaven of na het geven van een klein beetje hulp wel in staat bleken te zijn verkorte oplossingsmethoden te hanteren.

schoolprestaties volgens leerkracht	klas	korr. ond.	klinisch ond.	aantal	n
onvoldoende in rekenen	1		X	11 = 100%	11
onvoldoende in rekenen	2		X	10 = 63%	16
onvold. in rek. + taal	2	X		8 = 62%	13
onvoldoende in rekenen	2	X		10 = 91%	11
goed in rek. + taal	2	X		2 = 15%	13
onvoeldoende in rekenen	3		X	2 = 40%	5
					69

Tab. 1 Aantal kinderen dat geen andere oplossingsmethode dan tellen toegepast

4.3. *Tientalligheid en inwisselen*

Het getallensysteem dat wij hanteren, kent een tientallig inwisselsysteem, dat wil zeggen bij elke tien kan worden ingewisseld. Tien énen worden ingewisseld voor één tien en tien tienen voor één honderd. Het tientallige inwisselsysteem, en vooral het inwisselen volgens éénzelfde systematiek, maakt het toepassen van eenvoudige oplossingprocedures voor moeilijke opgaven mogelijk. Het ontbreken van eenzelfde systematiek bij het inwisselen ziet men bij diverse andere systemen. Men denke bijvoorbeeld aan de manier waarop de tijd wordt ingedeeld (een jaar = 12 maanden, een maand = ± 30 etmalen, een etmaal = 24 uur enz), of aan het oude Engelse muntstelsel (1 pond = 20 shilling, 1 shilling = 12 pennies). Binnen het notatiesysteem van de tijd en het oude Engelse muntstelsel funktioneert bovendien het tientallig getalstelsel.

In ons rekenonderwijs vindt men deze eigenschappen terug in het 'splitsen van een getal in tientallen en eenheden'. Uit onze observaties bij diverse typen opgaven bleek echter dat de meeste kinderen die volgens de leerkracht problemen hebben met het rekenen, het splitsen in tientallen en eenheden niet toepassen. Van de door ons onderzochte kinderen niet toepassen. Van de door ons onderzochte kinderen uit het korrelationeel onderzoek die volgens de leerkracht goed kunnen rekenen, past het overgrote deel het splitsen wel toe (zie Tabel 2).

Een aantal kinderen splitste in onze onderzoeken wel, maar deed dit niet inzichtelijk. Dit bleek uit fouten tegen het positiestelsel (zie volgende paragraaf). Een voorbeeld van het niet inzichtelijk omgaan met tientallen en eenheden zou men bij de volgende oplossing kunnen veronderstellen. De som 14 + 15 werd in blokken neergelegd: twee staven van tien in elkaar geschoven blokjes, een staaf van vier en een staaf van vijf blokjes. Eerst worden de staven van tien afgeteld (tien, twintig, ...). De resterende negen blokjes worden er dan bij opgeteld als waren het tientallen (..., dertig, veertig, enz.).

4.4. *Positiestelsel*

Een van de eigenschappen van ons notatiesysteem voor getallen is het positiestelsel. Hierbij gaat het erom dat de positie van een cijfer de waarde van een getal mede bepaalt. Het cijfer zes betekent in het getal 16 zes eenheden en in het getal 61 zes tientallen. Alhoewel onze afspraken met betrekking tot de positiewaarde erg vanzelfsprekend lijken, zijn deze niet in alle notatiesystemen zo eenvoudig als in het onze (zie bijvoorbeeld IOWO 1977, 89). Al sinds de oudheid bevatte het Romeinse notatiesysteem naast de afspraak over de volgorde van de eenheden, tientallen enz. (zoals bij ons) ook afspraken met betrekking tot de interpretatie van bepaalde kombinaties binnen deze volgorde. De Egyptenaren hanteerden wel het tientallig getalstelsel maar geen positiestelsel voor het noteren van getallen. Daardoor waren er voor het noteren van een getal meer verschillende cijfers nodig dan in ons notatiesysteem. Bij de Maya's zien wij weer een ander positiestelsel. Zij noteerden niet zoals wij van links naar rechts, maar van boven naar beneden achtereenvolgens eenheden, vijftallen en twintigtallen. Hierbij werd een eenheid voorgesteld door een stip, een vijftal door een horizontale streep en een twintigtal door een schelp met een stip erboven. Zo wordt 26 geschreven als in figuur 1 (Aartsen 1976).

Het positiestelsel komt in het onderwijs slechts aan de orde bij het leren splitsen van een getal in tientallen en eenheden. Tijdens onze onderzoeken

schoolprestaties volgens leerkracht	klas	korr. ond.	klinisch ond.	aantal	n
onvoldoende in rekenen	1		X	0 = 0%	10
onvoldoende in rekenen	2		X	6 = 37%	16
onvold. in rek. + taal	2	X		4 = 30%	13
onvoldoende in rekenen	2	X		0 = 0%	11
goed in rek. + taal	2	X		10 = 79%	13
onvoldoende in rekenen	3		X	3 = 60%	5
					68

Tab. 2 Aantal kinderen dat het inzichtelijk splitsen van getallen in tientallen en eenheden toepast

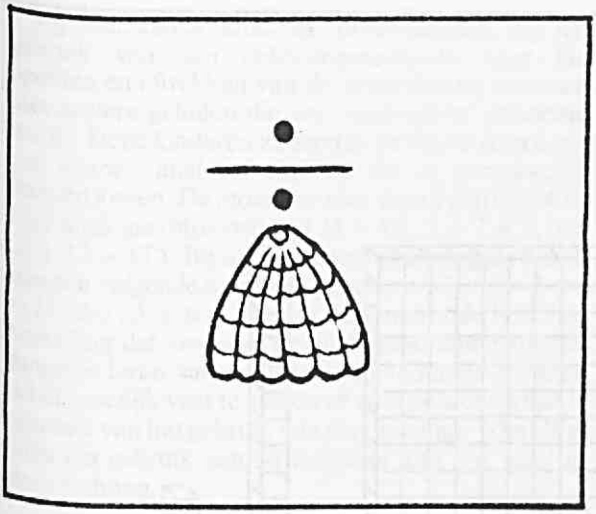

Fig. 1 Met getal 26 in mayaschrift

stelden wij vast dat er in de tweede klas nog fouten tegen de afspraken gemaakt worden, bijvoorbeeld 41 + 1 = 4 + 1 + 1 = 6. Bij bepaalde sommen moet men erop verdacht zijn dat de uitkomst die het kind geeft, goed kan zijn, ondanks een fout tegen het positiestelsel. Bijvoorbeeld: 19 − 16 = (1 + 9) − (1 + 6) = 10 − 7 = 3. In het korrelationeel onderzoek observeerden wij dat van de zestien tweedeklassers die volgens de leerkracht geen problemen met rekenen hadden, tien kinderen getallen konden splitsen en dat geen van deze tien kinderen daarbij fouten maakten tegen de afspraken met betrekking tot het positiestelsel. Van de zestien tweedeklassers van het klinisch onderzoek – kinderen die volgens de leerkracht rekenproblemen hebben – waren er zes kinderen die getallen konden splitsen. Van deze zes kinderen maakten echter drie kinderen nog fouten tegen de afspraken met betrekking tot het positiestelsel. De gevonden verschillen tussen kinderen met en kinderen zonder rekenproblemen krijgen nog meer gewicht wanneer men bedenkt dat de kinderen zonder problemen aan het begin van het schooljaar (november) onderzocht werden, terwijl de kinderen met rekenproblemen aan het eind van het schooljaar (mei) onderzocht werden. Alhoewel het in beide groepen om tweedeklassers gaat, is de tweede groep een half jaar verder in het onderwijs. Gezien deze resultaten vinden wij het merkwaardig dat het positiestelsel en bovengenoemde fouten nauwelijks terug te vinden zijn in de niet-kwalitatief psychologische testen en onderzoeken. Alleen in het werk van Swinnen en Vandenberghe komt het begrip plaatswaarde voor, zij het voor oudere leerlingen.

Om kinderen inzicht te geven in de afspraken met betrekking tot het positiestelsel en met name kinderen die rekenproblemen hebben, zal hieraan bij het leren rekenen meer aandacht besteed moeten worden. Dit kan door hulpmiddelen aan te bieden waarin het positiestelsel duidelijk tot uitdrukking komt. Wij denken bijvoorbeeld aan geldrekenen, onder elkaar zetten[4], de lusabakus (IOWO 1977) en MAB-materiaal (zie Fig. 2 en 3).

Een veel voorkomende fout die wij tijdens onze onderzoeken observeerden, zijn *cijferomwisselingen*. Het omwisselen van cijfers (een-en-twintig lezen als er twaalf geschreven staat) kan een fout tegen het positiestelsel zijn. In een aantal gevallen was het moeilijk om vast te stellen of er sprake was van een waarnemingsfout of van een fout tegen de positiewaarde van een cijfer. Zo observeerden wij de volgende oplossing van de som 65 + 32 = '60 die 5 erbij, dan 20 erbij dan 3 erbij, 5 en 3 is 8, dan 88'. In dit geval is het niet duidelijk of het kind de 2 als twintig opvat omdat het de plaats van tientallen en eenheden omwisselt of omdat het bij het oplezen (in zichzelf) 23 in plaats van 32 heeft gelezen.

Het omwisselen van cijfers kwam bij alle door ons onderzochte groepen kinderen voor. De kinderen wisselden cijfers om bij het oplezen van een som, tijdens het uitrekenen van een som en ook bij het noteren van het antwoord. Overigens beschouwen wij een cijferomwisseling niet als een ernstige fout; de uitkomst van de som is weliswaar fout maar het kind kan best een goede oplossingsmethode toegepast hebben. Bovendien is ons gebleken dat de meeste kinderen zich herstelden nadat de proefleider gezegd had 'kijk nog eens goed'. Voor cijferomwis-

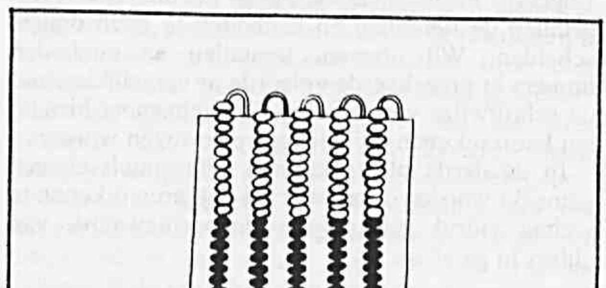

Fig. 2 De lusabakus

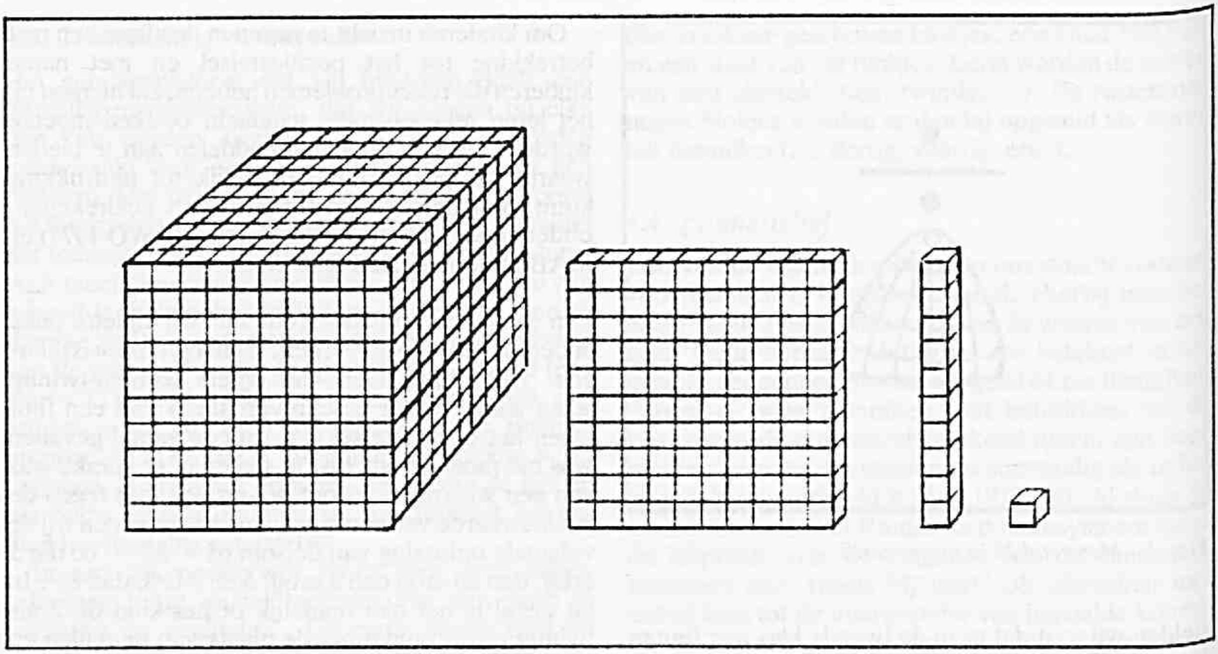

Fig. 3 MAB-materiaal (Multibase Arithmetic Blocks)

selingen kunnen verschillende soorten verklaringen gegeven worden.

In de eerste plaats zou men een verband kunnen veronderstellen met omkeringen die kinderen van deze leeftijd maken bij het leren lezen en schrijven. Hierover is ons geen onderzoek bekend.

Ten tweede kan men een verklaring zoeken in de volgorde waarin tientallen en eenheden in de Nederlandse telwoorden genoemd worden. In het Nederlands is het moeilijker dan in bijvoorbeeld het Engels of Frans om kinderen via het uitspreken van getallen de tientallen en eenheden te laten onderscheiden. Wij noemen tientallen en eenheden immers in omgekeerde volgorde in vergelijking met de schrijfwijze van getallen. Wellicht moet hier bij het leren rekenen duidelijker op gewezen worden.

In de derde plaats kunnen cijferomwisselingen gemaakt worden doordat er bij het leren rekenen te weinig nadruk gelegd is op de positiewaarde van cijfers in getallen.

4.5. *Verkortingen en herstrukturering in aansluiting op het splitsen in tientallen en eenheden.*

Wanneer er gesplitst wordt in tientallen en eenheden, vormt dit splitsen altijd een onderdeel van de totale oplossingsprocedure. In aansluiting op het splitsen in tientallen en eenheden bestaan er een aantal methoden om de rest van de oplossingsmethode te verkorten door bepaalde vormen van herstrukturering.

Een groot aantal van de door ons onderzochte kinderen die splitsten, loste de rest van de opgave op door tellen, bijvoorbeeld: '14 + 38 = 10 + 30 = 20, 30, 40; 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52'. Deze oplossingsmethode kan verkort worden wanneer er gebruik gemaakt wordt van de tientallige struktuur en het inwisselsysteem. Wij observeerden dat kinderen verschillende methoden toepasten om tot deze verkorting te komen.

Een veel toegepaste methode voor overbrugging van het tiental is het zogenaamde *aanvullen of leegmaken* van het tiental. Hierbij wordt de eenheid die opgeteld moet worden, gesplitst om tot het volgende tiental te komen (bijvoorbeeld 18 + 6: 'eerst 2 erbij, toen 4 over, bij de 20 gedaan, 24'). In een aantal gevallen ontstaan er typische fouten, bijvoorbeeld 16 + 6 = 16 + 4 + 6 = 26. Het tiental wordt aangevuld maar de daarvoor gebruikte eenheden worden niet van de tweede term afgehaald. Een voorbeeld van het doorvoeren van deze methode in gevallen waarin een veel eenvoudiger oplossingsmethode gehanteerd kan worden, zien wij in het volgende voorbeeld: 65 + 32 = '70 van maken, dus 5 erbij, dan blijven er 25 over (van de 30), 70 + 25 = 95 en nog 2 = 97'.

Bij een aantal kinderen observeerden wij het gebruik van een oplossingsmethode voor het optellen en aftrekken van de eenheden bij sommen met grotere getallen die wel 'analogieën' genoemd wordt. Deze kinderen zoeken in de totale som eerst een kleine, 'analoge' som op die zij gemakkelijk kunnen lossen. De moeilijke som wordt dan opgelost naar analogie (bijvoorbeeld 35 + 12: '5 + 2 = 7, dus 35 + 12 = 47'). Bij sommen met overbruggen wordt dan een volgende oplossing gegeven: '35 + 6 = 5 + 6 = *11, dus 35* + 6 = 41'. Bij deze methode is het de bedoeling dat kinderen de analogiesommen zo snel mogelijk leren automatiseren. In sommige gevallen is het moeilijk vast te stellen of er al of niet sprake is geweest van het gebruik van een 'analoge' som. Wel wijst het gebruik van de woorden 'dus' en 'dan' in deze richting.

4.6. *Volledig verkorte handelingen, automatiseren*

De meest verkorte handeling is de geautomatiseerde handeling. Gal'perin omschrijft automatisering als een in wezen verbaal proces dat door verkorting en vergaande beheersing zijn direkt herkenbare verbale karakter grotendeels verloren heeft (in Van Parreren en Carpay 1972, 59). Met betrekking tot het automatiseren van sommen zijn er twee soorten interpretaties van het psychologische karakter van het leren automatiseren. Het automatiseren kan opgevat worden als associatief leren. Hiermee korrespondeert het uit het hoofd leren van sommen in de traditionele rekenmethoden waarin uitsluitend rijtjes met sommen in symboolvorm voorkomen. De voorstanders van deze instampmethoden konden zich baseren op leerpsychologieën die minder algemeen van toepassing zijn dan aanvankelijk gedacht werd (met name stimulus-respons theorie).

Wij verstaan onder automatiseren het maximaal verkorten van een handeling die oorspronkelijk uitvoerig was. Deze omschrijving sluit aan bij de wijze waarop ons inziens de automatisering tot stand moet komen. De basis van de automatisering moet niet alleen het geheugen zijn (instampproces) maar de verkorting van een uitvoerige handeling. Een geautomatiseerde handeling moet dus niet alleen snel maar ook bewust voltrokken kunnen worden en gegeneraliseerd zijn.

In onze onderzoeken was het meestal gemakkelijk vast te stellen of het kind de som geautomatiseerd had of niet. Dit bleek namelijk uit de reaktietijd en uit zichtbaar aftelgedrag. Alleen wanneer de tweede term klein was (bijvoorbeeld 5 + 2), was het moeilijk vast te stellen of het kind de som geautomatiseerd had of niet. De eersteklassers uit het klinisch onderzoek bleken bijna nog geen enkele som geautomatiseerd te hebben. De tweedeklassers hadden over het algemeen een paar eenvoudige sommen geautomatiseerd, zoals bijvoorbeeld 5 + 3, 4 + 5. De geautomatiseerde handelingen bleken in een aantal gevallen echter niet wendbaar (gegeneraliseerd).

Een aantal kinderen dat bepaalde sommen geautomatiseerd had, loste dezelfde sommen op met behulp van tellen wanneer deze een deelhandeling van de totale oplossingsprocedure vormden. Bij het uitrekenen van ingewikkelde sommen bleek het niet geautomatiseerd hebben van sommen onder de tien een knelpunt. Het oplossingsproces duurt dan te lang en bestaat uit te veel deelhandelingen. Daardoor neemt de kans op fouten toe, onder andere doordat het werkgeheugen te zwaar belast wordt.

Wij konkluderen dat het automatiseren van eenvoudige sommen noodzakelijk is om het oplossingsproces soepel te laten verlopen. Deze automatisering dient ons inziens, zoals uit het bovenstaande blijkt, niet tot stand te komen door een instampproces maar door een verkortingsproces waarbij dan tevens meer geprofiteerd kan worden van incidenteel leren.

Het analyseren en synthetiseren van getallen dient ons inziens een belangrijke plaats in te nemen bij het leren automatiseren. Hiervoor bestaan voldoende aantrekkelijke materialen (eenvoudige telramen, dobbelstenen en dominostenen) en lesjes (bijvoorbeeld 'busproblemen' in Wiskobas, IOWO, 1975a en b).

5. *Slotwoord*

Zoals wij in onze inleiding al aangaven, dient een diagnostisch onderzoek ons inziens te resulteren in voor de leerkracht relevante instruktie. Bovendien stelden wij dat hiervoor uitgegaan dient te worden van een geëxpliciteerde theorie van het leren rekenen, dat wil zeggen een theorie waarin leerpsychologische en wiskundige aspekten geïntegreerd zijn. Alhoewel de ontwikkeling van een dergelijke theorie binnen de kwantiwijzer nog in een beginstadium is, menen wij dat een van de belangrijkste oorzaken van stagnaties (leerstoornissen) in het door ons onderzochte gebied gezocht moet worden in het gegeven rekenonderwijs (zie ook Nelissen 1977).

Doordat bij de kinderen geen juiste oriënteringsbasis[2] aangebracht was, bleven ze steken in telprocedures en waren ze niet in staat verkorte oplossingsprocedures te hanteren. Zij hadden de eigenschappen van het getallensysteem, die verkorting van de oplossingsprocedure mogelijk maakt, niet geleerd. Zowel Davydov als Gal'perin hebben er al op gewezen dat er geen interiorisatieproces zal optreden wanneer het systeem voor de orënteringsbasis ontbreekt (Nelissen, Vuurmans en Wolters 1977, 50).

Een andere oorzaak van rekenproblemen ligt ons inziens in het ontbreken van een juiste *wijze van aanpak*. Tijdens de verschillende onderzoeken viel het alle proefleiders op dat de kinderen een uitkomst van een opgave zo snel mogelijk wilden geven, zelfs al wisten zij in sommige gevallen dat de uitkomst fout was. Dit is ons inziens verklaarbaar als men weet dat het kriterium voor 'goed rekenen' vaak nog samenhangt met het aantal opgeloste sommen. Het gaat bij het rekenen dan om de uitkomsten en niet om het zoeken naar een handige oplossingsprocedure.

Verder bleken de door ons onderzochte kinderen bijna nooit een *kontrolehandeling* uit te voeren. Een eenmaal opgeschreven uitkomst werd niet meer nagerekend tenzij de proefleider hierom vroeg. Soms begrepen de kinderen de funktie van de kontrole zelfs niet en bleven bij hun eenmaal gegeven uitkomst, ook al bleek dit bij het narekenen fout te zijn.

Gal'perin (in Nelissen, Vuurmans en Wolters 1977, 55) acht het uitvoeren van een kontrolehandeling een essentiële ondersteuning, vooral ook in verband met het verkrijgen van inzicht in de relatie tussen de handelingen op verschillende nivo's (materieel, verbaal, mentaal). Het ontbreken van dit inzicht bij de door ons onderzochte kinderen bleek bijvoorbeeld uit het feit dat zij in zeer veel gevallen niet in staat bleken een formulesom te materialiseren of andersom.

Zowel het denken over een wijze van aanpak als het uitvoeren van een kontrolehandeling hebben betrekking op de mate van bewuśtheid waarmee de handeling wordt uitgevoerd. Karpova en Ataninja (Gal'perin in Nelissen, Vuurmans en Wolters 1977, 55) konstateerden in een aantal onderzoeken een samenhang tussen de drie door ons hierboven onderscheiden faktoren. Uit hun onderzoeken bleek dat de mate van bewustheid mede sterk samenhangt met een juiste en volledige oriënteringsbasis.

Bovengenoemde , algemene leerpsychologische begrippen worden in de kwantiwijzer gaandeweg geoperationaliseerd zodat meer systematisch onderzoek hiernaar mogelijk wordt.

Tenslotte menen wij niet alleen dat meer kinderen met minder moeite kunnen leren optellen en aftrekken maar ook, dat, onder verwijzing naar het werk van het IOWO, leren optellen en aftrekken zelfs leuk kan zijn.

Noten

1. De hiërarchie van het Pump-projekt is in Nederland gevalideerd door het Cito (zie Van Dam, Deventer en Leenheer 1977).
2. Wij gebruiken het begrip oriënteringsbasis hier voorlopig bij gebrek aan een beter begrip. Wij zijn ons ervan bewust dat het begrip nog onvoldoende uitgewerkt is. De meest recente informatie over de oriënteringsbasis konden we vinden in Nelissen, Vuurmans en Wolters (1977, 50). Bij het opstellen van de oriënteringsbasis moet volgens Gal'perin gelet worden op logische, psychologische en kreatieve aspekten, op vakinhouden en uitzonderingsgevallen.
3. Bovendien onderscheidt Freudenthal (1973) behalve het ordinale getal (counting number) en het kardinale getal (nemerosity number) ook nog het meetgetal (de maat van grootheden), het rekengetal (een getal dat door een bepaalde rekenkundige of algebraïsche bewerking wordt bepaald) en het getal als nummer (bijvoorbeeld paragraaf 2, kind 12).
4. Enkele kinderen die wij onderzochten, beheersten de methode van het onder elkaar zetten. In de klas mochten zij deze methode echter niet toepassen, waarschijnlijk omdat 'echt rekenen' te sterk geïdentificeerd wordt met 'hoofdrekenen'.
5. Met dit notatiesysteem bedoelen wij behalve de cijfers vooral ook de symbolen +, − en =. In onze onderzoeken bleek inzicht in de betekenis van deze symbolen vaak te ontbreken. Zo wordt het = teken niet opgevat als 'is evenveel als' maar bijvoorbeeld als de plaats waarachter het antwoord van de som moet komen. Vaak wordt ook geen rekening gehouden met de plaats van deze symbolen. De problemen met puntsommen zijn hiert ons inziens grotendeels op terug te brengen. De kinderen zien twee getallen en voeren klakkeloos de operatie uit die het symbool aangeeft. Zo wordt bij de som 3 + . = 7 op de punt 10 ingevuld.

Literatuurlijst

Aartsen, E. W. van, Maya's in: *Intermediair*, 8-10-1976, p. 31-42.

Dam, P. van *Pompen of verzuipen*, Cito-memo nr. 180. Arnhem, CITO, 1976.

Dam, P. van, M. van Deventer en E. Leenheer, *Optellen onder elkaar*, Cito-memo nr. 256. Arnhem, CITO, november 1977.

Dumont, J. J., J. H. M. Hamers en A. J. J. M. Ruijssenaars, Rekenstoornissen. De samenhang van technisch en begrijpend rekenen met enkele psychologische vaardigheden, *Pedagogische Studiën*, november 1977 (11).

Eerde, H. A. A. van en L. W. M. Verhoef, *Interimrapport II SVO-projekt 0327 Kwantiwijzer, verslag van de* *periode september 1976 - juni 1977*. Utrecht, psychologisch laboratorium, 1977.

Eerde, H. A. A. van en L. W. M. Verhoef, Het leren optellen en aftrekken op de basisschool, in: *Strategieën in leer- en onderwijsprocessen,* bundel met papers van de Onderwijs Research Dagen 1978.

Freudenthal, H., *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Reidel, 1973.

Gal'perin P. J. Stages in the development of mental acts, in: M. Cole & J. Maltzman, *A handbook of contemporary Soviet psychology,* New York/London, Basic Books, 1969.

Groen, G. J. en J. M. A. Parkman, A chronometric analysis of simple addition, in: *Psychological Review,* 1972 (72) 329-343.

Heesen, H. D., Strelitski en A. van den Wissel, Een onderzoek naar de beheersing van de rekenstof in het GLO, in: *Pedagogische Studiën,* 1967.

Heesen, H., D. Strelitski en A. van den Wissel, De Schiedamse Rekentest, in: *Pedagogische Studiën,* 1968.

Heesen, H., D. Strelitski en A. van den Wissel, *Handleiding Schiedamse Rekentest (SRT)*. Groningen, Wolters Noordhoff, 1971.

IOWO (Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs), *Overzicht van het wiskunde-onderwijs op de basisschool*. Utrecht, 1975a.

IOWO (Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs), *Het grote 1+ boek,* Wiskobas. Utrecht, 1975b.

IOWO (Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs), *De abakus, Leerplanpublikatie 6,* Wiskobas-bulletin jaargang 6. Utrecht, 1977 (4).

Ippolitova, M.V., Eigenschappen van de rekenkennis bij leerlingen uit de eerste klas met een tijdelijke achterstand in de psychische ontwikkeling (samenvatting uit het Russisch door Nadja Louwerse), in: T. A. Vlasova & M. S. Pevzner, *Deti s vremennymi zaderzkami razvitija,* Moskou Pedagogika, 1971.

Johanssen B. en W. Kilborn, *Aritmetikdiagnoser Handledning*. Stockholm, Liber Läromedel, 1975.

Kilborn, W. en U. P. Lundgren, *A contribution to the analysis of arithmetic teaching and learning,* A paper presented at the first Dimo-workshop, Institute of education, University of Göteborg. Göteborg, 1975.

Koster, K. B., *De ontwikkeling van het getalbegrip op de kleuterschool. Een onderzoek naar de effekten van enkele trainingsprogramma's*. Groningen, VRB, 1975.

Lompscher, J., *Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten,* Autorenkollektiv unter Leitung von J. Lompscher. Berlin, Volk un Wissen, 1975.

Nelissen, J. M. C., Over oorzaken van stoornissen in het proces van het leren rekenen, in: *Tijdschrift voor Orthopedagogiek,* januari 1977.

Nelissen, J., A. Vuurmans en M. Wolters, *Wat Tanecka niet leert zal Tanja nooit weten,* Verslag van een studiereis naar Moskou. Utrecht, SAC, 1977.

Parreren, C. F. van, *A building block model of cognitive learning,* in: A. M. Lesgold, J. W. Pellegrino, S. D. Fokkema, R. Glaser, Cognitive psychology and instruction. New York, 1978.

Parreren, C. G. van en J. A. M. Carpay, *Sovjetpsychologen aan het woord*. Groningen, 1972.

Rispens, J., Noot over het gebruik van de term diagnostische toetsen, speciaal bij het onderzoek van kinderen met leermoeilijkheden, in: *Memoreeks onderwijsresearch (1),* 1973 (2) 6-8.

Schonell. F. J., *Practice in basic arithmetic*. London, 1957.

Schonell, F. J., *Diagnostic Arithmetic Tests*. London, Oliver & Boyd, 1964.

Schonell, F. J. en F. E. Schonell, *Diagnosis and remedial teaching in arithmetic*. London, 1965.

Stahl, R. Die Entwicklung geistiger Fähigkeiten in Mathematikunterricht der Klassen 1 bis 3, in: J. Lompscher, *Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten*. Berlin, Volk und Wissen, 1975 (6) 258-303.

Suppes, P., The psychological foundation of mathematics on the theory of cognitive processes, in: *Studies in the methodology and foundations of science selected papers from 1951 to 1969*. Dordrecht, Reidel, 1969.

Svenson, O., Analysis of time required by children for simple additions, in: *Acta Psychologica,* 1975, vol 39 (4) 289-301.

Swinnen, K. en R. Vandenberghe, *Analytische rekenproeven,* Centrum voor psychopedagogisch en didaktisch onderzoek, afd. orthopedagogiek. Leuven, 1970.

Swinnen, K. en R. Vandenberghe, Diagnostisch onderzoek in de klas, met als toepassing de constructie van 'Analytische rekenproeven', in: *Pedagogische Studiën,* 1973, pp. 261-278.

Verhoef, L. W. M. en H. A. A. van Eerde, *Interimrapport I SVO-projekt 0327 Kwantiwijzer*. Utrecht, psychologisch laboratorium, 1976.

Westerveld, M., *Het leren bijtellen in de eerste klas van de basisschool,* Doktoraalskriptie IPAW. Utrecht (z.j.).

Curriculum vitae

Dolly van Eerde (1948) studeerde na het gymnasium een jaar aan een buitenlandse universiteit en behaalde in 1974 in Utrecht het doktoraaleksamen onderwijskunde. Sinds 1971 is zij part-time werkzaam in onderzoek naar de ontwikkeling van het getalbegrip en het leren rekenen, eerst als studentassistente en sinds 1975 als mede-projektleidster bij de kwantiwijzer.

Leonard Verhoef (1950) studeerde na het voltooien van de pedagogische akademie psychologie en behaalde in 1975 in Utrecht het doktoraaleksamen onderwijskunde. Sinds 1972 is hij part-ume werkzaam in onderzoek naar de ontwikkeling van het getalbegrip en het leren rekenen, eerst als studentassistent en sinds 1975 als mede-projektleider bij de kwantiwijzer.

Adres: Varkenmarkt 2, Utrecht.