Het aanleren van deel-geheel relaties in het aanvankelijk rekenonderwijs

E. M. H. Assink, *Psychologisch Laboratorium*
N. Verloop, *I.P.A.W., vakgroep Onderwijskunde*
Rijksuniversiteit Utrecht

Samenvatting

In dit artikel wordt een onderzoek beschreven, waarin geprobeerd werd door middel van een korte experimentele kursus de prestaties van kinderen van een tweede klas basisschool te verbeteren bij het oplossen van redaktieopgaven.

De algemene hypothese waarop deze kursus berustte was dat de leerlingen in het algemeen bij het oplossen van deze opgaven niet zozeer faalden op grond van de tekstkomponenten, dan wel op grond van het niet of niet voldoende doorzien van de mathematische struktuur die aan de opgaven ten grondslag ligt. Wij beperkten ons tot optel- en aftrekopgaven en beschouwden, in navolging van Mikulina, het inzicht in de deel-geheel relaties als fundamenteel voor het leren uitvoeren van deze opgaven. De kursus moet dus gezien worden als een poging inzicht in deze deel-geheel relatie bij te brengen.

De klas werd in 3 gematchte groepen verdeeld; groep A kreeg het programma aangeboden, waarbij voortdurend gebruik werd gemaakt van lettersymbolen in plaats van cijfers (dit omdat wij vermoedden dat dit de leerlingen zou dwingen zich op de deel-geheel relaties zèlf te richten, eenvoudig omdat er 'niets te rekenen' valt); groep B kreeg het programma met gewone cijfersymbolen; groep C fungeerde als kontrolegroep en ging verder met het gewone rekenprogramma.

De effekten van ons programma gingen wij na door vergelijking van voor- en natoetsskores (voor- en natoets waren equivalent). Groep A presteerde op de natoets signifikant beter dan op de voortoets, groep B presteerde ook duidelijk beter, maar niet signifikant, terwijl groep C op de voor- en natoets een gelijk gemiddelde had. Vergelijking van de verschilskores leverde geen enkel signifikant resultaat op. Voor- en natoets korreleerden zeer signifikant met de reken-rapportcijfers; daarentegen bestond er geen verband met begrijpend lezen.

Aan het eind van de kursus werd een kwalitatieve analyse uitgevoerd bij elke leerling afzonderlijk. Hierbij bleek onder meer dat bepaalde 'kritische' opgaven door sommige leerlingen nog niet konden worden uitgevoerd; enige hulp leidde echter bijna altijd tot opmerkelijke prestatie-verbetering.

Het totale programma nam twaalf lessen in beslag en werd door ons zelf, naast het gewone rekenprogramma, gegeven.

1. *Inleiding**

1.1. *Algemene oriëntatie: Kohnstamm en Vygotskij over 'leren denken'*

De laatste jaren staat het onderwerp 'leren denken' als onderwijsdoelstelling en onderzoeksobjekt weer midden in de belangstelling (Van Parreren 1975, 363). Omdat het volgende onderzoeksverslag in zijn algemeenheid binnen dit onderwerp valt willen wij summier hier enkele opmerkingen maken over de achtergrond ervan. Ph. Kohnstamm in Nederland en L. S. Vygotskij in de Sovjet-Unie zijn te beschouwen als grondleggers van het onderzoek op dit gebied. Beiden zijn van mening dat het kognitief ontwikkelingsverloop kultureel bepaald is. Vygotskij stelt dat het kind onderwijsbaar is, het maakt een proces door waarin het kognitieve kultuurbezit van de volwassene wordt overgenomen.

Kohnstamm meent dat het hier gaat om de 'overname van in de loop der eeuwen door de menselijke kultuur gevonden doeltreffende schema's en abstrakties, de theoretische intelligentie'. De mate waarin het kind onderwijsbaar is wordt door Vygotskij gedefinieerd met behulp van de term 'zone van naaste ontwikkeling'; Kohnstamm spreekt van 'opnemingsvermogen van de leerling'. Met behulp van deze termen geven beiden de rol van het onderwijs aan. Het onderwijs moet aansluiten bij de zone van naaste ontwikkeling en steeds nieuwe zones kreëren, moet grensverleggend zijn. Kohnstamm

* Met dank aan Prof. Dr. v. Parreren voor het kritisch doorlezen van het manuscript.

zegt: 'het onderwijs moet de vereiste hulpmiddelen bieden opdat het opnemingsvermogen van de leerling hem brengt tot het voor hem bereikbare verzadigingspunt. Het onderwijs moet zich richten op de ontwikkeling van de theoretische intelligentie'.

In de volgende paragraaf komt aan de orde hoe de ideeën van Kohnstamm en Vygotskij in het reken/wiskundeonderwijs gestalte hebben gekregen.

1.2. *Leren denken binnen het reken/wiskundeonderwijs*

Het is duidelijk dat het rekenen al vanaf het begin is gezien als een uitermate geschikt vak om de in 1.1. genoemde ideeën te realiseren. Welk type opgave is nu het meest geschikt om bovenstaande doelstellingen te realiseren? Hierop wordt vrijwel unaniem geantwoord: vraagstukjes, redaktiesommen, denksommen, kontekstproblemen; misschien bestaan er nog wel meer termen, waarvan wij allen intuïtief aanvoelen dat er grotendeels hetzelfde mee bedoeld wordt. Wolters (1976a) geeft de volgende definitie van redaktiesom: 'Een redaktiesom is een omschrijving van een konkreet probleem, dat op mentaal nivo opgelost moet worden en dient te resulteren in een aantal rekenkundige operaties'. Wanneer wij deze omschrijving vergelijken met die van Kobes (1975, 16): 'Ein reales Problem wird mit Hilfe der natürlichen Sprache beschrieben, und es wird gefordert, diese Beschreibung struktureller Beziehungen in eine formale Beschreibung zu überführen, die es gestattet, einen bekannten formalen Lösungsalgorithmus (zum Beispiel Lösen linearer Gleichungen mit einer Unbekannten) anzuwenden', dan zien wij dat Kobes' definitie verder specificeert. Idealiter komt het oplossen van redaktieopgaven namelijk neer op twee deelprocessen: 1. de transformatie van de gegeven tekst in vergelijkingen; 2. het oplossen van de vergelijkingen. Lompscher (1975, 261) geeft als kern van het oplossingsproces het herkennen en uitwerken van de essentiële mathematische betrekkingen. Hieruit zijn volgens hem drie voorwaarden af te leiden die voor een goede oplossing nodig zijn: *ten eerste* het vinden van de relevante gegevens, *ten tweede* het begrijpen van de relaties daartussen en *ten derde* het juist oplossen van de vergelijking (cijferen). Het probleem zit met name in de eerste twee fasen. In het onderwijs wordt bij de behandeling van denkopgaven meestal begonnen met het geven van de vergelijking en vervolgens wordt de uitwerking hiervan uitvoerig besproken (Steinhöfel, 1975). Wordt, zoals in sommige gevallen gebeurt, het proces van het opstellen van vergelijkingen wel behandeld, dan gebeurt dit op een voor de leerlingen passieve manier.

Zoals hierboven al is opgemerkt zitten de moeilijkheden vooral in de twee eerste fasen. Deze fasen noemen wij de denkfasen; hierin moeten een of meer denkstappen gezet worden om te komen tot de opstelling van een vergelijking. Met een denkstap bedoelen wij het omzetten van een probleem in mathematische termen (Wolters 1976a, 23). De moeilijkheidsfaktoren die hiermee samenhangen noemen wij A-faktoren; de moeilijkheden die voortvloeien uit de redaktie van het probleem worden B-faktoren genoemd.

Na deze eerste oriëntatie met betrekking tot het begrip 'redaktieopgave' moeten wij ons gaan bezig houden met de vraag hoe het onderwijzen van redaktieopgaven het leren denken optimaal kan bevorderen. Vooraf moeten wij onderscheid aanbrengen tussen algebraïsche en rekenkundige oplossingsmethoden.

1.3. *Algebraïsche en rekenkundige oplossingsmethoden*

Logisch gezien richt de rekenkundige oplossingsmethode zich op het analyseren van de gegevens en op het vinden van de relaties die tussen grootheden in opgaven bestaan. Deze analyse omvat een stapsgewijs afwerken van een plan met vragen, dat dan uiteindelijk leidt tot de bepaling van de onbekende grootheid. De moeilijkheid bij deze methode bestaat hierin dat noch de te verrichten operaties, noch de volgorde, noch de ordening van de gegevens bekend zijn. Door deze moeilijkheid ontstaan er specifieke oplossingsmethoden voor bepaalde typen opgaven. Hieruit volgt weer dat de rekenkundige oplossingsmethode geen *algemene* oplossingsmethode kan zijn. Dit is het essentiële verschil met de algebraïsche methode; bij laatstgenoemde methode wordt het mogelijk door invoering van een speciaal symbool voor de onbekende één vergelijking op te stellen van de gedaante $x = f(a, b, \ldots)$. Nu de relaties tussen de gegevens bekend zijn kan de konkrete waarde van x worden uitgerekend. Terwijl dus de algebraïsche oplossingsmethode in één vergelijkingsformule alle aanwezige relaties tussen bekende en onbekende grootheden vastlegt, ontbreekt deze eenheid bij de rekenkundige oplossingsmethode; hier zien wij een aantal na elkaar uitgevoerde rekenmanipulaties, hetgeen dan uiteindelijk tot de oplossing leidt. De methode is minder inzichtelijk.

Wat betekent dit verschil tussen beide methoden nu psychologisch? Terwijl bij de algebraïsche oplossingsmethode de mentale handelingen zijn gericht op het vastleggen door middel van een vergelijking van de essentiële relaties tussen bekende en onbekende grootheden (op welke manier staan alle gegevens van de opgave met elkaar in verband?), is de leerling bij de rekenkundige methode veel meer gericht op het berekenen van de konkrete getalswaarden van de onbekende grootheid (vgl. Lompscher 1975, 37; Bodanskij 1969).

Psychologisch gezien is de rekenkundige oplossingsmethode veel moeilijker: de opgave stelt hoge eisen aan de leerling wat betreft planning en belasting van het werkgeheugen. Het is overigens in de denkpsychologie een bekend feit dat de subjektieve moeilijkheidsgraad van een probleem in hoge mate wordt bepaald door de wijze waarop de probleemoplosser een probleem innerlijk representeert. Bepaalde problemen zijn bij een bepaalde representatiewijze erg moeilijk, bij een andere representatiewijze triviaal (Frijda en Elshout 1975, 119).

Voorbeeld: Jan, Bas en Co doen vakantiewerk. Jan verdient een bepaald weekloon, Bas verdient drie keer zo veel en Co verdient de helft van Bas Hoeveel verdient Jan als je weet dat ze samen per week 110 gulden verdienen? Rekenkundig is dit een moeilijke opgave, algebraïsch gemakkelijk ($x + 3x + 1\frac{1}{2}x = 110$).

1.4. *Rekenkundige of algebraïsche oplossingsmethoden in de basisschool?*

In de dertiger jaren en opnieuw in de jaren zestig heeft zich een diskussie afgespeeld tussen voor- en tegenstanders van rekenkundige en algebraïsche oplossingsmethoden van denkopgaven. De argumenten van de voorstanders van de rekenkundige oplossingsmethode zijn: *ten eerste* dat kinderen tot een jaar of tien vergelijkingen niet begrijpen, *ten tweede* dat men bij leerlingen door ze rekenkundige methoden bij te brengen waardevolle intellektuele kapaciteiten ontwikkelt. Wat het eerste argument betreft, hierop is de nadruk gelegd door Blonskij (in de jaren '20) in de Sovjet-Unie en door Bos (1936) in Nederland. Volgens Blonskij kan een tienjarig kind alleen konkreet denken. Bos (1936) stelt dat wij het kinderlijk denken zoveel mogelijk moeten benaderen en tot zijn recht laten komen; deze argumentatie doet denken aan de opvattingen van Piaget.

Volgens Menčinskaja en Moro is echter een veel eerdere introduktie van elementen uit de algebra mogelijk (Mikulina 1969, 3). Juist naar aanleiding van de onderzoekingen van Menčinskaja en Moro is men zich gaan afvragen of aard, volgorde en tijdstip van de abstraktienivo's zoals door Blonskij aangegeven, nog wel juist zijn. Met name Davydov heeft uitgesproken opvattingen in dit opzicht. Volgens hem kunnen lettersymbolen al vroeg geïntroduceerd worden als middel tot het weergeven van relaties tussen grootheden. Deze opvatting heeft konsekwenties voor het verband tussen cijfer- en lettersymboliek bij het aanvankelijk wiskundeonderwijs. Terecht merkt Wolters (1976b, 4) op dat wèl de vraag blijft liggen welke de rol en de plaats is van de lettergegevens bij het oplossen van redaktieopgaven. In het volgende zullen wij hierop nog terug komen (2.3.).

Naar aanleiding van het tweede argument van de voorstanders van de rekenkundige oplossingsmethode kan men opmerken dat deze 'intellektuele kapaciteiten' zouden moeten blijken als de leerlingen niet-stereotiepe opgaven voorgelegd krijgen. Uit empirisch onderzoek is tot nu toe hiervan niets gebleken. Waarschijnlijk is bij nieuwe opgaven niet het zelfstandig vinden van de oplossingsmethode, maar het zich herinneren en reproduceren ervan hoofdzaak.

Ons inziens is het invoeren van algebraïsche oplossingsmethoden in het onderwijs het meest belovend. Een dergelijke invoering leidt volgens Bodanskij tot drie algemene probleemstellingen:

a. de vraag of leerlingen van de laagste klassen van de basisschool het mechanisme van vergelijkingen kunnen begrijpen en dit kunnen gebruiken voor het oplossen van eerstegraadsvergelijkingen met één onbekende;
b. de vraag naar een systeem van handelingen op basis waarvan zij kunnen beginnen met dergelijke vergelijkingen te werken;
c. de vraag hoe deze handelingen enerzijds de algemene 'intellektuele kapaciteiten', anderzijds het beheersen van latere onderwerpen van de wiskunde beïnvloeden.

In ons onderzoek hebben wij ons tot de eerste vraagstelling beperkt.

2. *De formulering van het probleem*

2.1. *Afbakening van het onderzoeksterrein*

De problematiek van de taalfaktoren. Het ligt voor de hand bij het bepalen van de moeilijkheidsgraad van redaktieopgaven in eerste instantie te denken aan datgene wat karakteristiek is voor een redaktieopgave: het feit dat de opgave in taal geformuleerd is. Over deze in de taal gelegen faktoren (B-faktoren; zie 1.2.) is reeds een en ander bekend. Zo onderscheidt Stahl (1975a, 327) bijvoorbeeld als taalfakto-

ren die van invloed zijn op de moeilijkheidsgraad van redaktieopgaven:
- Art der Verwendung mathematischer Termini;
- Verhältnis der vorhandenen wesentlichen und unwesentlichen Angaben;
- Reihenfolge der Angaben im Text;
- Bekanntheitsgrad des Sachverhalts.

Een andere benadering van het probleem. In het algemeen probeert men de leerling te helpen bij het overwinnen van de storende taalfaktoren door hem op voor de opgave essentiële zaken te richten middels een serie vragen als: wat wordt gevraagd, wat weet je, enz. In de literatuur vonden wij dat deze methode in het algemeen tot gebrekkige resultaten leidt (Travers 1973, 1161). Vooral ook door gesprekken met Wolters (IPAW) werd onze aandacht gericht op een andere mogelijkheid om de problematiek van de redaktieopgaven te benaderen; hierbij wordt de oorzaak van de moeilijkheden die rijzen niet gezocht in de aanwezige taal-komponenten, maar in de onvoldoende beheersing van de in de opgave gevraagde mathematische *relaties*. Volgens deze visie zou er dan wel enig mathematisch inzicht aanwezig zijn, maar zou in 'moeilijke' situaties als bij een redaktieopgave (waarin het probleem immers vaak op een nieuwe manier is geformuleerd) blijken dat het inzicht tekort schiet en onvolledig is. In dat geval is het dus geboden een algemeen rekenprogramma aan te bieden waarin de leerling een dieper inzicht in de mathematische relaties wordt bijgebracht; na een dergelijk rekenprogramma zullen de leerlingen dan óók met redaktieopgaven veel minder moeite hebben.

2.2. *Probleemstelling*

Uit het bovenstaande volgt dat onze probleemstelling luidt: Is het mogelijk het oplossen van redaktieopgaven te verbeteren door de leerlingen een algemeen rekenprogramma aan te bieden, waarin geprobeerd wordt inzicht te verschaffen in de mathematische struktuur van de opgaven. Wij stellen nadrukkelijk dat wij met 'redaktieopgaven' bedoelen: redaktieopgaven, zoals die momenteel in de school gehanteerd worden, en niet een speciaal door ons ontworpen soort opgaven of iets dergelijks. Essentieel in de bovenstaande formulering is ook dat wij de leerlingen een algemeen rekenprogramma aanbieden, dat wil zeggen een programma dat niet in de eerste plaats op redaktieopgaven is gericht.

Inperking: deel-geheel relaties. Binnen de ons ter beschikking staande tijd was het niet mogelijk een rekenprogramma aan te bieden dat het gehele gebied van het rekenen bestreek. Ten eerste moest een keus gemaakt worden voor een bepaald leerjaar en ten tweede voor een bepaald onderdeel van de leerstof. Wij zijn van mening dat onze doelstelling (inzicht geven in de mathematische struktuur) reeds vanaf klas 1 van belang is. Omdat het voor onze vraagstelling echter wenselijk was dat de leerlingen althans een schriftelijk gestelde redaktieopgave konden lezen voerden wij ons onderzoek in klas 2 uit.

Wat de inperking naar leerstof-onderdeel betreft: wij zochten naar een uitgangspunt waarmee wij het grootste gedeelte van de tweede klasredaktieopgaven (optel- en aftreksommen) konden bestrijken. In navolging van Mikulina (1969) omschreven wij dit als: deel-geheel relaties. Iedere optelling of aftrekking is te beschouwen als een manipulatie met één of meer delen ten opzichte van een geheel. De leerling die inziet hoe een geheel en de delen zich ten opzichte van elkaar verhouden kan in principe elke optel- en aftrekhandeling uitvoeren, onafhankelijk van de vraag of wordt uitgegaan van een deel of van het geheel.

Het opstellen van een vergelijking en het schematiseren. De deel-geheel relatie is ook bijzonder geschikt voor het in eenvoudige vorm opstellen van een vergelijking, waarbij datgene wat gevraagd wordt, wordt uitgedrukt in termen van de bekende gegevens. Vooral Russische onderzoekers leggen veel nadruk op het belang van het opstellen van vergelijkingen (vgl. 1.4.). De grondvorm van de vergelijking is in ons geval steeds: geheel = som der delen.

Het gemak waarmee de deel-geheel relatie zich laat schematiseren (en: zich materieel laat voorstellen) maakt het mogelijk bij het aanleren ervan gebruik te maken van een Gal'perin-procedure (Van Parreren en Carpay 1972, 29 e.v.). Wij hebben hierbij in ons programma uitvoerig gebruik gemaakt van de aanwijzingen en gegevens van Mikulina (1969). Het belang van het schematiseren wordt door bijna alle onderzoekers op dit terrein benadrukt (Travers 1973, 1161; Geissler 1969, 13; Stahl 1975a, 331).

2.3. *Werken met zowel letter- als cijfersymbolen*

In de traditionele didaktiek werd het werken met lettersymbolen gezien als een generalisatie, die pas toepasbaar was na een groot aantal 'konkrete' gevallen, waarin met cijfers werd gewerkt (waarbij het kind dan bovendien nog ontwikkelingspsychologisch gezien aan deze abstraktie toe moest zijn); in de praktijk viel dit dan samen met het begin van het voortgezet onderwijs. Inmiddels is in Russisch onderzoek aangetoond dat het mogelijk is in het aanvankelijk rekenonderwijs te beginnen met lettersymbolen en pas daarna getallen in te voeren (Mikulina 1969). Het is duidelijk dat dit laatste in ons onderzoek onmogelijk is: de leerlingen hebben al bijna twee jaar rekenonderwijs gehad, waarin uitsluitend van cijfersymbolen gebruik gemaakt is. Wij vonden deze variabele echter zo belangrijk dat wij haar toch in ons trainingsprogramma hebben ingebouwd: met één groep kinderen hebben wij konsekwent met lettersymbolen gewerkt, met een andere groep met cijfersymbolen (de kontrolegroep kreeg slechts het gewone rekenprogramma).

Theoretische argumenten. Wanneer men, zoals onze doelstelling luidt, probeert algemeen inzicht in de deelgeheel relatie bij te brengen, ligt het voor de hand deze relatie ook zoveel mogelijk in algemene termen te formuleren; de algebraïsche formulering is ontegenzeglijk meer algemeen dan de rekenkundige. Belangrijker is wellicht het volgende argument: het is een algemeen bekend feit dat veel leerlingen, wanneer zij een opgave krijgen voorgelegd, zo maar 'in het wilde weg' iets gaan uitrekenen. Wanneer de opgave met behulp van lettersymbolen is geformuleerd is dit onmogelijk. Hierdoor wordt de leerling als het ware gedwongen zich op de mathematische struktuur zelf te richten, en wordt een 'vlucht' in rekenmanipulaties voorkomen. De argumenten die verder te noemen zijn ten gunste van het gebruik van lettersymbolen zijn in feite identiek aan de voordelen van de algebraïsche versus de rekenkundige oplossingsmethoden (zie 1.4). In het bovenstaande zit impliciet de gedachte opgesloten dat het gebruiken van cijfers in het trainingsprogramma de leerlingen 'aan het rekenen' zou zetten en daardoor zou afleiden van het eigenlijke mathematiseren. De cijferkonditie werd mede ingevoerd om deze veronderstelling te toetsen; mocht blijken dat mathematiseren in de cijferkonditie even goed wordt bereikt als in de letterkonditie dan kan men zich afvragen of het moeizame invoeren van lettersymbolen de moeite wel loont.

'Praktische' argumenten. Het is bekend dat de meeste leerkrachten van de basisschool (en zij niet alleen) wat huiverig staan tegenover het introduceren van 'algebra' in de basisschool. Het meest overtuigende argument vóór algebraïsering van het rekenonderwijs is waarschijnlijk niet een abstraktwetenschappelijk betoog, maar een duidelijk verschil in prestaties tussen leerlingen die wel en leerlingen die niet gealgebraïseerd rekenonderwijs hebben gehad. Om de vergelijkbaarheid van de twee programma's te bevorderen hebben wij nauwgezet geprobeerd alle kondities behalve het werken met letters versus cijfers in de twee groepen identiek te houden.

3. *Opzet van het onderzoek*

3.1. *Beschrijving van de onderzoeksgroep*

Gekozen werd voor een 10-klassige school in een zgn. oude volksbuurt in Utrecht. De keus van deze school leek ons interessant gezien de samenstelling van haar populatie (veel kinderen van gastarbeiders en ongeschoolde arbeiders): ons experimentele programma zou dan in een zo ongunstig mogelijke situatie worden getoetst.

3.2. *Design*

Het onderzoek werd verricht bij een groep kinderen die het tweede leerjaar bijna hadden voltooid (2.2.). De klas werd in 3 gelijkwaardige groepen gesplitst, waarna 2 groepen ons programma kregen en één groep als kontrolegroep fungeerde (groep C). Van de twee experimentele groepen kreeg de ene een rekenprogramma aangeboden waarin konsekwent met lettersymbolen werd gewerkt (groep A), in de andere groep werd met de gebruikelijke cijfersymbolen gewerkt (groep B). Behalve dit onderscheid was het programma in de experimentele groepen identiek. Ons design wordt in Campbell en Stanley (1963) beschreven als 'design 4' (zij het dat wij in plaats van randomisering matching toepasten). In de uren dat wij met het rekenprogramma bezig waren werd door de kontrolegroep aan rekenopgaven uit het gewone schoolprogramma gewerkt; een eventueel effekt kan dus niet zijn veroorzaakt door het feit dat de experimentele groepen meer tijd aan rekenen hebben besteed. Het programma nam in totaal 12 lessen in beslag (van elk ± 35 minuten). Tijdens het programma werden korte evaluatie-opgaven ingelast (meestal schriftelijk); zij dienden voornamelijk om in een meer objectieve vorm na te gaan of de leerlingen het programma konden begrijpen en verwerken. Aan het begin en aan het eind van het programma werd een schriftelijke klassikale toets afgenomen.

De matchingsprocedure. Het was een probleem hoe wij de drie groepen zodanig konden samenstellen dat zij als aan elkaar gelijkwaardig beschouwd konden worden. Door de relatief geringe omvang van de groepen vonden wij a-selekte toewijzing van de proefpersonen aan de 3 kondities te riskant (te grote toevalsfaktor). Wij besloten daarom matching toe te passen en wel op basis van de skores op de voortoets èn het laatste rapportcijfer voor rekenen (waarbij het gemiddelde van deze twee skores werd genomen). Bij deze matching moest ook nog rekening gehouden worden met het feit dat in deze klas met twee reken-nivo's wordt gewerkt (waarbij bijvoorbeeld het rapportcijfer 7 voor het lage nivo niet vergelijkbaar is met het cijfer 7 van het hoge nivo). Wij losten dit op door de twee nivo's gelijkelijk over de kondities te verdelen en vervolgens binnen die nivo's matching toe te passen op de bekende variabelen. Dit leidde uiteindelijk tot een ons inziens redelijke gelijkwaardigheid qua beginsituatie van de 3 kondities. Later bleek met betrekking tot de voortoetsskores dat de verdeling over de 3 kondities was zoals in Tabel 1 aangegeven.

Tabel 1. Gemiddelden en spreiding van de voortoetsskores.

	$\bar{x}$	s_x
groep A	6.00	2.45
groep B	5.12	2.10
groep C	5.75	2.66

Voor alle mogelijke verschillen tussen de gemiddelden werden de t-waarden berekend; zij bleken niet signifikant te zijn.

Ekwivalentie van de programma's van groep A en B. Het onderscheid tussen groep A en groep B hebben wij gemaakt om het specifieke effekt van het werken met lettersymbolen op de uiteindelijke prestatie (het maken van redaktieopgaven in de natoets) na te gaan; zie ook 2.3. Het was dus belangrijk alle andere variabelen dan letters versus cijfers zo konstant mogelijk te houden. Omdat de lessen aan beide groepen om schoolorganisatorische redenen steeds op hetzelfde tijdstip gegeven moesten worden was het voor de proefleiders niet mogelijk elkaars lessen bij te wonen om zodoende de gelijkheid van de programma's te bevorderen. Oorspronkelijk waren wij van plan steeds beurtelings een les in groep A en groep B te geven. Na uitvoerig overleg over de vooren nadelen hiervan werd gekozen voor de vaste koppeling van een persoon aan een konditie. Voor de ekwivalentie van de programma's hebben wij zorg gedragen door:

- het vooraf uitgebreid bespreken van het verloop van een les (speciaal wat te doen bij eventuele moeilijkheden);
- het van te voren zo letterlijk mogelijk uitschrijven van de lessen;
- het op de band opnemen en vervolgens analyseren van elkaars lessen;
- het geven van identieke (uiteraard behalve letters versus cijfers) tussentijdse evaluatie-oefeningen.

3.3. *Het Davydov-trainingsprogramma*

Zoals wij reeds hebben uiteengezet komt ons rekenprogramma over de deel-geheel relatie in grote lijnen overeen met het programma van Mikulina (1969). Om met dit programma te kunnen beginnen is echter ten aanzien van bepaalde zaken een voorkennis vereist die wij bij onze leerlingen niet aanwezig mochten veronderstellen. In het Russische programma over de deel-geheel relatie hebben de kinderen eerst het rekenprogramma gevolgd zoals dat is samengesteld door Davydov (1966) en Minskaja (1966). Met name de kennis uit het eerstgenoemde programma achtten wij essentieel voor het met sukses volgen van het programma over deel-geheel relaties. Mikulina geeft zelf ook expliciet aan dat deze kennis bekend verondersteld wordt (Mikulina 1969, 14). Wij zagen ons dus genoodzaakt om voorafgaande aan de kursus deel-geheel relaties een soort voor-trainingsprogramma te geven waarin bepaalde zaken uit het rekenprogramma van Davydov worden aangeleerd. Het leek ons konsekwent de scheiding tussen letter- en cijferkonditie naar dit voortrainingsprogramma (hierna te noemen: Davydov-programma) door te trekken. Wij kozen uit het Davydov-programma datgene wat naar onze mening van direkt belang was voor ons eigen programma. Uiteindelijk besloten wij de volgende onderwerpen te kiezen (vgl. Davydov 1966, 228-230):

- het gelijkmaken en aanvullen van objekten;
- de operatie van het optellen (aftrekken);
- de overgang van een ongelijkheid van het type $A < B$ naar een gelijkheid via de operatie van het optellen (aftrekken).

Het zijn met name deze manipulaties met ongelijke hoeveelheden (waarbij het deel kleiner is dan het geheel) die in het programma over deel-geheel relaties terugkomen.

3.4. *De voor- en natoets*

Volgens onze probleemstelling (2.2.) proberen wij na te gaan of het mogelijk is door middel van ons rekenprogramma het oplossen van redaktieopgaven in de reële klassesituatie te verbeteren. Dat betekent ons inziens dat wij voor de voor- en natoets redaktieopgaven moeten nemen die ontleend zijn aan de alledaagse schoolpraktijk; aan de hand van de skores op de voor- en natoets willen wij immers uitspraken doen over het effekt van ons programma.

Voor de selektie van opgaven hebben wij op het dokumentatiecentrum van het Utrechtse Schooladviescentrum een aantal rekenmethodes (Nieuw Rekenen; Hoi Rekenen; Nivo Kursus Rekenen; Naar zelfstandig rekenen) geanalyseerd en een inventarisatie gemaakt van de soorten redaktieopgaven die in

klas 2 voorkomen, met name lettend op de mathematische struktuur die aan de opgaven ten grondslag ligt. Het feit dat de korrelatie tussen de rapportcijfers voor rekenen en de skores op onze voor- en natoets voor de totale groep respektievelijk signifikant was op 0.004- en 0.029-nivo geeft aan, dachten wij, dat wij niet met 'school-vreemde' opgaven hebben gewerkt. De voor- en natoets bestonden elk uit 10 opgaven. De mathematische struktuur van de opgaven in beide toetsen is volkomen identiek; ook de volgorde van de opgaven is in de voor- en natoets identiek. Er is naar gestreefd de moeilijkheidsgraad van de gebruikte getallen gelijk te houden. In de toetsen werden opgaven gebruikt als:
Een winkelier had op maandag 20 potten jam in zijn winkel. Op dinsdag verkocht hij er 10, op woensdag verkocht hij er nog wat. Op donderdag had hij nog 6 potten over. Hoeveel potten had hij op woensdag verkocht? (voortoets).
Tante heeft 25 appels. Aan Petra geeft ze er 7 en aan Els ook een paar. Ze heeft er nu nog 13 over. Hoeveel heeft ze er aan Els gegeven? (natoets).

3.5. *Kwalitatief onderzoek*

Het doel van het kwalitatief onderzoek was het in kaart brengen van de handelingsstruktuur van het kind tijdens het oplossingsproces en vooral het nagaan in hoeverre de aangeboden stof inderdaad was begrepen; het dient dus om na te gaan of de kwantitatieve verbetering op de natoets inderdaad mag worden beschouwd als resultaat van een beter inzicht in de mathematische struktuur van de opgaven. Het kwalitatief onderzoek hebben wij daarom dan ook aan het eind van ons programma uitgevoerd. Het bestond uit een individueel onderzoek van elke leerling waarbij de leerling een aantal vragen werd gesteld en problemen voorgelegd; hieruit zou naar onze mening kunnen blijken wat de leerling wel en niet van het programma heeft begrepen. Zowel de begin-vragen als de toegestane aanwijzingen en helpende opmerkingen hebben wij zoveel mogelijk van te voren vastgelegd en gestandaardiseerd; dit om de onderlinge vergelijkbaarheid te bevorderen. De inhouden en resultaten van het kwalitatief onderzoek zullen in 5.2. worden besproken.

3.6. *Schematisch overzicht van het onderzoek*

Zie Figuur 1.

<table>
<tr><td colspan="3">VOORTOETS (10-tal redaktieopgaven)</td></tr>
<tr><td colspan="3">MATCHING (op voortoets + rapportcijfer rekenen)</td></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr>
<tr><td>Davydov-training
(met letters)</td><td>Davydov-training
(met cijfers)</td><td rowspan="3">Werken
aan
het
gewone
rekenprogramma</td></tr>
<tr><td>Programma
deel-geheel relaties
(met letters)</td><td>Programma
deel-geheel relaties
(met cijfers)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Kwalitatief individueel onderzoek</td></tr>
<tr><td colspan="3">NATOETS (10-tal redaktieopgaven)</td></tr>
</table>

Figuur 1. Schematisch overzicht van het onderzoek.

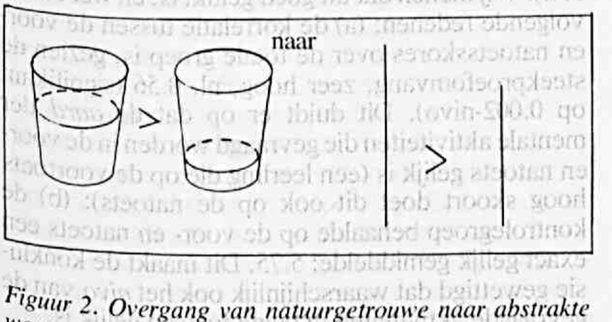
4. *Samenvatting van het experimentele programma*

Het totale programma nam 12 lessen in beslag, waarvan er 4 besteed werden aan de in 3.3. genoemde voortraining. Deze bestond uit een selektie uit het Davydov-programma voor de introduktie van het begrip grootheid (Davydov 1966). Wij kozen die onderdelen uit het programma, die wij als noodzakelijke voorkennis vereist achtten voor ons eigenlijke programma deel-geheel relaties. In het volgende worden de hoofdlijnen van zowel de Davydov-voortraining als het eigenlijke programma puntsgewijs weergegeven, vergezeld van eventuele opmerkingen. (Voor een volledige weergave van het experimentele programma wordt verwezen naar de tekst van het onderzoeksverslag; Assink en Verloop, 1976).

4.1. *De Davydov-training*

Het vergelijken van objekten en vastleggen van de resultaten daarvan in een formule (gelijkheid/ongelijkheid).

- De leerlingen leren konkrete objekten met elkaar vergelijken op één parameter (bijv. 2 flessen met ongelijke inhoud).
- Het leren noteren van het resultaat van de vergelijking. Hierbij werden de symbolen < > en = geïntroduceerd met behulp van een Gal'perinprocedure.
- Het juist leren plaatsen van de symbolen tussen konkrete objekten die vóór de leerling op tafel geplaatst worden. Ook het omgekeerde: het zoeken van 2 passende objekten bij een gegeven symbool.
- Het overstappen van het werken met konkrete objekten naar het weergeven hiervan door tekeningen.
- De overgang van het 'natuurgetrouwe' tekenen van objekten naar het abstrakt weergeven van de relatie. (zie figuur 2)



Figuur 2. Overgang van natuurgetrouwe naar abstrakte weergave.

Dit abstrakt weergeven kan uiteraard op meerdere manieren: met lijnen, cirkeltjes enz.

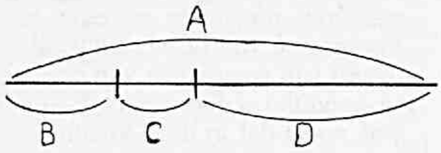
- Vervanging van de verschillende mogelijke manieren van weergeven van objekten door letters (A-konditie) of door cijfers (B-konditie). Hiervoor was nodig dat in de B-konditie een korte *meettraining* werd gegeven: 2 objekten kunnen pas op de betreffende parameter worden vergeleken nadat een meeteenheid voor die parameter is ingevoerd: de kinderen meten vloeistof met kopjes, lengte met centimeters enz. (Zie voor een bespreking van het belang van meettrainingen: Koster 1975).

De operaties van optellen en aftrekken

- Demonstratie dat objekten kunnen toenemen en afnemen volgens een bepaalde parameter (bijv. bij het toevoegen van suiker op een weegschaal).
- Het laten zien dat deze verandering beschreven kan worden: de leerlingen hebben bijvoorbeeld 2 gelijke stroken A en B; van strook A knippen we een stuk K af. Samen met de kinderen wordt de notatie gevonden: $A - K < B$. (In de cijferkonditie werd gewerkt met stroken, waarop een centimeteraanduiding was aangebracht. Hier kon dus bijvoorbeeld genoteerd worden: $10 - 3 < 10$).
- Introduktie van methoden om op nieuwe gelijkheden over te gaan: als wij in het voorgaande voorbeeld 2 ongelijke stroken overhouden laten wij zien dat een manier om tot een nieuwe gelijkheid te komen bestaat uit het toevoegen of weglaten van een 'gelijk stuk'. De kinderen werken met formules van het type:
  $A = B$
  $A + K > B$
  $A + K = B + K$
  Uiteraard is in de cijferkonditie het werken met dit type opgaven bijna triviaal.

De overgang naar een nieuwe gelijkheid door de operaties van optellen en aftrekken.

- Begonnen wordt met 2 objekten die ongelijk zijn op één parameter. Daarna wordt de kinderen gevraagd hoe wij dit moeten noteren, waarbij oplossingen komen als: $M < N$. Na een diskussie over de vraag hoevéél M minder is dan N komt de klas uiteindelijk tot de konklusie dat wij dit niet weten; wij spreken af dat wij dit onbekende verschil voortaan x noemen.
- Invoering van de formele substitutie van de onbekende grootheid in formules: uitgaande van $A < B$ komen wij via $A +$ 'verschilstuk' $= B$ tot $A + x = B$. Vervolgens: $x = B - A$ en dus: $A + (B - A) = B$. De verschillende stappen in dit proces worden met behulp van konkreet materiaal (papierstroken) gemaakt.



Vul in: 'DEEL' of 'GEHEEL':

..........C is even groot als ....A

zonder ....B en zonder ....D.

Figuur 3. Koppeling schema-formule.

4.2. *Het programma deel-geheel relaties*

- Introduktie van de begrippen 'deel' en 'geheel' aan de hand van konkreet materiaal. Bij het zelf bedenken van voorbeelden kwamen de leerlingen tot verrassende antwoorden als: de klas is een geheel, ons groepje is er een deel van.
- Het aantonen van de relativiteit van deze begrippen: je kunt niet zo maar zeggen of iets een geheel of een deel is; gehelen kunnen weer deel zijn van nòg grotere gehelen en omgekeerd (de klas is weer deel van de school).
- Abstraktie van deel-geheel relaties door middel van 'natuurgetrouwe' afbeeldingen van objekten, die door de leerlingen op het bord en schriftelijk gemaakt worden.
- Het weergeven van deel-geheel relaties door middel van diverse abstrakte representaties, analoog aan de gang van zaken in de voortraining. Hier vertoont de afbeelding dus geen gelijkenis meer met de realiteit.
- Introduktie van een algemeen deel-geheel schema: we spreken af dat we het geheel weergeven door een lijn, de delen zijn stukken van die lijn. Van dit algemeen schema uitgaande worden de volgende opgaven gemaakt: (a) het zoeken van objekten die passen bij een gegeven schema; (b) het maken van schema's bij nieuwe deel-geheel relaties; (c) het veranderen van een deel-geheel schema nadat in de deel-geheel relatie van konkreet materiaal een verandering is aangebracht (wij werkten met stroken); (d) het omgekeerde: het veranderen van het konkrete materiaal naar aanleiding van een verandering in het schema.
- Werken met deel-geheel relaties in teksten. Doel is dat de kinderen verbaal beschreven situaties leren schematiseren: zij krijgen teksten waarin deel-geheel situaties verstopt zitten; deze worden gezamenlijk opgezocht en besproken. Daarna moeten de leerlingen bij een gegeven schema zelf een tekst bedenken. De volgende stap is dat zij inzien dat dergelijke schema's ook in formulevorm kunnen worden samengevat, bijv.: ik heb p knikkers, ik verlies er q en heb dan nog r knikkers over: $p - q = r$. Bovendien laten wij zien dat één relatie in meerdere formules kan worden weergegeven: $p = q + r$; $q = p - r$; $r = p - q$.
- Het leggen van een uitdrukkelijke koppeling tussen het schema en de formule wordt gerealiseerd met behulp van speciale opgaven waarvan in Figuur 3 een voorbeeld is gegeven, (naar een idee van Wolters).
  Doel hiervan was het 'handelen aan schema's' bij de leerlingen zoveel mogelijk te bevorderen.
- In de laatste fase van het programma wordt de leerlingen er op gewezen dat zij een deel-geheel situatie in een deel-geheel opgave kunnen veranderen door een willekeurig lid van de relatie tot 'onbekende' te promoveren, die met het symbool x wordt aangeduid, (in het voorprogramma was aan het invoeren van de onbekende met het bijbehorende symbool de nodige aandacht besteed). Het programma werd afgesloten met het leren schematiseren van deel-geheel opgaven en het korrekt opstellen van de bijbehorende formules.

5. *Resultaten*

5.1. *Kwantitatieve analyse*

De voor- en natoets bestonden uit een tiental qua mathematische struktuur identieke redaktie-opgaven, waarbij wij geprobeerd hebben twee series van gelijke moeilijkheidsgraad samen te stellen, (zie 3.4.). Wij menen dat dit goed gelukt is, en wel om de volgende redenen: (a) de korrelatie tussen de voor- en natoetsskores over de totale groep is, gezien de steekproefomvang, zeer hoog, nl. 0.56 (signifikant op 0.002-nivo). Dit duidt er op dat de *aard* der mentale aktiviteiten die gevraagd worden in de voor- en natoets gelijk is (een leerling die op de voortoets hoog skoort doet dit ook op de natoets); (b) de kontrolegroep behaalde op de voor- en natoets een exact gelijk gemiddelde: 5.75. Dit maakt de konklusie gewettigd dat waarschijnlijk ook het *nivo* van de gevraagde aktiviteiten in beide toetsen gelijk is.

Tabel 2. Overzicht van de resultaten per konditie.

	voortoets-gemiddelde	natoets-gemiddelde	t-waarde	df	p-waarde (2-zijdig)
groep A (letters)	6.00	7.37	–2.31	7	0.054
groep B (cijfers)	5.12	6.12	–1.37	7	0.214
groep C (kontrole)	5.75	5.75	0.00	7	1.000

Samenhang tussen toetsskores en schoolvakken. Vanaf het begin van het onderzoek waren wij geïnteresseerd in de vraag, of de door ons afgenomen toetsen als representatief voor de alledaagse school-aktiviteiten beschouwd mochten worden. Vanzelfsprekend werd hierbij allereerst gedacht aan de prestaties voor het vak rekenen; in 3.4. noemden wij reeds de hoge korrelaties die gevonden werden tussen de rapportcijfers voor rekenen en onze voor- en natoets, resp. 0.53 en 0.39 (signifikant op resp. 0.004- en 0.029-nivo). Omdat de rapportcijfers per rekennivo waren toegekend kon de korrelatie slechts op ordinaal nivo worden berekend (Spearman's r_s). Omdat veel onderzoekers een samenhang rapporteren tussen prestaties bij denkopgaven en bij begrijpend lezen (in bijv. Travers 1973, 1160, worden een 5-tal studies genoemd waarin het verband werd gevonden), berekenden wij ook de korrelatie tussen onze voor- en natoetsskores en het rapportcijfer voor begrijpend lezen; tussen deze variabelen vonden wij geen enkel verband (de korrelatie tussen begrijpend lezen en de voortoets is slechts 0.08 en die tussen begrijpend lezen en de natoets is zelfs zwak negatief: –0.17). Dit is te meer opmerkelijk omdat het verband tussen de rapportcijfers voor rekenen en begrijpend lezen zeer duidelijk aanwezig is: 0.53 (signifikant op 0.004-nivo). Statistisch is een dergelijke situatie te verklaren door middel van het aannemen van gemeenschappelijke faktoren tussen *enerzijds* rekenen en *anderzijds* onze toetsen en het begrijpend lezen, die elkaar echter binnen de variabele 'rekenen' niet overlappen (McNemar 1969, 210, bespreekt verwante problematiek in verband met het interpreteren van multiple-korrelaties). Wat wij ons bij deze faktoren moeten voorstellen en wat hun relatieve gewicht is zou slechts met behulp van faktor-analyse uitgemaakt kunnen worden. Wij zijn echter van mening dat bij het geringe aantal variabelen dat wij beschouwd hebben het toepassen van faktoranalyse slechts tot schijn-resultaten zou leiden.

Resultaten voor de afzonderlijke kondities. Wij berekenden de gemiddelde skore op de voor- en natoets voor de drie afzonderlijke groepen en gingen met behulp van een t-toets na of deze verschillen signifikant waren. De resultaten zijn in Tabel 2 weergegeven.

Deze resultaten spreken in feite voor zich; het werken met lettersymbolen levert een vooruitgang op die praktisch op 5%-nivo signifikant is, de groep met cijfersymbolen gaat ook duidelijk vooruit, maar niet signifikant, terwijl de kontrolegroep op hetzelfde nivo blijft. Bij het resultaat van groep A is nog het volgende op te merken: het feit dat groep A al een relatief hoge voortoetsskore heeft (hoewel niet signifikant verschillend van de andere groepen; zie 3.2.) maakt de signifikantie van het voortoets-natoetsverschil nog opvallender; men zou voor de natoets juist geen sterke toename meer verwachten (regressie-effekt).

Toetsing door middel van verschilskores. Wij besloten de verkregen skores niet alleen per konditie te vergelijken, maar ook een vergelijking te maken tussen de verschilskores (d.i. de skores die het verschil tussen de voor- en natoets aangeven) bij de kondities onderling. Bij deze procedure worden dus in elke konditie de verschilskores per leerling berekend; de drie series verschilskores die nu ontstaan worden onderling vergeleken. Er kan nu door middel van een t-toets voor afhankelijke steekproeven bepaald worden of de paren verschilskores signifikant van elkaar verschillen (ofwel: of er een verschil is in de mate van vooruitgang tussen de drie groepen). Deze toetsing leverde in geen van de gevallen signifikante resultaten op (evenmin bij gebruikmaking van de door McNemar 1969, 97, aangegeven procedure waarbij de korrelatie tussen de twee groepen bij de toetsing in rekening wordt gebracht;

t = 1.41 df = 7 p = 0.20).

Nadere analyse van de kwantitatieve gegevens. In 3.2. wezen wij op het feit dat in deze klas met twee rekennivo's wordt gewerkt. Van de 24 leerlingen die deelnamen aan het onderzoek zaten er 9 in het lage rekennivo. Dit betekende dat in elk van de kondities 3 kinderen uit het lage en 5 uit het hoge nivo zaten. Wij zijn geïnteresseerd in de vraag of de kinderen uit het lage nivo even veel (of misschien méér) van ons programma geprofiteerd hebben dan de kinderen uit het hoge nivo. Gezien de mate waarin in ons programma op materieel-aanschouwelijk gebied gewerkt is zou een relatief grotere vooruitgang voor kinderen uit het lage rekennivo niet verwonderlijk zijn. Binnen de drie kondities gingen wij bij zowel de hoge, de lage als de totale groep na hoeveel de gemiddelde vooruitgang per leerling bedroeg. De resultaten zijn in tabel 3 weergegeven.

Tabel 3. Gemiddelde vooruitgang per leerling

	hoog nivo	laag nivo	totaal
groep A	0.80	2.33	1.38
groep B	1.00	1.00	1.00
groep C	-0.80	1.33	0.00

Zoals uit de tabel blijkt profiteert in de A-konditie het lage nivo duidelijk meer dan het hoge van het programma. In de B-konditie geldt dit niet; in de C-konditie is er in het hoge nivo sprake van een lichte achteruitgang, terwijl het lage nivo enige vooruitgang boekt.

5.2. *Kwalitatieve analyse*

Het was schoolorganisatorisch onmogelijk tijdens de lessen de leerlingen individueel te testen. Om echter toch waardevolle gegevens te verkrijgen over het verloop van mentale processen bij het oplossen der opgaven bij de leerlingen afzonderlijk, besloten wij, aan het eind van de experimentele kursus, een individueel onderzoek uit te voeren. Alle leerlingen van de A- en de B-konditie waren hierbij betrokken. De afname van het onderzoek was gestandaardiseerd en werd geprotokolleerd.

De voornaamste konklusies die uit de kwalitatieve analyse getrokken konden worden waren:

a. Met name zwakkere leerlingen (lage rekennivo) hebben moeite met echt abstrakte representatie. Zij hebben voortdurend de neiging terug te vallen tot konkrete weergave.

b. Enkele leerlingen hadden blijkbaar toch nog problemen met het zien van de wezenlijke relaties binnen een deel-geheel schema en met het opstellen van de bijbehorende vergelijking. Dit wijst op een tekortkoming in ons experimentele programma. Als verklaring hiervoor komt ons inziens het meest in aanmerking het feit dat wij, gezien de krappe tijd, te weinig lessen hebben kunnen besteden aan de fase van het *verbaal leren omgaan* met schema's, waarbij de kinderen door verbale explicitering zich de eigenschappen van deel-geheel relaties bewust worden en deze leren koppelen aan het opstellen van vergelijkingen. In toekomstige versies van het programma zal hieraan meer aandacht moeten worden besteed.

c. Het feit dat bij een onjuiste oplossing enige hulp bijna altijd tot belangrijke prestatieverbetering leidde duidt er waarschijnlijk op dat het in de opgave gevraagde nivo van funktioneren voor deze kinderen tot de 'zone van naaste ontwikkeling' behoorde.

6. *Konklusies*

Onze algemene konklusie is dat de benadering zoals wij die in 2.1. uiteengezet hebben (het zoeken van de moeilijkheden niet vooral in de taalkomponenten van de redaktieopgaven, maar vooral in de beheersing van de mathematische relaties zèlf) perspektieven biedt. De vergelijking van de voor- en natoetsskores wijst sterk in de richting van het grote belang van inzicht in de deel-geheel relaties als fundamentele voorwaarde voor het kunnen oplossen van redaktieopgaven in klas 2.

Gezien het hoge signifikantienivo van de korrelaties tussen onze voor- en natoetsskores en het reken-rapportcijfer aarzelen wij niet de door ons voorgelegde toetsopgaven als een representatieve steekproef uit het 'normale' programma te beschouwen.

Wij stelden als hypothese dat het bij het aanleren van de deel-geheel relatie beter is te werken met lettersymbolen dan met cijfers; de onderzoeksresultaten wijzen in de richting van de juistheid van deze hypothese; wij achten de gevonden verschillen tussen de A- en de B-konditie echter niet sterk genoeg om hier een stellige uitspraak op te baseren; verder onderzoek is hier dringend gewenst.

Het bleek dat de leerlingen uit het lage rekennivo zeker niet minder van het programma profiteerden dan die uit het hoge rekennivo.

Een belangrijke konklusie uit het kwalitatieve onderzoek is dat wij in ons programma blijkbaar toch nog niet zorgvuldig genoeg de overgang van het konkrete naar het abstrakte hebben gemaakt: bij het op verschillende wijzen weergeven van een konkreet aangeboden situatie bleef een aantal kinderen nog sterk gebonden aan de konkrete 'afbeelding'; het is dan ook aan te raden om bij een volgend onderzoek de overgang van konkreet naar abstrakt wat gedetailleerder uit te werken (bijvoorbeeld met behulp van een Gal'perin-procedure). Een tegenvaller bij de kwalitatieve analyse was ook dat sommige kinderen niet in staat bleken een deel te definiëren in termen van het geheel en de andere delen; daarbij was het echter wel zo dat vrijwel al deze kinderen het met enige hulp wèl aankonden. Een mogelijke faktor kan hier ook de betrekkelijk korte tijd zijn waarin wij het programma hebben afgewerkt (het programma van Mikulina, waarin praktisch dezelfde stof wordt aangeboden, duurt ongeveer vijf keer zo lang).

Wij menen dat de meest 'kritische' toets, de toets op de verschilskores, het best als de definitieve toetsing van de door ons bestudeerde effekten kan worden beschouwd. Aangezien deze toetsing resultaten opleverde die, hoewel zij duidelijk in de richting van onze vermoedens wezen, niet signifikant waren, mogen wij niet stellen dat de verschillen tussen de kondities A, B en C statistisch aangetoond zijn. Tendenties in de door ons vermoede richting zijn echter zo sterk aanwezig dat verder onderzoek, maar dan met grotere onderzoeksgroepen, zeker aanbeveling verdient; bovendien zal zich het onderzoek dan over een langere tijdsperiode moeten uitstrekken.

Literatuur

Assink, E. M. H. en N. Verloop, *Het aanleren van deel-geheel relaties als bijdrage tot de mathematisering van het aanvankelijk rekenen,* onderzoeksverslag Psychologisch Laboratorium/IPAW, vakgroep Onderwijskunde, R.U. Utrecht, 1976.

Bodanskij, F. G., Het ontwikkelen van een algebraïsche oplossingsmethode voor redaktieopgaven voor onderbouw-leerlingen, (vert., interne publ. IPAW), in: V. V. Davydov (Ed.), *De psychologische mogelijkheden van leerlingen van de basisschool bij het leren van wiskunde.* Moskou, 1969 (Russ.).

Bos, J. G., Rekenen en algebra op de lagere school, *Pedagogische Studiën,* 1936 (17) pp. 97-111 en 146-160.

Bruggen, J. C. v., *Leerpsychologische vergelijkingen.* I.O.W.O., Utrecht, 1976.

Campbell, D. T. en J. C. Stanley, Experimental and quasi-experimental designs for research on teaching, in: N. L. Gage (Ed.), *Handbook of research on teaching.* Chicago, 1963.

Davydov, V. V., De introduktie van het begrip grootheid in de eerste klas van de basisschool, (Russ.), Moskou, 1966, (vert. in: C. F. v. Parreren en J. A. M. Carpay, *Sovjetpsychologen aan het woord.* Groningen, 1972).

Frijda, N. H. en J. J. Elshout, Probleemoplossen en denken, in: J. A. Michon, E. G. J. Eijkman en L. F. W. de Klerk (Eds.), *Handboek der psychonomie.* Deventer, 1975.

Geissler, E., Zur Behandlung von Text- und Sachaufgaben im Mathematikunterricht der Unterstufe, *Die Unterstufe,* Heft 12, 1969, pp. 23-34.

Kobes, H., Bedingungen und Verlauf beim Lösen mathematischer Textaufgaben, *Pädagogik,* Beiheft 3, 1975.

Koster, K. B., *De ontwikkeling van het getalbegrip op de kleuterschool,* (Diss.), Utrecht, 1975.

Lompscher, J. (Ed.), *Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten.* Berlijn, 1975.

Lompscher, J. (Ed.), *Psychologie des Lernens in der Unterstufe.* Berlijn, 1975a.

McNemar, Q., *Psychological statistics.* New York, 1969.

Mikulina, G. G., Psychologische mogelijkheden voor het oplossen van opgaven met lettergegevens, (vert., interne publ. IPAW), in: V. V. Davydov (Ed.), *De psychologische mogelijkheden van leerlingen van de basisschool bij het leren van wiskunde.* Moskou, 1969 (Russ.).

Minskaja, G. I., De vorming van het getalbegrip, gebaseerd op het leren van relaties tussen grootheden, (vert. in: J. Nelissen en C. F. v. Parreren (Eds.), Teksten en analyses Sovjet-psychologie 2: Rekenen. Groningen, 1977), in: D. B. El'konin en V. V. Davydov (Eds.), *Kennisverwerving in de ontwikkeling van het kind.* Moskou, 1966 (Russ.).

Neale, J. M. en R. M. Liebert, *Science and behavior.* Englewood Cliffs, 1973.

Nelissen, J. en C. F. v. Parreren (Eds.), *Teksten en analyses Sovjet-psychologie 2: Rekenen.* Groningen, 1977.

Parreren, C. F. v., 'Leren denken' anno 1975, *Pedagogische Studiën, 1975 (52) pp. 363-369.*

Parreren, C. F. v. en J. A. M. Carpay, *Sovjetpsychologen aan het woord.* Groningen, 1972.

Stahl, R., Das Lernen im Mathematikunterricht, in: J. Lompscher (Ed.), *Psychologie des Lernens in der Unterstufe.* Berlijn, 1975a.

Steinhöfel, W., c.s., Einige Probleme bei der Behandlung von Sach- und Anwendungsaufgaben in den Klassen 5 und 6, *Mathematik in der Schule,* 1975, nr. 1.

Travers, R. M. W. (Ed.), *Second handbook of research on teaching.* Chicago, 1973.

Treffers, A., *De kiekkas van Wiskobas; beschouwingen over uitgangspunten en doelstellingen van het aanvangs- en vervolgonderwijs in de wiskunde.* I.O.W.O.-leerplanpublikaties Wiskobas, nr. 1, Utrecht, 1975.

Wolters, M. A. D., Ph. Kohnstamm en L. S. Vygotskij over de relatie: kognitieve ontwikkeling en onderwijs, *Pedagogische Studiën,* 1976 (53) pp. 126-131.

Wolters, M. A. D., *Projekt redaktiesommen; interimrapport III.* Utrecht, 1976a.

Wolters, M. A. D., *De redaktieopgave, de oplossingsmethode en de kognitieve ontwikkeling van de leerlingen van de basisschool,* (interne publ. IPAW), Utrecht, 1976b.

Curricula vitae

E. M. H. Assink (geb. 1944) was na de onderwijzersopleiding (1965) vijf jaar werkzaam in de praktijk van het basis- en MAVO-onderwijs; begon in 1971 de studie psychologie aan de Rijksuniversiteit te Utrecht; hoofdrichting funktieleer (onderwijsproceskunde). Hoopt deze studie medio 1977 te voltooien. Interesses liggen op het terrein van onderwijsleerpsychologie en leergangontwikkeling.
Adres: Agavedreef 25, Utrecht.

N. Verloop (geb. 1949) was na zijn onderwijzersopleiding (1970) werkzaam in het basisonderwijs. Startte in 1972 zijn studie pedagogiek (hoofdrichting onderwijskunde, specialisatie curriculumontwikkeling) aan de Rijksuniversiteit te Utrecht. Hoopt deze studie eind 1977 te voltooien. Is met name geïnteresseerd in onderzoeks- en evaluatieproblematiek van het onderwijs.
Adres: Frans Halsstraat 22B, Utrecht.