Mathematische problemen, oplossingsmethoden en de kognitieve ontwikkeling van de leerlingen van de basisschool[1]

MIRIAM A. D. WOLTERS
I.P.A.W., Vakgroep i.o. Ontwikkelingspsychologie, Rijksuniversiteit te Utrecht

Samenvatting

In de jaren '30 is zowel in Nederland (o.l.v. Ph. Kohnstamm) als in de Sovjetunie een hevige strijd geweest over het nut van rekenkundige c.q. algebraïsche oplossingsmethoden voor redactieopgaven op de basisschool. Uit een onderzoek van Mascini (1976) blijkt dat leerlingen van de basisschool over het algemeen nog steeds rekenkundige oplossingsmethoden onderwezen worden. D.w.z. sinds de jaren '30 is er wat betreft oplossingsmethoden in het redactierekenen in Nederland vrijwel niets veranderd.

In dit artikel willen we nagaan of de redenen voor het vasthouden aan deze traditionele aanpak terecht zijn.

Daartoe hebben we de argumenten die gehanteerd zijn in de discussies in de '30-er jaren zowel in Nederland als in de Sovjetunie geanalyseerd. Vervolgens hebben we een logische en een psychologische analyse gegeven van zowel een rekenkundige als een algebraïsche oplossingsmethode voor redactie-opgaven. Nadat we op deze wijze wat meer inzicht hebben gekregen in de oplossingsmethoden zelf en de argumenten voor het hanteren hiervan, zijn we met dit in ons achterhoofd nog eens gaan kijken naar de situatie op de basisschool van nu.

De conclusie luidt dan: het opstellen van vergelijkingen moet vanaf het begin ingevoerd worden als een zelfstandige en algemene oplossingsmethode voor redactieopgaven. D.w.z. leerlingen moeten leren grootheden uit de opgave te abstraheren, deze te vergelijken en de genoteerde vergelijking als basis voor verdere handelingen te laten dienen.

1. *Inleiding*

Ph. Kohnstamm heeft zich in de dertiger jaren met de relatie tussen kognitieve ontwikkeling en onderwijs bezig gehouden en wel met name m.b.t. het onderwijs in oplossingsmethoden voor mathematische problemen op de basisschool. Hij richtte zich daarbij op die mathematische problemen die op de basisschool beter bekend zijn onder de naam redaktieopgaven. Kohnstamm onderscheidt twee typen oplossingsmethoden: de rekenkundige en de algebraïsche. In de algebraïsche methode wordt aan de hand van de opgave een vergelijking opgesteld en opgelost. In de rekenkundige oplossingsmethode* wordt de opgave 'al redenerend' opgelost. Dit heeft volgens Kohnstamm geleid tot het ontstaan van een groot aantal schijnbaar verschillende redeneringen voor diverse typen opgaven. (In 3.2. wordt aan de hand van een opgave een voorbeeld gegeven van een rekenkundige en een algebraïsche oplossingsmethode). Bij het analyseren van het werk van Kohnstamm was een van de belangrijkste problemen waar we op stuitten het ontbreken van een definitie van het begrip rekenkundige oplossingsmethode. En dit werd des te belangrijker omdat in de diskussie die over het nut van rekenkundige resp. algebraïsche oplossingsmethoden gevoerd werd, een belangrijke stelling van Kohnstamm was: het hanteren van een rekenkundige oplossingsmethode draagt niet of nauwelijks bij tot de kognitieve ontwikkeling van de leerlingen. Men kan zich afvragen of dit probleem in de 70'er jaren nog aktueel is. We kunnen hier volmondig 'ja' op antwoorden. Recentelijk is door Mascini (1976) n.a.v. het werk van Kohnstamm een onderzoek gedaan waarbij de konklusie luidde: oplossingsmethoden die op de Nederlandse basisschool onderwezen worden voor het oplossen van redaktieopgaven zijn over het algemeen rekenkundig van aard.

Dit was voor ons een reden te meer om deze zaak opnieuw te bekijken. In dit artikel willen we dan ook uitgebreid verslag doen van de diskussie over de waarde van de twee typen oplossingsmethoden die gevoerd is zowel in Nederland als in de Sovjetunie. Centraal in de diskussie stond de vraag naar de relatie tussen het hanteren van de oplossingsmetho-

* Met oplossingsmethode wordt in dit artikel de volledige oplossingsweg bedoeld.

 PEDAGOGISCHE STUDIËN 1977 (54) 298–306

den en de kognitieve ontwikkeling van de leerlingen. Om het artikel overzichtelijk te houden wordt de weergave van de diskussie (2.3.) voorafgegaan door 2.1. Aanleiding tot de diskussie, en 2.2. Analyse van de argumenten gehanteerd in de diskussie.

Vervolgens zullen we de begrippen rekenkundige resp. algebraïsche oplossingsmethoden definiëren middels een logische en een psychologische analyse (3.1. en 3.2.). Gegevens hierover zijn hoofdzakelijk afkomstig van Bodanskij (1969). Het geheel wordt afgesloten met een hoofdstuk getiteld: Oplossingsmethoden in het basisonderwijs. In dat hoofdstuk wordt een poging gedaan om met behulp van de diskussie-argumenten en de analyses te komen tot een verklaring voor het hoe en het waarom van het hanteren van de resp. oplossingsmethoden in de hedendaagse onderwijspraktijk.

2. *Diskussie over het nut van een rekenkundige resp. algebraïsche oplossingsmethode*

2.1. *Aanleiding tot de diskussie*

In Nederland is de diskussie over het al of niet gebruiken van de algebraïsche oplossingsmethode in de dertiger jaren op gang gekomen door artikel 6 van het rapport Bolkestein.

Ph. Kohnstamm zegt hierover:

'Het concept K.B. in het rapport Bolkestein in Art. 6 onder Rekenen bij het eerste onderzoek (het geschiktheidsonderzoek) bepaalt, dat het gebruik maken van de in de wiskunde gangbare of soortgelijke afkortingen en verkorte schrijfwijzen is toegestaan voorzover de voorgelegde tekst aanleiding geeft tot het gebruik ervan. Men zal dus òf moeten afzien van het opgeven van sommen, die aanleiding geven tot het invoeren van lettergetallen ('onbekenden') òf moeten toestaan, dat de candidaten het kind bij de naam noemen, d.w.z. het gezochte getal voorshands met een letter aanduiden.' (1934, p. 389).

Behalve artikel 6 uit het rapport Bolkestein speelden ook de resultaten van het onderzoek van Nathans (1933) mee in de diskussies. Nathans vond een duidelijke negatieve korrelatie tussen de rekenprestaties van leerlingen op de lagere school en de wiskundeprestaties van diezelfde leerlingen in de eerste klas van het V.H.M.O.

Een en ander is volgens Kohnstamm te wijten aan het feit dat op de lagere school rekenkundige oplossingsmethoden onderwezen worden in plaats van algebraïsche.

Langzamerhand gaat de diskussie zich dan ook richten op de vraag: is een algebraïsche propedeuse op de lagere school toelaatbaar ja of nee?

In de Sovjetunie is de diskussie op gang gebracht door de vraag die met name vanuit de didaktiek gesteld werd: wat is de relatie tussen een rekenkundige en een algebraïsche oplossingsmethode?

2.2. *Analyse van de argumenten*

Opvallend is, dat de argumenten die gebruikt worden om het voor of tegen van een algebraïsche resp. rekenkundige oplossingsmethode aan te geven, hoofdzakelijk afkomstig zijn uit ontwikkelingspsychologische theorieën. De argumenten worden dan met name gehaald uit dat deel van de ontwikkelingspsychologie, dat we tegenwoordig de kognitieve ontwikkelingspsychologie noemen.

De eerste groep argumenten voor het hanteren van een rekenkundige oplossingsmethode heeft te maken met het ontwikkelen van 'schranderheid' bij de leerlingen of wel van het logisch denken of van intellektuele kapaciteiten. De rekenkundige oplossingsmethode werd ook wel gezien als een hulpmiddel voor het 'leren denken'. In onze huidige terminologie zouden we dit alles samenvatten in de vraag: kan een rekenkundige oplossingsmethode een bijdrage leveren aan de kognitieve ontwikkeling van de leerlingen?

De tweede groep argumenten heeft te maken met theoretische inzichten over het ontwikkelingsverloop van het abstrakte denken of ruimer geformuleerd het kognitieve ontwikkelingsverloop.

In dit verband worden de opvattingen van P. P. Blonskij aangehaald. Blonskij publiceerde in de jaren '20–'30 en zijn ideeën zijn tegenwoordig, althans in de Sovejetunie, totaal achterhaald. Toch zullen we om de diskussie te kunnen volgen hier in het kort de opvattingen van Blonskij weergeven. Volgens Blonskij kan een 10-jarig kind alleen konkreet denken; het oriënteert zich op de aanschouwelijke kenmerken van objekten en is daarom ook niet in staat in een afgesproken teken, een 'getal in het algemeen' of een 'willekeurig getal' te zien. Immers anders dan de getallen 2,3, 5 etc. kan het zich een 'willekeurig getal' niet aanschouwelijk voorstellen.

De 7–10-jarige leerling bevindt zich volgens Blonskij op het eerste abstraktieniveau, d.w.z. hij is in staat om kwalitatieve eigenschappen van *objekten* te abstraheren. Pas in de 4e en 5e klas, als de leerlingen gaan rekenen met breuken, zijn ze op het tweede abstraktieniveau; d.w.z. zij zijn nu in staat tot abstraktie van kwantitatieve relaties, maar ze rekenen nog steeds met empirische getallen en empirische relaties. Als de leerling ± 13 jaar is en kennis maakt met algebra, is hij op het derde abstraktieniveau. De leerling gaat nu werken met letters, die staan voor willekeurige getallen d.z. arbitraire getallen en geen empirische. Op het derde abstraktieniveau kan de leerling pas in eigenlijke zin abstrakt denken. Het denken kan nu gebeuren zonder hulp van empirische getallen. Nu, zegt Blonskij, werken we in de rekenkunde en ook in de rekenkundige oplossingsmethode met specifieke *empirische* getallen. In de algebra, en ook in de algebraïsche oplossingsmethode, werken we met letters die staan voor *arbitraire* getallen. Bij het opstellen en oplossen van een vergelijking, hetgeen kenmerkend is voor een algebraïsche oplossingsmethode, wordt een onbekende grootheid geïntroduceerd, door een letter aangeduid, en als arbitrair getal bedoeld. En zoals boven gezegd is, is een leerling die het derde abstraktieniveau nog niet heeft bereikt, hiertoe niet in staat. Tot zover de opvattingen van Blonskij.

Volgens Menčinskaja en Moro (1965) is een veel vroegere introduktie van elementen uit de algebra mogelijk. En juist naar aanleiding van de onderzoekingen van Menčinskaja en Moro is men zich gaan afvragen of de aard, volgorde en tijdstip van de abstraktieniveaus zoals die door Blonskij werden aangegeven, nog wel juist zijn. Davydov (1966) met name heeft zijn opvattingen in deze duidelijk geformuleerd. Volgens hem kunnen lettersymbolen geïntroduceerd worden als middel voor het weergeven van relaties tussen grootheden, nog vóór de introduktie van het getal (b.v. het weergeven van gelijkheden zoals $a = b$ en ongelijkheden van het type $a > b$ en $a < b$ en het beschrijven van enkele van hun eigenschappen, zoals b.v. de symmetrie van de = relatie door 'als $a = b$ dan is $b = a$').

Deze opvatting heeft duidelijke konsekwenties voor de relatie cijfer- en lettersymboliek in de eerste fase van het wiskundeonderwijs. Wel blijft de vraag liggen, welke de rol en de plaats is van gegevens in de vorm van letters bij het oplossen van redaktieopgaven.

Moeten de letters werkelijk pas na systematische oefeningen met cijfergegevens geïntroduceerd worden als een andere aanduiding (zoals Menčinskaja en Moro voorstellen), of is het in sommige gevallen mogelijk dat het werken met letters als gegevens vooraf kan gaan aan het werken met cijfers als gegevens en dat dit weer als basis kan dienen voor het onderwijs in het oplossen van redaktieopgaven? (Zie ook Freudenthal 1974, p. 394 en 395).

2.3. *Diskussie*

De diskussie in Nederland speelde zich, evenals in de Sovjetunie af in de jaren '30, maar daar is de diskussie weer opgepakt in de jaren '60. Bij de weergave van de diskussie in dit hoofdstuk zal zoveel mogelijk rekening gehouden worden met de indeling van de argumenten in 2.2.2. Dat niet altijd de beide groepen argumenten volledig gescheiden naar voren kunnen komen, zal duidelijk zijn.

Levert een rekenkundige oplossingsmethode een bijdrage aan de kognitieve ontwikkeling?

Min of meer bevestigend antwoorden de aanhangers van de vaste tradities in het schoolwiskundeonderwijs in de Sovjetunie: het puur rekenkundig oplossen van vraagstukken, die op lineaire vergelijkingen stoelen, ontwikkelt het logisch denken van de leerlingen.

Gnedenko reageert hierop als volgt:

'Op mij werkt dit argument ongeveer als de verzekering, dat het leren van de Talmoed bij leerlingen de exactheid van de logische analyse zou bevorderen. Tot op zekere hoogte is zulk een verzekering juist, maar er zal nauwelijks iemand zo'n argument als voldoende beschouwen, om de Talmoed op de middelbare school als speciaal vak in te voeren'. (1962, p. 32. Zie ook Freudenthal 1974, p. 393).

Ook de Sovjet-wiskundige en pedagoog A. Ja. Chinčin reageert nogal fel op het hanteren van een rekenkundige oplossingsmethode als middel om intellektuele kapaciteiten te ontwikkelen:

'Ik ben er absoluut zeker van dat vrijwel alle rekenkundige opgaven, die de grenzen van het simpele cijferwerk overschrijden, hetzelfde karakter hebben; het zijn geheel algebraïsche opgaven, die stoelen op het opstellen van lineaire vergelijkingen of systemen van lineaire vergelijkingen. Natuurlijk, als men wil, mag men altijd voor de prijs van smakeloze kunstjes en duistere methoden de hele noodzakelijke algebraïsche analyse van het vraagstuk in woorden vertalen zonder formules en letteraanduidingen . . . maar ik hoop dat ik niet alleen sta in mijn grondige afkeer van dit soort 'rekenkundige' oplossingen. Waarvoor dient dit? Welk 'opnemingsvermogen', welke algemeen waardevolle intellektuele bekwaamheden kan men bij het kind ontwikkelen, als men het dwingt tot zulke onnatuurlijke, instinktief afstotende oefeningen? In de agebra in de 7e klas, leert men dergelijke vraagstukken gemakkelijk, haast mechanisch op te lossen.

Het is net, alsof men soldaten in het eerste dienstjaar met geweren van, zeg maar, vóór Peter de Grote, zou laten oefenen, om hun pas later een modern model in handen te geven.'

(Chinčin, 1963, p. 167. Zie ook Freudenthal 1974, p. 393 en 394).

Een manier om na te gaan of een rekenkundige oplossingsmethode inderdaad bijdraagt tot de kognitieve ontwikkeling is de leerlingen nieuwe, nietstereotiepe redaktieopgaven te laten oplossen. Een positief resultaat zou dan de voorstanders van een rekenkundige oplossingsmethode m.b.t. dit argument gelijk geven.

Wat zijn de feiten?

A. V. Skripčenko merkt na een onderzoek naar de effektiviteit van het onderwijs in rekenkundige oplossingsmethoden op:

'. . . dat veel leerlingen niet zelfstandig nieuwe opgaven kunnen oplossen, dat hun capaciteiten bepaald worden door het vermogen zich oplossingsmethoden voor stereotiepe redactieopgaven te herinneren. Een opgave, die 'niet onder de bij de leerlingen bekende typen' valt, kunnen ze niet oplossen. Bijgevolg wordt bij nieuwe opgaven niet het zelfstandig vinden van de oplossingsmethode, maar het zich herinneren en reproduceren hiervan de hoofdzaak'. (1963, p. 85).

Skripčenko wijst ook op het feit, dat de leerlingen van de hogere klassen de eerder geleerde rekenkundige oplossingen vergeten en ze niet meer kunnen gebruiken. Chinčin schrijft aan het eind van de dertiger jaren:

'Ik moest eens bij goede onderwijzers van vijfde klassen informeren, hoeveel procent van de leerlingen feitelijk die rekenkundige opgaven leren op te lossen, die boven eenvoudige rekensommen uitgaan, d.w.z., die opgaven waarbij de oplossingsmethode, hoe eenvoudig ook, door de leerlingen zelf gevonden moet worden. Van alle ondervraagde onderwijzers antwoordde er één, dat ± 15% daarin slaagt: alle anderen zeiden, dat slechts enkelen deze kunst verwerven; sommigen verklaarden zelfs, dat het 'onmogelijk was deze kunst in het algemeen te onderwijzen'. Natuurlijk kan de leerling, wanneer hij een hele reeks gelijksoortige opgqven gemaakt heeft, zonder moeite een opgave van precies hetzelfde type oplossen (en dit verklaart waarom repetities en examens geen volledige fiasco's zijn); maar dat de leerling zelfstandig de oplossing van een nieuwe opgave vond – hoe eenvoudig ook – dit is iets wat volgens het unanieme oordeel van de onderwijzers alleen bij uitzondering kan worden bereikt'. (1963, p. 161–162. Zie ook Freudenthal 1974, p. 394).

Met andere woorden, de werkelijke schoolpraktijk levert d.m.v. het onderwijzen van rekenkundige oplossingsmethoden niet die schrandere leerlingen op, die de voorstanders van deze methoden veronderstellen.

In Nederland merkt Kohnstamm m.b.t. dit argument op:

'En dat deze sommen, of liever hun kunstmatige oplossingswijzen, systematisch niet als de geschikte hulpmiddelen voor het 'leren denken' mogen worden beschouwd, blijkt reeds daaruit, dat die velerlei oplossingsmethoden zelf zo weinig werkelijk logisch, zo weinig doordacht zijn.

Neem bijv. een som als deze: Piet, Jan en Klaas knikkeren. Jan en Klaas hebben op een bepaald ogenblik 7 maal zo veel knikkers als Piet. Klaas heeft 1 4/5 zoveel als Jan. Piet heeft 12 minder dan Jan. Hoeveel heeft elk?

Nu leert de 'rekenkunde' dat men moet gaan 'stellen', maar zo dat men vooral niet 'stelkundig' stelt. Stel Jan heeft 5 knikkers dan heeft Klaas er 9, samen veertien, dus Piet 2. Dan zou Piet echter slechts 3 minder hebben dan Jan. *Dus* (!) moet Klaas 36, Jan 20 en Piet 8 knikkers hebben.

Naar een heel ander recept dient echter gewerkt te worden als gegeven is, in stede van Klaas heeft 1 4/5 zoveel als Jan, dat Klaas 16 meer heeft dan Jan. Dan kan men niet meer 'stellen', want dan loopt men vast. Stel Jan heeft 6 knikkers, dan heeft Klaas er 22, dus Piet 4. Maar nu gaat de regel niet door.

Waarom niet? Dat kan alleen duidelijk gemaakt worden aan iemand die de bouw van een stel van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden volkomen doorziet. Maar het recept luidt nu, dat ik het totaal der knikkers moet uitdrukken in dat van één der spelers.

Jan en Klaas hebben 7 maal zoveel knikkers als Piet; Jan, Piet en Klaas hebben dus 8 maal zoveel knikkers als Piet. Jan heeft 12 knikkers meer dan Piet. Klaas nog 16 meer dus 28 knikkers meer dan Piet. Met zijn drieën hebben ze dus 3 maal zoveel als Piet en daarbij nog 40 knikkers. Ook hebben ze 8 maal Piets knikkers. 5 maal Piets knikkers is dus 40 knikkers. Het moet voor ieder onbevooroordeelde duidelijk zijn, dat hier in wezen niets anders geschiedt dan in een lange omhaal van woorden neer te schrijven, wat de wiskundige kort en kernachtig, met vermijding van iedere overtolligheid aldus uitdrukt.

$J + K = 7P \quad K = J + 16 \quad P = J - 12$, dus

$$J + (J + 16) = 7(J - 12) = 7J - 84$$
$$5J = 100$$
$$J = 20$$

Behalve door haar kortheid en nauwkeurigheid onderscheidt zich deze notatie ook door haar toepasselijkheid in *alle* gevallen, waarover onze rekenboekjes handelen.

Welke logische vorming kan er nu in schuilen, dat men de blik van het kind niet op deze algemeenheid richt, maar het verwart door een onoverzichtelijke veelheid van 'oplossingsmethoden' terwijl één overal toereikend is?' (Kohnstamm 1934, p. 386 en 387).

Op het argument dat *vanuit kognitief-ontwikkelingspsychologische opvattingen het onderwijzen van een algebraïsche oplossingsmethode minder geschikt zou zijn,* wordt met name in Nederland uitgebreid ingegaan.

Eerst echter de opvatting van de Franse wiskundige J. Dieudonné, aangehaald door F. G. Bodanskij in Dadvydov (1969).

Over de rekenkundige vorm van het oplossen van redaktieopgaven die volgens hem al aan de Babyloniërs bekend waren en tegenwoordig verouderd zijn, schrijft Dieudonné:

'Wanneer het juist is, dat een kind van 10 jaar niet in staat is, het mechanisme van lineaire vergelijkingen met één onbekende te begrijpen, laat het dan een paar jaar wachten, maar stamp hem niet een boel nutteloze vormen in.'

In Nederland deed J. G. Bos zich kennen als een voorstander van een rekenkundige oplossingsmethode. Hij stelt:

'Dat het *gerede schema* van wiskundige symbolen voor den wiskundige, ook zelfs voor den kleinen wiskundige van de l.s. op het eerste gezicht doorzichtiger is dan de beredeneerde oplossing is niet te ontkennen, maar als weergave van *het bezig zijnde denken* is de klemmende waarheidskracht van klinkklare logica niet minder sterk dan het wiskundig schema, dat in zijn afgetrokkenheid iets mist van het onmiddellijk verband met de werkelijkheid; en bij de waardering van deze materie moeten we trachten het *kinderlijk* denken zoveel mogelijk te benaderen, en tot zijn recht te laten komen.' (1936, p. 147).

Mocht nu toch ondanks deze argumentatie een algebraïsche propedeuse ingevoerd worden (volgens artikel 6 van het rapport Bolkestein) dan zal volgens Kohnstamm een grote groep in Nederland zeggen:

'dat de l.s. het werken met de verkorte schrijfwijze ook wel spoedig zal mechaniseren.' (Kohnstamm 1934, p. 398).

Het antwoord van Kohnstamm is dan:

'Laat ze dat gerust doen. Het *denken* zit nl. in het opstellen der juiste vergelijkingen en vertalen der uitkomst in 'gewone' taal, en beide *kan* bij een enigszins ingewikkeld probleem (...) niet gemechaniseerd worden. Maar de *bewerking* dier vergelijkingen mogen de leerlingen gerust zuiver mechanisch paraat hebben, evenals de methode van een lange staartdeling. Zij mogen de symbolen dier bewerking precies evengoed voor zich 'laten denken' als de Arabische cijfers, daartoe zijn die symbolen immers juist uitgevonden. Dan kan het denken zich op belangrijker zaken instellen. Mits de abstractie voldoende aanschouwelijk gepresenteerd was en weer ter verificatie aanschouwelijk vervuld kan worden.' (1934, p. 389).

Over het abstrakte denken en het oriënteren op aanschouwelijke kenmerken schrijft Kohnstamm:

'Op den weg naar het abstracte denken, de zuivere categorische ordening, blijven zij halverwege steken. Wanneer Gij op de vraag: Als een ei 7 cent kost, wat kosten dan 4000 eieeren? het antwoord geeft: 7 x 4000 = 28000 cent, zullen tal van overigens geenszins 'vermethodiekte' onderwijzers u zeggen, dat dit antwoord *fout* is. Waarom? Omdat men niet tot werkelijke abstractie is gekomen of wil komen, omdat het 'benoemde' complex 7-cent een ongebroken eenheid moet blijven vormen, zodat het moet heeten 4000 x 7 cent = 28000 cent, al is het voor het abstracte denken het aantal en zijn opbouw uit factoren volkomen onafhankelijk van de soort der 'eenheden', en juist voor het product de commutatieve eigenschap essentieel. Het kind, dat intuïtief grijpen wil naar het hulpmiddel van de abstractie, dat onbewust ook gebruik wil maken van de psychologische waarheid, dat een product met één 'kleinen' factor gemakkelijker gehanteerd wordt als deze voorop staat dan wanneer hij volgt, voelt zich door deze correctie gefixeerd in de aanschouwelijke Schicht of die van het schema, het durft niet opklimmen naar de abstractie, omdat zijn leermeester dien weg verbiedt om voor het kind onbegrijpelijke motieven. (. . .)

Typisch vooral komt dit verzet tegen abstractie uit bij de groote groep van sommen, die wij zeer ten onrechte als 'denksommen' plegen aan te duiden. (Als voorbeeld wordt genoemd): Een vader is nu 3 maal zoo oud als zijn beide kinderen te samen. Over 20 jaar is de vader even oud als zijn beide kinderen te samen. De kinderen verschillen 4 jaar in leeftijd. Hoe oud is elk nu? Ik weet niet of er velen onder u zijn, die sommen van dit slag nog kunnen oplossen, wel te verstaan onder de nevenconditie, die ons L.O. eraan verbindt, dat 'algebraïsche oplossing' verboden is. Zo ja, dan wil ik hen die het kunnen gaarne gelukwenschen met een goed *geheugen*, waardoor de speciale truc voor een som van dit 'type' wellicht naast tal van andere 'modellen' zoo lang in zijn bijzonderheid is bewaard gebleven. (. . .) Het behoeft waarlijk geen verwondering te wekken, dat de kinderen, die zich het ijverigst betoond hebben in het van buiten leren dier semi-abstracte cliché's en daarvoor met zeer hooge cijfers voor rekenen werden beloond, nogal eens moeite hebben als de wiskundeles hen nu tot volledige abstractie wil dwingen, noch omgekeerd dat zij, die werkelijk mathematischen aanleg bezitten op slechteren voet blijven verkeeren met deze halfslachtigheid, waarvan zij de ontoereikendheid vermoeden, zonder haar te doorzien'. (1932, p. 11 en 12).

Niet alleen bovenstaand citaat, maar ook het volgende laat zien hoe verwrongen het onderwijs in het redaktierekenen kan worden als strikt de hand gehouden wordt aan traditioneel ontwikkelingspsychologische opvattingen.

'Instede van het kind de hulp te geven die het behoeft, d.w.z. het te leren zich te bevrijden van de overstelpende veelheid van aanschouwelijke gegevens en het de weg naar abstractie te banen door hulpmiddelen te zijner beschikking te stellen, die de geschiedenis van het denken ons heeft doen vinden, verzwijgt de school hem die middelen niet alleen, maar verbiedt ze hem te gebruiken als gelukkig toeval of hulp van anderen ze hem mochten hebben verschaft (. . .) Het memoriseert eenvoudig de hem voorgedragen 'oplossingen' voor elk der gangbare typen en cliché's; mechanisch wordt op een bepaald type als prikkel een bepaalde bewerking als reactie toegepast. Gaat de som op dan is het bewijs geleverd dat het goede lot uit de bus is getrokken (. . .). Inderdaad, als men deze gang van zaken rustig overweegt, moet men verbaasd zijn, dat het aantal onvoldoenden voor algebra en meetkunde in de eerste klassen (van het V.H.M.O.) niet nog veel hoger is (. . .) en men leert het aanpassingsvermogen der kinderhersenen bewonderen, die ondanks alle pogingen om ze van de wijs te brengen, toch nog voor een belangrijk percentage behoorlijk blijven functioneren.' (Kohnstamm, 1934, p. 382).

Tenslotte zouden we dit nog willen stellen: rekenkundige oplossingsmethoden kunnen wel het denken van de leerlingen ontwikkelen mits de leerlingen steeds *zelf* via probleemanalysemethoden de oplossing vinden. Zoals uit bovenstaande citaten blijkt, gebeurt dit vrijwel nooit, uitzonderingen daar gelaten. Dat dit niet gebeurt, komt waarschijnlijk omdat dit ook verschrikkelijk moeilijk is. Voor de vermoedelijke oorzaken hiervan verwijzen we naar de psychologische analyse (3.2.).

Daarom worden procédé's voor de verschillende typen ingestampt, die de leerlingen in een bepaalde opgave moeten herkennen en toepassen. Een dergelijke oplossingswijze draagt echter niet bij tot de denkontwikkeling.

3. *Een logische en psychologische analyse van een rekenkundige en een algebraïsche oplossingsmethode voor redaktieopgaven*

3.1. De logische analyse

Fridman: (1967) geeft als definitie voor mathematische problemen zoals die in het rekenonderwijs (en ten dele ook in het algebraonderwijs) gebruikelijk zijn: het zijn *verbale modellen* van opgavesituaties, waarin de leerlingen de waarde van een onbekende grootheid moeten vinden. Het fundamentele probleem voor de leerling is nu de oplossingsweg te vinden d.w.z. alle bewerkingen die nodig zijn om de waarde van de onbekende grootheid te vinden. In de opgave staan alle gegevens die nodig zijn voor de oplossing, maar de bewerkingen die ermee uitgevoerd moeten worden zijn nog niet bekend.

De rekenkundige oplossingsmethode is nu een methode waarbij de samengestelde opgave ontleend wordt in één of meerdere enkelvoudige opgave(n). De rekenkundige oplossingsmethode richt zich daarom op de analyse van de gegevens en het vinden van de relaties die tussen de grootheden in de enkelvoudige opgaven bestaan.

Met deze analyse, die meestal bestaat uit een plan met vragen, komt men *stapsgewijs* tot de uiteindelijke bepaling van de waarde van de onbekende grootheid. Iedere enkelvoudige opgave kan met *één* rekenkundige bewerking met twee bekende of berekende getallen opgelost worden. Deze analysemethode kan als volgt in schema worden gezet:

$$aO_1b \quad cO_2d \quad \ldots\ldots \, mO_kn$$

De operaties (O) kunnen alleen maar de optel-, aftrek-, vermenigvuldig- of deeloperatie voorstellen.

De moeilijkheid is dat noch de operaties noch de volgorde (de pijlen), noch de komponenten (a, b, c, . . . m, n) bekend zijn (sommige komponenten zijn misschien gegevens van de opgave maar hun plaats is onbekend). Het oplossingsschema begint met alleen maar stippeltjes en hier en daar een grootheid met aan het eind de laatste operatie.

Iedere juiste operatie vermindert het onbekende deel van de reeks met één element. In het schema verschijnen stapsgewijs alle elementen en het krijgt zijn uiteindelijke gedaante.

$$\begin{array}{lll} aO_1b & \ldots & \\ aO_1b & cO_2d & \ldots \\ aO_1b & cO_2d & \ldots mO_kn \end{array}$$

Zodoende kunnen we pas op het eind van de weg na alle grootheden vastgesteld te hebben die in het schema voorkomen, het resultaat van de laatste operatie (mO_kn) opschrijven d.i. de getalswaarde van de onbekende grootheid.

Op deze manier ontstaan er speciale oplossingsmethoden voor speciale *typen* opgaven. Het type wordt gedefinieerd door de oplossingsweg. Een rekenkundige oplossingsmethode kan daarom geen *algemene* methode zijn. En hiermee komen we ook aan het essentiële verschil met de algebraïsche oplossingsmethode, die wèl algemeen is.

Karakteristiek voor de algebraïsche oplossingsmethode is het invoeren van een onbekende met een speciale aanduiding (x) waardoor het mogelijk is de opgave als een *vergelijking* voor te stellen.

Met een vergelijking bedoelen we in dit geval een lineaire vergelijking met één onbekende, die we kunnen weergeven met een formule van het type:
$F_1(a, b, \ldots m, x) = F_2(a, b, \ldots m, x)$*
die verbanden vaststelt tussen de bekenden a, b, c, . . . m en de onbekende grootheid x. Van de grootheid, door x aangeduid, is in de vergelijking niet zijn *konkrete* getalswaarde bekend, maar wel de relatie tot de andere grootheden.

De algebraïsche oplossingsmethode is werkelijk *algemeen* van karakter als bij de analyse van de

* Om het overzichtelijk te houden beperken we ons tot lineaire vergelijkingen met een onbekende. Dat wil niet zeggen dat er geen redaktieopgaven zouden bestaan die berusten op een stelsel hogere graads vergelijkingen met meerdere onbekenden.

opgave *direkt* grootheden in een vergelijking gezet worden. Het oplossingsprobleem kan er dan als volgt uitzien:
F_1 (a, b, . . . m, x) = F_2 (a, b, . . . m, x)
Volgens dit schema moet er een grootheid gevonden worden die op twee manieren, in dit geval als F_1 en als F_2, geschreven kan worden. De relaties tussen de grootheden worden vastgesteld door F_1 aan F_2 gelijk te stellen. De vergelijking is dus nu:
F_1 (a, b, . . . m, x) = F_2 (a, b, . . . m, x).

3.2. *De psychologische analyse*

Zoals al gezegd is, is een van de verschillen tussen een algebraïsche oplossingsmethode en een rekenkundige de invoering van de onbekende grootheid aangeduid door b.v. x.

Alleen die aanduiding al zou kunnen dienen om de vraag gemakkelijker te formuleren. Maar het gaat natuurlijk niet om de invoering van die aanduiding zonder meer. Door invoering van x is het mogelijk bewerkingen hiermee uit te voeren als was het een bekende grootheid. Dus niet alleen het gebruik van vergelijkingen waarin de onbekende grootheid door een letter aangeduid wordt verschilt van de rekenkundige oplossingsmethode, maar ook *de manier* waarop de relaties in schema gebracht worden. De relaties zijn hier niet als een keten van formules voorgesteld waarbij elke schakel met het invoeren van voorafgaande bewerkingen verbonden is en alle schakels nog op het eind samenkomen, maar direkt als vergelijkingsformule waarin alle aanwezige relaties tussen bekende en nog onbekende grootheden zijn vastgelegd.

Ter verduidelijking geven we een voorbeeld van een opgave waarvan dan eerst de rekenkundige oplossing en daarna de algebraïsche oplossing gegeven wordt.

Voorbeeld:

In een vat zitten 850 haringen. De inpakkers vullen eerst 50 bakjes met elk 12 haringen. De rest doen ze in tonnetjes waar 50 haringen in kunnen. Hoeveel tonnetjes vullen ze?*

Rekenkundige oplossing:
$aO_1b \rightarrow cO_2d \rightarrow \ldots . m\,O_kn$
$50 \times 12\ (600) \rightarrow 850 - 600\ (250) \rightarrow 250 : 50$

* We hebben met opzet een opgave gekozen waarvan de algebraïsche, maar ook de rekenkundige oplossingsmethode snel en gemakkelijk te vinden is. Dat dit m.b.t. het vinden van de rekenkundige oplossingsmethode niet voor iedere opgave geldt moge blijken uit het voorbeeld dat Kohnstamm geeft in 2.3.

Algebraïsche oplossing:
F_1 (a, b, . . . m, x) = F_2 (a,b, . . . m, x)
$850 - (50 \times 12) = x \times 50.$

D.w.z. de mentale handelingen van de leerlingen bij het hanteren van een algebraïsche oplossingsmethode zijn in eerste instantie gericht op het *nabije* doel van het vastleggen (middels een vergelijking) van de fundamentele relaties tussen bekende en onbekende grootheden op basis van de tekst van het vraagstuk. Dit is ook het essentiële verschil met de rekenkundige oplossingsmethode, waar de mentale handelingen van de leerlingen direkt gericht moeten zijn op het *verre* doel van het berekenen van de konkrete getalswaarde van de onbekende grootheid.

Bekijken we nu nog eens de schematische weergave van de rekenkundige oplossing bij de voorbeeldopgave. We zien dan dat de uitkomsten van de enkelvoudige opgaven tussen haakjes aangegeven staan. Volgens het logisch schema horen deze uitkomsten niet in het schema thuis; daar staan immers alleen de operaties weergegeven. Toch zijn de uitkomsten van de enkelvoudige opgave(n) nodig om de volgende operatie uit te voeren.

Dit verklaart nu ook waarom een rekenkundige oplossingsmethode zoveel moeilijker is voor de leerlingen dan een algebraïsche. Een rekenkundige oplossingsmethode stelt hogere eisen aan inzicht èn aan planning van de leerling dan een algebraïsche en belast tevens in hogere mate het werkgeheugen van de leerling. Wat gebeurt er nl.: bij het hanteren van een rekenkundige oplossingsmethode wordt iedere stap gezet met het oog op het einddoel (de uitkomst). Achtereenvolgens moet namelijk de hele keten gevonden en gepland worden. De in de keten voorkomende operaties moeten korrekt uitgevoerd worden. Bovendien moet ieder tussenresultaat vastgehouden worden omdat het direkt of later in het oplossingsproces weer nodig is.

Het verschil met de algebraïsche oplossingsmethode is dat de algebraïsche oplossingsmethode in twee onafhankelijke fasen te scheiden is.

In de eerste fase worden de gegevens en het gevraagde in kaart gebracht, d.i. de vergelijking opgesteld. Een fase waarin beslist niet gerekend hoeft te worden maar alleen de relaties tussen bekenden en de onbekende grootheden vastgelegd wordt aan de hand van het lezen van de tekst.

Maar ook het algebraïsch oplossen stelt eisen aan het inzicht van de leerling. Hij moet zich afvragen hoe de vergelijking moet worden opgesteld. Dit alles kan en moet in de bovengenoemde eerste fase geschieden die onafhankelijk van de tweede fase verloopt. En daarmee zijn de denkaktiviteiten tot een moment teruggebracht en het werkgeheugen wordt vrijwel niet belast. Overigens zijn er vaak meerdere vergelijkingen mogelijk bij een opgave. Kijken we nogmaals naar de haringen-opgave. De eerste stap, de keuze van de grootheid die op twee manieren geschreven kan worden ligt niet eenduidig vast. In de voorbeeldopgave hebben we gekozen voor de grootheid 'rest'. Met evenveel recht hadden we voor de grootheid 'totaal' kunnen kiezen en waren dan tot de volgende vergelijking gekomen: $850 = (50 \times 12) + (X \times 50)$.

D.w.z. er zijn meerdere wegen waarop de gegevens en het gevraagde in kaart kunnen worden gebracht, afhankelijk van de gelijk te stellen keuzegrootheid.

De tweede fase in de algebraïsche oplossing, die psychologisch onafhankelijk van de eerste kan geschieden, is de fase waarin de vergelijking opgelost wordt en de konkrete getalswaarde van de onbekende grootheid verkregen en geïnterpreteerd wordt.

Een ander belangrijk psychologisch punt van verschil tussen de twee oplossingsmethoden heeft te maken met het resp. nabije en verre doel van de berekening. Bij een rekenkundige oplossingsmethode blijkt pas aan het eind of gekozen is voor de juiste operaties. Mocht dit niet het geval zijn, dan betekent dat, dat de hele oplossingsweg weer opnieuw afgelegd moet worden inklusief plannings- en geheugenaktiviteiten.

4. *De oplossingsmethoden in het basisonderwijs*

Mascini (1976) heeft aangetoond middels een kwalitatieve en kwantitatieve analyse van de gebruikte oplossingsmethoden, dat deze over het algemeen rekenkundig van aard zijn. In dit hoofdstukje zal daarom ook overwegend de rekenkundige oplossingsmethode aan de orde komen.

Rekenkundige oplossingsmethoden bestaan zoals we gezien hebben, uit een heel skala van oplossingsmethoden voor speciale typen opgaven. Het type wordt gedefinieerd door de oplossingsweg.

De oplossingsweg wordt uit het geheugen opgediept en toegepast zodra een analoge opgave opgelost moet worden. De analyse van de gegevens wordt in zo'n geval beperkt tot het herkennen van het type en het produceren van de oplossingsvolgorde. Het generaliseren van de oplossingsweg bestaat hier uit het vergelijken van een reeks opgaven en in het herkennen van het gemeenschappelijke. Een opgave draagt uiterlijke herkenningstekens, die, als men zich hierop oriënteert, ook zonder een uitvoerige logische analyse tot de oplossing kunnen leiden. Als zodanig dienen verbale verwijzingen naar bepaalde bewerkingen (groter, kleiner enz.), verwijzingen naar opgaven of rubrieken van opgaven ('opgaven met optellen', 'opgaven met twee bewerkingen', 'opgaven waarbij een element uit het linkerlid wordt gevraagd', benamingen van typen van opgaven e.d.).

Zo worden de rekenkundige oplossingsmethoden onderwezen door de leerling de éne redeneervorm na de andere te geven; redeneervormen die er op gericht zijn de samengestelde opgaven in een opeenvolging van enkelvoudige *te ontleden*. Maar deze ontleding kan alleen maar effektief zijn als de leerling *enig idee* heeft van de relaties tussen de enkelvoudige opgaven in een gegeven opgave.

Men zou kunnen veronderstellen dat het onderwijzen van een rekenkundige oplossingsmethode ook inhoudt dat het analyseren van de relaties tussen de enkelvoudige opgaven onderwezen wordt. In feite bevat de methode aanwijzingen voor de leerlingen om voorafgaande aan het opschrijven van de oplossing een *plan* op te stellen. Niet zelden maken de leerlingen zo een plan vrij vlug en nauwkeurig. Meestal houdt dit plan *niet* in dat de relaties tussen de enkelvoudige opgave vastgesteld en gekonkretiseerd worden, maar dat de leerlingen een schema ontwerpen van in volgorde opgestelde vragen en de daarmee korresponderende bewerkingen om op die manier de volgorde van de enkelvoudige opgaven in de samengestelde opgave tot uitdrukking te brengen. De fundamentele relaties worden als het ware buiten beschouwing gelaten. Natuurlijk ontwikkelt zich bij de leerling op de een of andere manier een idee hieromtrent en funktioneert dit ook in hun reële denkaktiviteit, maar het treedt niet naar voren in het onderwijs als iets dat de leerlingen zich eigen moeten maken. Dientengevolge vertonen veel leerlingen lakunes in het abstraheren van de fundamentele relaties om zodoende een algemeen idee te krijgen hoe de oplossing te vinden. Dit betekent niet dat het werk van individuele onderwijzers niet goed zou zijn. Het zijn de *wetmatige* gevolgen van een onderwijsmethode die gericht is op een eenzijdige ontleding van een samengestelde opgave in een successie van enkelvoudige opgaven. Dit is dan ook een van de redenen dat Bodanskij (1969) en ook Davydov de volgende mening zijn toegedaan, een mening die door de schrijfster van dit artikel wordt gedeeld.

Het opstellen van vergelijkingen moet vanaf het begin ingevoerd worden als een zelfstandige en algemene oplossingsmethode voor redaktieopgaven. D.w.z. leerlingen moeten leren, grootheden uit de opgave te abstraheren, deze te vergelijken en de genoteerde vergelijking als basis voor verdere handelingen te laten dienen. En dit alles voordat de onbekende grootheid wordt opgespoord.

Verder bestrijden we niet, dat het *zelfstandig* leren vinden van rekenkundige oplossingsmethoden een positieve bijdrage zou kunnen leveren aan de kognitieve ontwikkeling. In de praktijk zien we echter dat er oplossingen voor typen opgaven ingedrild worden omdat men het gros van de leerlingen, terecht, tot dit zelfstandige vinden niet in staat acht. Ons inziens merkt Kohnstamm geheel juist op dat het reproduceren van ingedrilde oplossingen geen hulpmiddel is voor het leren denken.

Noot

1. Met dank aan prof. dr. C. F. van Parreren en drs. J. Perrenet (wiskundig medewerker van het projekt 'Redaktiesommen') voor het kritisch doorlezen van het manuscript. Van hun commentaar heb ik gaarne gebruik gemaakt.

Literatuur

Blonskij, P. P., *Keuze uit zijn psychologische publikaties*. Moskou 1964 (in het Russisch).

Bodanskij, F. G., *Het leren van een algebraïsche oplossingsmethode voor redactieopgaven door leerlingen van de basisschool*. In: Davydov, 1969, p. 228–281 (in het Russisch).

Bos, J. G., Rekenen en algebra op de lagere school. *Ped. Stud.* 1936, XVII, 146–160.

Chinčin, A. Ja., *Pedagogische publikaties*. Moskou 1963 (in het Russisch).

Davydov, V. V., *Psychologische capaciteiten van leerlingen uit de onderbouw bij het leren van wiskunde*. Moskou, 1969 (in het Russisch).

Freudenthal, H., Soviet research on teaching algebra at the lower grades of the elementary school. In: *Educational studies in mathematics*. 1974, 5, 391–412.

Fridman, L. M., Over het oplossen van redactieopgaven. In: *Voprosy Psichologii*, 1967, no. 2 (in het Russich).

Gnedenko, B. V., De rol van wiskunde voor de ontwikkeling van de techniek en de productie. In: *Matematika v Skole*, 1962, no. 1 (in het Russisch).

Kohnstamm, Ph., *Aanschouwing en abstractie als momenten van 'leeren denken'*. Rede uitgesproken 20 juni 1932.

Kohnstamm, Ph., De aansluiting tussen lager en middelbaar onderwijs. C. Het rekenen. *Ped. Stud.* 1934, XV, 377–399.

Mascini, N. W. J., Oplossingsmethoden in het rekenonderwijs op de basisschool. *Ped. Stud.* 1976, 53, 49–57.

Menčinskaja, N. A. en M. I. Moro, *Didactische en psychologische problemen van het rekenonderwijs in de onderbouw van de basisschool*. Moskou 1965 (in het Russisch).

Nathans, A. D., Aansluiting lagere school en gymnasium. *Ped. Stud.* 1933, XIV, 343–365.

Skripčenko, A. V., Het leren van een algemene oplossingsmethode voor redactieopgaven door leerlingen uit de onderbouw van de basisschool. *Voprosy Psichologii*, 1963, no. 4 (in het Russisch).

Curriculum vitae

Miriam A. D. Wolters na leraressenopleiding N XXI, studie psychologie. Zij legde haar doctoraalexamen psychologie af in 1973 (specialisatierichting leerpsychologie en uitgebreide nevenrichting ontwikkelingspsychologie).

Thans is zij werkzaam als wetenschappelijk medewerker aan de Vakgroep i.o. Ontwikkelingspsychologie van het instituut voor Pedagogische en Andragogische Wetenschappen aan de Rijksuniversiteit te Utrecht en algemeen projektleider van het projekt 'Redaktiesommen' van de vakgroep.
Adres: Maliesingel 23, Utrecht