

Algoritmen en heuristieken in het onderwijs en het programmeren van de denkactiviteiten van leerlingen*

PROF. DR. L. N. LANDA - Universiteit van Moskou

Dit artikel werd door de auteur (in het Russisch) ter beschikking gesteld voor publikatie in een Nederlands tijdschrift.

De vertaling is gemaakt door Drs. J. A. M. Carpay, wetenschappelijk hoofdmedewerker aan het Psychologisch Laboratorium van de Rijksuniversiteit te Utrecht.

Voor andere vertalingen van het werk van Prof. Landa zie de noten aan het einde van dit artikel (no's: 1, 2, 20, 21 en 22).

Hoewel de geprogrammeerde instructie niet rechtstreeks uit de cybernetica is voortgekomen, zijn haar uitgangspunten in wezen cybernetisch. Geprogrammeerde instructie is de cybernetische richting in de didactiek en kan daarom pas werkelijk begrepen worden vanuit de cybernetica.

Zoals bekend, stelt de cybernetica zich als belangrijkste doel het optimaliseren van sturingsprocessen. Object van sturing in het onderwijs zijn de mentale processen (in het bijzonder de denkprocessen van de leerlingen) en hun gedrag. Echter, om bepaalde processen effectief te kunnen sturen, moet men hun bouw, hun structuur kennen.

De cybernetica nu heeft kunnen aantonen uitgaande van het 'black-box'-model (vertaler:

* *Noot vertaler: de vertaling is zo letterlijk mogelijk. Getracht is waar mogelijk de persoonlijke stijl van de auteur te handhaven. De vertaling van typisch Russische psychologische termen is ook zo letterlijk mogelijk, alinea's en cursivering zijn conform het manuscript. De voetnoten uit het manuscript zijn aan het einde van het artikel geplaatst.*

input-output model) dat men bepaalde objecten kan sturen ook zonder dat men kennis heeft van de processen die zich in de 'black-box' voltrekken. Anderzijds is het evident dat we deze processen nog effectiever en met meer zekerheid kunnen sturen naarmate we de processen zelf beter kennen. Dit impliceert dan weer dat men de programma's voor het sturen van deze processen op strikt wetenschappelijke basis moet kunnen opstellen.

Kenmerkend voor de cybernetica is dat zij voor het oplossen van de problemen waarmee zij geconfronteerd wordt, gebruik maakt van exacte methoden en zich daarbij baseert op de wiskunde en de logica. Het toepassen van cybernetische methoden op didactische problemen impliceert derhalve in de eerste plaats een nauwkeurige analyse en beschrijving van de mentale processen en het gedrag die object van sturing zijn.

Gelijk bekend, zijn mentale en met name denkprocessen (in dit artikel zullen wij het voornamelijk over deze laatste hebben) reeds vele honderden en zelfs duizenden jaren object van studie van de psychologie. Echter, de kennis van het denken droeg tot recente datum een hoofdzakelijk geesteswetenschappelijk karakter en er bestonden geen exacte methoden voor de beschrijving en de analyse ervan. Een van de belangrijkste verdiensten van de cybernetica ligt in het feit dat zij de ontwikkeling van exacte methoden voor analyse en beschrijving van denkprocessen heeft gestimuleerd, in het bijzonder de beschrijving met behulp van algoritmen.

Het idee om denkprocessen in termen van algo-

ritmen te beschrijven is niet alleen van belang voor de bouw van machines die analoog aan het menselijk denken werken. De toepassing van algoritmen op het gebied van het leren opent voor de didactiek en met name voor de geprogrammeerde instructie nieuwe en uiterst belangwekkende perspectieven. Men kan stellen dat de toepassing van algoritmen de effectiviteit van het onderwijs wezenlijk en binnen een redelijk korte termijn kan verhogen.

Het eerste werk op het gebied van het leren van algoritmen en, in het algemeen, over het algoritmiseren van leergedrag, verscheen in 1961¹. Sindsdien is er op dit gebied intensief verder gewerkt, zowel in ons land als in het buitenland.² Hoewel onze formulering van het probleem nauw aansluit aan een bewuste toepassing van een cybernetische benadering van leer- en onderwijsvraagstukken, is de probleemstelling zelf toch geheel onafhankelijk van de cybernetica ontstaan, n.l. vanuit de vraag naar oplossingen voor het onderwijspsychologisch en didactisch probleem hoe leerlingen algemene denkmethoden voor het oplossen van vraagstukken bijgebracht moeten worden en hoe de psychologische mechanismen en de structuur van dergelijke algemene denkmethoden geanalyseerd kunnen worden. In concreto waren de hoofdzaken in het onderzoek, dat leidde tot het probleem van het onderwijzen van algoritmen, de volgende³:

Het is een welbekend feit dat er leerlingen zijn die alle theoretische uitgangspunten goed kennen (definities, regels, wetten, stellingen e.d.), maar die vraagstukken slecht of helemaal niet kunnen oplossen. In een dergelijk geval stelt men dikwijls dat de leerlingen hun kennis niet kunnen toepassen, dat zij niet kunnen denken, dat zij geen voorstellingsvermogen hebben, geen inventiviteit, geen inzicht hebben. Maar wat wil dat eigenlijk zeggen: 'zijn kennis niet kunnen toepassen', wat betekent: 'niet kunnen denken', 'geen voorstellingsvermogen, geen inventiviteit, geen inzicht hebben'? Maar al te vaak vragen leraren en onderwijzers zich dat niet eens af. Om iemand te leren hoe hij dan wel tot een inzicht moet komen,

dient men eerst te weten wat er in het hoofd van de betrokken leerling bij het oplossen van het vraagstuk niet 'gewerkt' heeft, wat daar niet heeft plaatsgevonden, welke 'schroefjes' (mechanismen) het bij hem hebben laten 'afweten'. Om die vraag te kunnen beantwoorden, moeten we echter weten welke 'schroefjes' er *moeten* 'werken', en hoe het 'mechanisme'⁴ dat inzicht moet bewerkstelligen behoort te zijn ingericht om te kunnen functioneren. Met andere woorden: we moeten een model ontwikkelen van het psychologisch mechanisme dat voor het juiste verloop van het gegeven denkproces zorg draagt. Slechts wanneer we exact weten hoe het mechanisme *behoort te zijn*, kunnen we onszelf tot taak stellen na te gaan wat er in het mechanisme 'haperde', 'wat er niet gewerkt heeft' en daardoor leidde tot het niet kunnen oplossen van het vraagstuk. Hoe moeten we nu een model van dit mechanisme ontwikkelen? Wat moeten we als de elementen ('details') ervan beschouwen, hoe moeten we de wijzen waarop deze tot elkaar in relatie staan en op elkaar inwerken beschrijven?

Een algemene methode voor het ontwikkelen van een dergelijk model is het ontleden van het denkproces in meer elementaire componenten: kennisinhouden en mentale handelingen (operaties); voorts het opstellen van een hypothese met betrekking tot de vraag welke handelingen men met bepaalde objecten (de gegevens van het vraagstuk) moet uitvoeren om tot de oplossing van het vraagstuk te komen. Een dergelijke hypothese kan men beschouwen als een bepaalde beschrijving van het betreffende denkproces.

Hoe kunnen we nu verifiëren of de hoofdcomponenten (kennisinhouden en handelingen) ook op de juiste wijze zijn onderkend en of het voltrekken van deze handelingen inderdaad tot de oplossing van de betrokken vraagstukken leidt? Anders gezegd: hebben we het denkproces op de juiste wijze beschreven? Het gaat hier immers om handelingen die zich 'in het hoofd voltrekken' (mentale handelingen) en deze zijn niet direct waarneembaar. De belangrijkste methode voor de toetsing van de hypothetische modellen van

denkprocessen, d.w.z. voor de toetsing van de juistheid van de betreffende beschrijvingen, is het op basis van deze beschrijvingen opstellen van voorschriften, wat men moet doen, en hoe men moet handelen om de betreffende vraagstukken op te lossen. Als iemand door het voorschrift te volgen en door de betreffende handelingen te verrichten met succes het vraagstuk (de vraagstukken) kan oplossen, dan wil het zeggen, dat het mechanisme van denkactiviteit adequaat was geanalyseerd en dat we een juist model hebben ontwikkeld. Als het vraagstuk (of: de vraagstukken) niet wordt opgelost, wil dat zeggen dat we bepaalde handelingen niet hebben onderkend, niet expliciet gemaakt hebben en dat we een onjuist model hebben ontwikkeld.

Een procesanalyse van het oplossen van vraagstukken door zwakke leerlingen heeft aangetoond dat deze leerlingen bepaalde vraagstukken slecht of helemaal niet kunnen oplossen, omdat zij niet alle operaties kennen en/of beheersen die uitgevoerd moeten worden om de oplossing te vinden. Zij kennen de stellingen, de regels, de axioma's, d.w.z. de eigenschappen van de meetkundige objecten⁵, maar weten niet wat zij er tijdens het maken van de opgave mee moeten doen, zij kennen de operaties niet die zij ermee moeten uitvoeren om tot het beoogde resultaat te komen. In de school maakt men zich gewoonlijk goed de kennis eigen van de eerste categorie (kennis van de objecten en hun eigenschappen), maar vaak leert men er slecht of helemaal niet de kennis van de tweede categorie (kennis van de handelingen, mentale operaties, methoden van redeneren). Dit komt doordat veel mentale operaties die verricht moeten worden om bepaalde typen vraagstukken op te lossen, ons mensen niet bewust zijn. Niet alleen leerlingen, maar ook leraren en onderwijzers kennen ze niet. In veel gevallen zijn zij ook in de wetenschap onbekend. Mensen die vraagstukken goed leren (of kunnen) oplossen, ontdekken deze operaties vaak door 'trial and error', door een proces van 'adaptatie' aan de objecten. Dit is dan weer de reden dat zij zich van deze operaties niet bewust worden en niet in staat zijn hun kennis hieromtrent op andere

ren over te dragen. De situatie waarvan hier sprake is kan men zich in grote lijnen aldus voorstellen: stel dat men voor het oplossen van een bepaald type vraagstukken twintig operaties moet kunnen uitvoeren: $a_1, a_2, a_3 \dots a_{20}$. Het merendeel van de leerlingen echter, zo wees het experiment uit, beheerst niet al deze operaties, maar slechts een bepaald deel ervan. We kunnen nu begrijpen waarom sommige vraagstukken wel door de leerlingen kunnen worden opgelost en andere niet. Als het vraagstuk het toepassen vereist van operaties die de leerling beheerst, dan kan hij het vraagstuk oplossen, als het gaat om operaties die de leerling niet beheerst, kan hij het niet.

Hét voornaamste doel van het onderzoek waarvan wij hierboven al melding maakten, bestond in het expliciteren van de operaties waaruit het denkproces bij de bewijsvoering in de meetkunde (of wat op hetzelfde neerkomt: het proces van het zoeken naar een bewijs) is opgebouwd. Het doel hiervan was om op grond van de geëxpliciteerde operaties en hun systemen een model te kunnen opstellen en daarna een voorschrift samen te stellen hoe en wat met het vraagstuk gedaan moet worden (welke operaties met de meetkundige objecten, maar ook met de eigen kennis dienen te worden uitgevoerd), om de oplossing te vinden⁶. Dit voorschrift moest gericht zijn op operaties van vrij algemene aard en moest daartoe niet alleen van toepassing zijn op een of ander willekeurig vraagstuk, maar op *verschillende* vraagstukken. Men kan dit voorschrift daarom een algemene (of exacter: een betrekkelijk algemene) oplossingsmethode of methode van redeneren, of een betrekkelijk algemene methode van zoeken van een bewijs noemen. Een dergelijke methode werd uitgewerkt. Laten we als voorbeeld het eerste deel van het voorschrift nemen – de methode die de leerlingen werd geleerd⁷:

1. Bekijk, voor je de opgave gaat maken, eerst wat gegeven is en wat bewezen moet worden; onderscheid duidelijk de gegevens van hetgeen gevraagd wordt of bewezen moet worden.
2. Trek uit hetgeen gegeven is, de meest voor de

hand liggende conclusies.

3. Ga nu over naar wat je moet bewijzen en vraag jezelf af: 'aan welke kenmerken moet datgene voldoen wat bewezen moet worden?'
4. Som de jou bekende kenmerken op, vergelijk ze één voor één met hetgeen gegeven is en met de tekening en ga dan na welk kenmerk je het beste kunt kiezen voor het bewijs.
5. Als je aan de hand van een bepaald kenmerk er niet in slaagt het bewijs te leveren, probeer dan het bewijs te vinden aan de hand van een ander.
6. Isoleer in de tekening die elementen of figuren (bijv. lijnstukken, hoeken) waaromtrent iets bewezen moet worden en vraag jezelf daarbij voortdurend af: 'wat zijn deze elementen ook nog, en wat zouden zij nog meer kunnen zijn?' Ga voor een antwoord op deze vraag na op welke verschillende wijzen de betrokken elementen beschouwd kunnen worden.
Enzovoorts.

Het experimentele deel van het onderzoek was als volgt opgezet. De leerlingen die aan het onderzoek deelnamen kregen eerst als voortoets een serie van twintig vraagstukken voorgelegd waarvan de helft vraagstukken van gemiddelde of iets meer dan gemiddelde moeilijkheidsgraad waren. Nadat was vastgesteld welke vraagstukken door de leerlingen waren opgelost en welke niet (zelfs de beste leerlingen losten niet meer dan 45% van de vraagstukken van gemiddelde en meer dan gemiddelde moeilijkheidsgraad op, de middelmatige en de zwakke leerlingen echter losten een aanzienlijk geringer aantal vraagstukken op) werd een experiment opgezet waarin de leerlingen werden geoefend in het uitvoeren van operaties op basis van een voorschrift waarin was aangegeven wat en hoe met het vraagstuk gedaan moest worden om het bewijs te vinden. In dit onderricht werden vraagstukken gebruikt die afweken van die, welke in de voortoets waren gebruikt. Toen de leerlingen zich alle noodzakelijke operaties en hun systemen eigen hadden gemaakt, d.w.z. een vrij algemene methode van redeneren (handelen) hadden verworven, werden

hun nogmaals dezelfde vraagstukken voorgelegd die zij in de voortoets niet hadden kunnen oplossen. Het bleek dat nu het merendeel van deze vraagstukken werd opgelost. Het feit dat het onderricht plaats had gevonden aan de hand van een bepaald type vraagstukken, terwijl de leerlingen toch een ander soort vraagstukken hadden leren oplossen, bevestigde de veronderstelling, dat de leerlingen inderdaad een bepaalde, vrij algemene methode van redeneren verwierven die toepasbaar was op het oplossen van vraagstukken van de meest uiteenlopende typen.

Nu rees de volgende vraag: is een methode, opgesteld voor de bewijsvoering bij meetkunde vraagstukken, ook niet bruikbaar voor het oplossen van bepaalde andere, niet-meetkundige vraagstukken? Anders gezegd: bestaan er geen methoden die algemeen zouden zijn voor het oplossen van vraagstukken in de meest uiteenlopende vakgebieden en die van het ene gebied naar het andere overdraagbaar zijn, b.v. van de wiskunde op de grammatica, van de grammatica op de scheikunde, van de scheikunde op de biologie enz. Als er dergelijke methoden zouden bestaan en zouden zijn op te stellen, zou dat van onschatbaar belang zijn voor de praktijk van het onderwijs. Men zou dan b.v. het wiskundeonderwijs zó kunnen inrichten dat de leerlingen gemakkelijker de grammatica zouden leren, en omgekeerd, men zou de grammatica zó kunnen onderwijzen, dat men gemakkelijker wiskunde zou kunnen leren. Het laat zich gemakkelijk voorstellen hoe hierdoor het onderwijsleerproces in zijn totaliteit verlicht en versneld zou kunnen worden en ook hoe hierdoor de effectiviteit zou kunnen worden verhoogd.

Om een antwoord te kunnen geven op deze vraag nl. of er voor de afzonderlijke schoolvakken mogelijk is gemeenschappelijke methoden zouden kunnen bestaan, werd een vak gekozen dat op het eerste gezicht het verst van de wiskunde staat en wel: de grammatica (de traditionele grammatica wordt – in tegenstelling tot de wiskunde – vaak als een typisch geesteswetenschappelijk vak beschouwd). Een analyse van de moeilijkheden waarmee leerlingen te kampen

hebben bij het moedertaalonderwijs (wij zullen verder in hoofdzaak over het leren van de grammatica van de moedertaal spreken, en zelfs in nog engere zin over de syntaxis) en een analyse van de fouten die leerlingen in schriftelijk werk maken, tonen aan dat de situatie hier in vele gevallen analoog is aan wat er plaats vindt bij het leren van wiskunde, nl. dat de leerlingen vaak wel de theoretische uitgangspunten goed kennen – de definities en de regels – maar anderzijds bepaalde grammatica-opgaven niet kunnen oplossen⁸.

Een meer diepgaande analyse van deze situatie wees uit, dat de oorzaak van een dergelijke stand van zaken t.a.v. het moedertaalonderwijs dezelfde is als bij het leren van wiskunde: ondanks de kennis die de leerlingen van de theoretische uitgangspunten – definities en regels – hebben, weten zij niet wat ze moeten doen (welke mentale operaties zij moeten verrichten) met de handelingsobjecten – de grammaticale verschijnselen (woorden, zinnen e.d.) om de oplossing van een opgave te kunnen vinden.

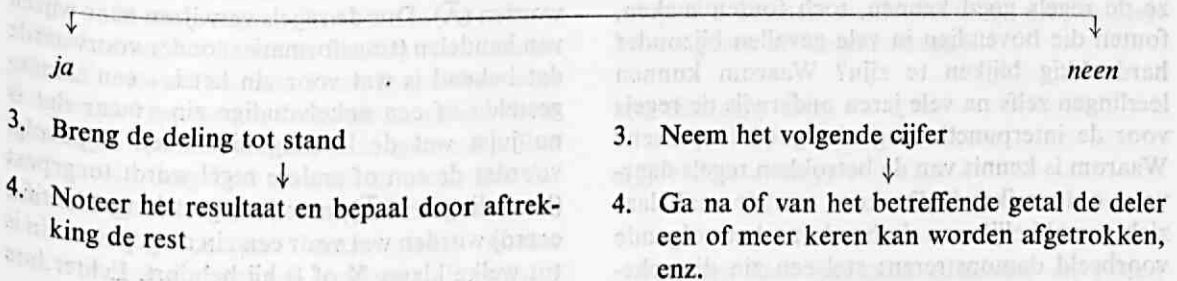
Het werd duidelijk dat voor het opheffen en voorkómen van deze tekortkoming, hetzelfde gedaan moest worden als wat bij het onderzoek met het meetkundig materiaal gedaan was: de mentale handelingen waaruit het proces van het oplossen van bepaalde typen van grammatica-opgaven is opgebouwd, moesten geanalyseerd worden, alsook hun systemen (d.w.z. methoden van handelen); vervolgens moest op grond hiervan bepaald worden wat er gedaan *moest* worden, en hoe er gehandeld *moest* worden om de opgaven correct te maken (modellen van de betreffen-

de processen ontwikkelen), daarna dienden voorschriften opgesteld te worden die geschikt zijn om de handelingen van de leerlingen tijdens het proces van het oplossen te sturen (d.w.z. de oplossingsmethoden formuleren)⁹, vervolgens moesten de leerlingen geoefend worden in het gebruik van de betreffende operaties en hun systemen (methoden) op basis van voorschriften m.b.t. de uit te voeren handelingen.

Bij het opstellen van deze voorschriften gingen wij uit van de hypothese dat voorschriften voor het oplossen van grammatica-opgaven een algoritmisch karakter kunnen dragen, d.w.z. dat voor het oplossen van grammatica-opgaven algoritmische methoden kunnen worden opgesteld¹⁰. Nadat voor bepaalde typen van grammatica-opgaven dergelijke voorschriften waren opgesteld, bleek dat zij inderdaad een algoritmisch karakter droegen en in feiten algoritmen waren.

Zoals bekend verstaat men in de wiskunde onder algoritmen: voorschriften voor het in een bepaalde volgorde uitvoeren van een systeem van relatief elementaire operaties voor het oplossen van alle vraagstukken van een bepaald type. Een heel eenvoudig voorbeeld van een algoritme zijn b.v. de regels voor het delen van twee getallen. Stel dat we twee natuurlijke getallen (b.v. 243 en 3) op elkaar moeten delen. Het algoritme dat voorschrijft hoe men daarbij te werk moet gaan, is algemeen bekend:

1. neem het eerste cijfer van het deeltal
2. ga na of van het betreffende getal de deler een of meer keren kan worden afgetrokken



Toen dergelijke algoritmen nog onbekend waren, konden alleen de knapste koppen van die tijd twee min of meer grote getallen delen. Nadat de algoritmen waren ontdekt, is men ze aan kinderen gaan leren en tegenwoordig kunnen zelfs leerlingen van de basisschool twee grote getallen op elkaar delen. Hieruit blijkt de betekenis van algoritmen voor het onderwijs en in het bijzonder hoe toepassing van algoritmen een verschuiving van de leeftijdsgrenzen in het onderwijs kan bewerkstelligen en de effectiviteit van het onderwijs in zijn totaliteit kan verhogen.

Een belangrijk kenmerk van de hierboven beschreven en soortgelijke algoritmen is, dat deze algoritmen gericht zijn op het *transformeren* van bepaalde objecten (vóór het toepassen van het deel-algoritme waren er twee getallen: 243 en 3, maar als gevolg van het toepassen van het algoritme werden deze getallen getransformeerd tot een ander getal – 81, zijnde het quotiënt van de deling van eerste getal door het tweede).

Indien we nu terugkeren naar de grammatica regels, kan men elk daarvan beschouwen als een specifiek, tot één operatie herleid transformatie-algoritme. Laten we nu eens een willekeurige regel nemen, bijvoorbeeld: 'als een gegeven zin samengesteld is en de enkelvoudige zinnen daarin verbonden worden door het voegwoord 'en', wordt vóór het voegwoord een komma geplaatst'¹¹. Toepassing van deze regel op een dienovereenkomstige zin die kenmerken bevat welke in het linker deel van de regel staan aangegeven, leidt tot haar transformatie: eerst was er een zin zonder komma, maar na toepassing van de regel is het een zin met een komma geworden, d.w.z. de zin blijkt getransformeerd te zijn.

Nu rijst de vraag waarom de leerlingen ofschoon ze de regels goed kennen, toch fouten maken, fouten die bovendien in vele gevallen bijzonder hardnekkig blijken te zijn? Waarom kunnen leerlingen zelfs na vele jaren onderwijs de regels voor de interpunctie nog niet goed toepassen? Waarom is kennis van de betrokken regels daarvoor ontoereikend? De kern van de zaak laat zich gemakkelijk aan de hand van het volgende voorbeeld demonstreren: stel een zin die sche-

matisch aldus is weergegeven: '... en ...'. (De puntjes staan voor bepaalde woorden.) Stel nu dat we moeten vaststellen of we vóór het voegwoord 'en' een komma moeten plaatsen. De regel (in vereenvoudigde vorm) luidt: als het voegwoord 'en' in een samengestelde zin staat en twee enkelvoudige zinnen verbindt, wordt vóór 'en' een komma geplaatst; als het voegwoord 'en' in een enkelvoudige zin staat en gelijkwaardige zinsdelen verbindt, wordt er voor 'en' geen komma geplaatst. De gegeven regels kunnen in nog verder vereenvoudigde vorm worden genoteerd:

samengestelde zin → komma plaatsen;
 enkelvoudige zin
 (met gelijkwaardige zinsdelen) → geen komma plaatsen.

Laten we de uitspraak 'samengestelde zin' aangeven met de X, de uitspraak 'enkelvoudige zin (met gelijkwaardige zinsdelen)' met de letter B, de uitspraak 'komma plaatsen' met de letter A, de uitspraak 'geen komma plaatsen' met de letter A met een ontkenning, d.w.z. A (het streepje boven de letter duidt de ontkenning aan van de uitspraak¹². De vereenvoudigde regels kunnen nu als volgt genoteerd worden:

$X \rightarrow A$
 $B \rightarrow \bar{A}$

Laten we nu aannemen dat de leerling een bepaalde zin X is tegengekomen waarin het voegwoord 'en' staat. Moet hij nu voor 'en' een komma plaatsen of niet? De leerling gaat te rade bij de regels en deze zeggen hem: *als* de zin een samengestelde zin (X) is, dan moet er een komma geplaatst worden (A), als de zin een enkelvoudige zin (B) is, dan moet er geen komma geplaatst worden (\bar{A}). Dus de regels verwijzen naar wijzen van handelen (transformaties) onder voorwaarde dat bekend is wat voor zin het is – een samengestelde of een enkelvoudige zin – maar dat is nu juist wat de leerling niet weet. Bijgevolg, voordat de een of andere regel wordt toegepast (handeling A of \bar{A}), moet vastgesteld (geïdentificeerd) worden wat voor een zin de gegeven zin is tot welke klasse X of B hij behoort. Echter hoe

dat is vast te stellen, te identificeren, daarover zeggen de regels op zich helemaal niets; er wordt verondersteld dat dit vanzelf spreekt, of dat de leerling daartoe zelf wel in staat geacht mag worden. Dit nu is dikwijls juist niet zo vanzelfsprekend, dit is nu juist iets wat de leerling niet kan. Hij weet welke operaties hij met de zin moet uitvoeren, *nadat* is vastgesteld of het een samengestelde dan wel een enkelvoudige zin is (hiernaar verwijzen de regels), maar hij weet niet welke operaties hij met de zin moet uitvoeren om vast te stellen wat voor soort zin het is.

Rijst de vraag naar het opstellen van identificatie-algoritmen. Het belangrijkste onderscheid tussen identificatie- en transformatie-algoritmen is hierin gelegen dat het doel van de laatste is: het transformeren van objecten; het doel van de eerste: het indelen van objecten in een bepaalde klasse (met het doel de toepasbaarheid van bepaalde regels, transformatie-algoritmen, vast te stellen en vervolgens op basis van die regels tot daadwerkelijke transformatie over te gaan). Daarbij houden de transformatie-algoritmen altijd identificatieoperaties in, terwijl identificatie-algoritmen transformatie-operaties (zelfs algoritmen) kunnen (maar niet per se moeten) inhouden¹³. We zullen echter in dit artikel alleen de 'zuivere' identificatie-processen bekijken die geen transformaties bevatten.

Het wezen van elk willekeurig identificatie-proces¹⁴ bestaat hierin, dat bepaalde kenmerken van een object worden nagegaan en dat er op grond van de aanwezigheid of afwezigheid van deze kenmerken geconcludeerd wordt tot welke klasse het object behoort. Echter om een object op grond van kenmerken onder een bepaalde klasse onder te brengen, dient men te weten door welke kenmerken bepaalde klassen van objecten gekarakteriseerd worden. Deze kenmerken worden meestal gegeven in definities en andere theoretische uitspraken (regels, stellingen e.d.). Een analyse van dergelijke uitspraken toont aan dat deze *ten eerste*: alle zijn uit te drukken in de 'als . . . dan'-vorm, b.v. 'werkwoorden noemt men woorden die naar een handeling of toestand

verwijzen en een antwoord zijn op de vraag: 'wat wordt er gedaan?' of 'wat is er gedaan?' In de 'als - dan'-vorm zou deze definitie als volgt luiden: 'Als woorden naar een handeling of toestand verwijzen en een antwoord zijn op de vraag 'wat wordt er gedaan?' of 'wat is er gedaan?', dan worden deze woorden werkwoorden genoemd'. Ons onderzoek wees uit dat het voor het ontwikkelen van het denken uiterst belangrijk is de leerlingen te leren iedere willekeurige theoretische uitspraak te formuleren in de 'als-dan'-vorm¹⁵. *Ten tweede* toont een analyse van theoretische uitspraken aan dat de kenmerken, die in dergelijke uitspraken worden opgesomd, altijd op een bepaalde wijze onderling in relatie staan. Op de relatie uitgedrukt met behulp van de logische 'connector' (voegwoord) 'als - dan' hebben we al gewezen. Andere logische connectoren die kenmerken met elkaar in relatie kunnen brengen zijn de voegwoorden 'en' en 'of'. Een voorbeeld waarin een relatie gelegd wordt met behulp van de logische connector 'en' is: 'als bepaalde zinsdelen een antwoord geven op één en dezelfde vraag (kenmerk a) en bij één en hetzelfde zinsdeel behoren (kenmerk b), dan noemt men deze zinsdelen gelijkwaardig (G)'. Een voorbeeld met behulp van de logische connector 'of' is: 'als de vorm van een vast lichaam verandert (kenmerk c) of zijn volume verandert (kenmerk d), dan noemen we deze verandering deformatie (D)'.
(D)'

We kunnen beide definities ook noteren in de taal van de symbolische logica. Voor dit doel geven we de logische connector 'als . . . dan' aan met het teken \rightarrow ; de logische connector 'en' met het teken '&', en de logische connector 'of' met het teken 'V'. De omstandigheid dat een of ander object x een kenmerk m heeft, noteren we als $m(x)$. We kunnen nu de definities die we hierboven gaven als volgt noteren:

$$a(x) \& b(x) \rightleftharpoons G(x).$$

Df

$$c(y) \vee d(y) \rightleftharpoons D(y)$$

Df

x betekent hier 'bepaalde zinsdelen' en y 'een

bepaalde verandering'. De twee pijlen betekenen dat de relatie van het type 'als . . . dan' in beide richtingen geldt. De letters Df zijn een afkorting voor 'volgens definitie'. Als de uitspraak 'sommige zinsdelen geven antwoord op één en dezelfde vraag', die we hebben genoteerd als $a(x)$, als één geheel wordt beschouwd en aangeduid met de letter a , en de uitspraak die wij noteerden als $b(x)$, als één geheel wordt beschouwd en aangeduid met de letter b etc., dan kunnen de definities in nog eenvoudiger vorm genoteerd worden:

$a \ \& \ b \rightleftharpoons G$

Df

$c \vee d \rightleftharpoons D$

Df

De relatie tussen kenmerken op basis van een of andere logische connector noemen we: de logische structuur van de kenmerken. Kenmerken, verbonden door het voegwoord 'en' (d.w.z. conjunctie), geven een conjunctieve structuur van kenmerken aan; kenmerken, verbonden door het voegwoord 'of' (disjunctie), een disjunctieve structuur van kenmerken.

Het opmerkelijke nu is, dat de wijze van handelen bij het identificeren van objecten afhankelijk is van de wijze waarop de relatie wordt gelegd tussen de kenmerken op basis waarvan geïdentificeerd wordt en dus afhankelijk is van hun logische structuur.

Als de kenmerken verbonden zijn door het voegwoord 'en' (conjunctief), dan moet men, wil men vaststellen of een bepaald object x tot een bepaalde klasse M behoort:

1. Nagaan of het het eerste kenmerk heeft¹⁶.
Zo niet, dan moet men de verdere controle staken en een ontkennende conclusie trekken.
Zo ja, dan
2. Nagaan of het het tweede kenmerk heeft.
Zo neen, dan moet men de verdere controle staken en een ontkennende conclusie trekken.
Zo ja, dan

- n. Nagaan of het het n-de kenmerk heeft.
Zo neen, dan moet men een ontkennende conclusie trekken.
Zo ja, dan moet men een bevestigende conclusie trekken.

We zullen de bovenomschreven methode toepassen op de volgende twee zinnen:

1. *In de zaal zaten jonge sportlieden en ervaren meesters.*
2. *In de zaal zaten jonge en ervaren sportlieden.*

Vastgesteld moet nu worden of de woorden 'jonge' en 'ervaren' gelijkwaardige zinsdelen zijn. In de eerste zin hebben deze woorden het eerste kenmerk van gelijkwaardige delen, maar missen het tweede. Dus: deze woorden zijn geen gelijkwaardige zinsdelen. In de tweede zin hebben deze woorden zowel het eerste als het tweede kenmerk (d.w.z. alle kenmerken van gelijkwaardige zinsdelen). Dus, het zijn gelijkwaardige zinsdelen.

Als de kenmerken verbonden zijn door het voegwoord 'of' (disjunctief), dan moet men om vast te stellen of een bepaald object y tot een bepaalde klasse L behoort:

1. Nagaan of het het eerste kenmerk heeft.
Zo ja, dan moet men verdere controle staken en een bevestigende conclusie trekken.
Zo niet, dan
 2. Nagaan of het het tweede kenmerk heeft.
Zo ja, dan moet men verdere controle staken en een bevestigende conclusie trekken.
Zo niet, dan
-
- n. Nagaan of het het n-de kenmerk heeft.
Zo ja, dan moet men een bevestigende conclusie trekken.
Zo niet, dan moet men een ontkennende conclusie trekken.
De toepassing van de aangegeven methode op concrete voorbeelden laten we aan de lezer over. Het verschil tussen de beide aangegeven methoden is niet moeilijk te zien. Schematisch kan dit verschil aldus worden weergegeven. Stel dat we twee theoretische

uitspraken hebben, waarvan in de een de kenmerken in conjunctieve relatie staan en bij de ander in disjunctieve:

$$a_1 \& a_2 \& a_3 \& \dots \& a_n \rightleftharpoons M$$

$$b_1 \vee b_2 \vee b_3 \vee \dots \vee b_n \rightleftharpoons L$$

Stel dat we deze uitspraken toepassen op willekeurige objecten en indien het object een bepaald kenmerk heeft boven de betreffende letter een plusteken plaatsen of zo het kenmerk niet aanwezig is een minteken. Men kan nu in het eerste geval in het rechter gedeelte van de definitie alleen een plusteken zetten, wanneer in het linker gedeelte boven *alle* letters plustekens staan. In het tweede geval echter kan men in het rechter gedeelte een plusteken zetten, zodra er in het linker gedeelte ook maar boven één letter een plusteken staat. Omgekeerd, wordt in het eerste geval een minteken in het rechter gedeelte geplaatst, zodra er links ook maar één minteken staat. In het tweede geval wordt rechts een minteken geplaatst, wanneer er links boven *alle* letters mintekens staan.

Voorbeeld:

$$\begin{array}{cccccccc} + & - & & & & & - & \\ a_1 & \& a_2 & \& a_3 & \& \dots & \& a_n \end{array} \rightleftharpoons M$$

$$\begin{array}{cccccccc} + & + & + & +++ & + & + & & \\ a_1 & \& a_2 & \& a_3 & \& \dots & \& a_n \end{array} \rightleftharpoons M$$

$$\begin{array}{cccccccc} - & + & & & & & + & \\ b_1 & \vee & b_2 & \vee & b_3 & \vee & \dots & \vee & b_n \end{array} \rightleftharpoons L$$

$$\begin{array}{cccccccc} - & - & - & - & - & - & - & \\ b_1 & \vee & b_2 & \vee & b_3 & \vee & \dots & \vee & b_n \end{array} \rightleftharpoons L$$

De hierboven beschreven methoden van handelen bij het identificeren van een verschijnsel dragen een zeer algemeen karakter en zijn niet afhankelijk van de concrete inhoud van de kenmerken van de te identificeren verschijnselen, noch van het ervaringsgebied waartoe deze verschijnselen behoren.

Wij hebben gevallen onderzocht waarbij de kenmerken of conjunctief of disjunctief waren verbonden. Heel vaak echter zijn de kenmerken conjunctief-disjunctief of disjunctief-conjunctief

verbonden. Een voorbeeld is de reeds eerder aangehaalde definitie van een werkwoord: 'als woorden naar een handeling verwijzen (kenmerk e) of naar een toestand (kenmerk f) en een antwoord geven op de vraag 'wat wordt er gedaan?' (kenmerk g) of 'wat is er gedaan?' (kenmerk h), noemen we deze woorden werkwoorden (W.W.)'. In symbolen:

$$(eVf) \& (gVh) \rightleftharpoons WW$$

$$Df$$

Uit wat boven gesteld is met betrekking tot de methoden van handelen in het geval van zuiver conjunctieve en zuiver disjunctieve structuren van kenmerken zijn de methoden van handelen af te leiden voor gevallen van conjunctief-disjunctieve en disjunctief-conjunctieve structuren van kenmerken.

Een analyse van de fouten die leerlingen maakten bij het oplossen van veel wiskundige, als ook van veel grammaticale opgaven (men kan zich voorstellen dat dit ook zal gelden voor opgaven op andere terreinen), toonde aan dat de oorzaken ervan vaak gelegen zijn, ten eerste, in het feit dat de leerlingen niet begrijpen wat een kenmerk eigenlijk is, waarvoor kenmerken dienen en wat er met kenmerken gedaan moet worden bij het leren van de stof en bij het oplossen van opgaven; ten tweede ligt de oorzaak in het feit dat de leerlingen niet op de hoogte zijn van de soorten van logische relaties tussen kenmerken, en niet bewust gericht zijn op de voegwoorden die deze relaties signaleren; ten derde in het feit dat de leerlingen geen methoden kennen om met objecten te handelen afhankelijk van deze of gene relatie tussen de kenmerken (d.w.z. hun logische structuur).

We geven slechts een voorbeeld. Heel vaak maken leerlingen van de lagere, maar zelfs ook van de hogere klassen deze fout. Gesteld, dat er gevraagd wordt te bepalen tot welke woordsoort een woord van het type 'witheid' behoort. Op deze vraag volgt dikwijls het antwoord dat het een adjectief is. Waarom? Wel, omdat het verwijst naar een kenmerk van een object. De defi-

nitie van een adjectief, genoteerd in de 'als... dan'-vorm luidt: 'Als een woord verwijst naar een kenmerk van een voorwerp (kenmerk a) en antwoord geeft op de vraag 'wat voor' (kenmerk b) of antwoord geeft op de vraag 'wiens' (kenmerk c), noemen we dat woord een adjectief (ADJ). Symbolisch weergegeven:

a & (bVc) \Rightarrow ADJ
Df

De fout van de leerlingen wordt veroorzaakt doordat zij alleen kenmerk *a* van het woord nagaan, terwijl er na het kenmerk *a* nog een conjunctie-teken staat (d.w.z. het voegwoord 'en' staat); wil een bepaald woord een adjectief zijn, dan is ook nog de aanwezigheid van het kenmerk *b* of *c* vereist. Deze kenmerken van de woorden gaat de leerling echter niet na, en hij trekt een bevestigende conclusie op grond van het feit, dat het woord slechts het (niet-toereikende) kenmerk *a* heeft. Uit dit voorbeeld blijkt duidelijk dat de oorzaak van de fout schuilt in het feit dat de leerling zich niet bewust is van de logische structuur van de kenmerken van een adjectief en ook in het feit dat zijn wijze van handelen niet in overeenstemming is met de logische structuur van de kenmerken.

Het opstellen van doelmatige identificatie-algoritmen is een betrekkelijk eenvoudige zaak, wanneer men algoritmen moet opstellen op basis van één theoretische uitspraak waarin de kenmerken verbonden zijn door een van de voegwoorden 'en' of 'of'. Aanmerkelijk ingewikkelder wordt het wanneer men identificatie-algoritmen moet opstellen op basis van meer dan een theoretische uitspraak. In dit geval is een doelmatige volgorde waarin de kenmerken nagegaan moeten worden vaak helemaal niet zo evident en blijkt het opstellen van een algoritme een betrekkelijk gecompliceerde opgave. Een voorbeeld ter illustratie.

Stel dat we attributief-predicatieve bepalingen moeten leren identificeren*.

We geven nu enige regels voor deze handelingen:

'Als een of andere attributieve bepaling *x* hoort bij een kernwoord dat is weergegeven door een substantief, én de bepaling is nevenschikkend of onderschikkend, en volgt op het kernwoord, dan is deze bepaling een attributief-predicatieve bepaling'.

'Als een of andere attributieve bepaling *x* hoort bij een kernwoord dat is weergegeven door een persoonlijk voornaamwoord, dan is deze bepaling een attributief-predicatieve bepaling'.

'Als een of andere attributieve bepaling hoort bij een kernwoord dat is weergegeven door een substantief, en niet alleen een 'bepalende' betekenis heeft, dan is deze bepaling een attributief-predicatieve bepaling'.

'Als een of andere attributieve bepaling hoort bij een kernwoord dat is weergegeven door een substantief, en alleen 'bepalende' betekenis heeft, en 'vrije' bepaling is, dan is deze bepaling geen attributief-predicatieve bepaling' enz.

De complexiteit van de logische structuur van de kenmerken van een attributief-predicatieve bepaling blijkt duidelijk uit de boven gegeven regels. Dit wordt nog eens extra duidelijk als we deze regels gaan noteren in termen van de symbolische logica¹⁷. Het laat zich gemakkelijk indenken in welk een moeilijke situatie zich een leerling bevindt wanneer een dergelijke hoeveelheid uiterst ingewikkelde regels over hem wordt 'uitgestort'. Hoe moet hij handelen in dergelijke concrete grammaticale situaties? Welke regels moet hij toepassen? Welke kenmerken moet hij nagaan van het grammaticale object in kwestie, en in welke volgorde? Op al deze vragen geven de regels zelf geen antwoord. En antwoord kan alleen gevonden worden met behulp van een identificatie-algoritme voor attributief-predicatieve bepalingen. Een dergelijk algoritme is echter uit de regels op zich niet onmiddellijk op te stellen (hoewel het wel op basis ervan wordt opgesteld). Dit algoritme vindt men niet in de leerboeken en ook de leraren en onderwijzers hebben

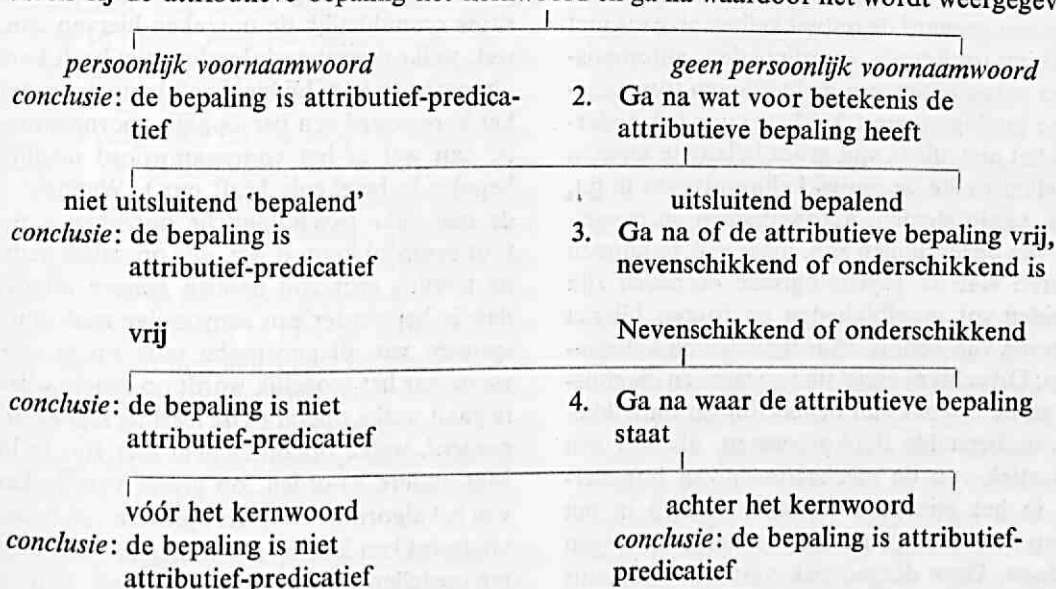
* Noot vertaler: dit is van belang met het oog op de interpunctie (wel of geen komma). Vgl. Ned. gebruik van de komma bij de beperkende en uitbreidende betrekkelijke bijzin.

het gewoonlijk niet geleerd. (Moet het na dit alles nog verbazing wekken dat leerlingen zich dit onderwerp zo moeizaam eigen maken en dat zelfs na beëindiging van de school vrijwel niemand de attributief-predicatieve bepaling *altijd* op de juiste wijze kan identificeren?) Overigens maakt het opstellen van een identificatie-algorit-

me voor attributief-predicatieve bepalingen het mogelijk een complex grammatica-vraagstuk met maximaal vier operaties op te lossen. We geven hier het algoritme (maar kunnen – wegens plaatsgebrek – niet verder ingaan op de wijze waarop het is opgesteld):

ALGORITME

1. Zoek bij de attributieve bepaling het kernwoord en ga na waardoor het wordt weergegeven



De ervaringen met het leren van algoritmen aan leerlingen toont de grote effectiviteit van een dergelijk onderwijs aan. In enkele gevallen lukt het zelfs om in korte tijd het aantal fouten tot 1/5 à 1/7 terug te brengen. Natuurlijk is het onjuist te denken dat men de leerlingen algoritmen in kant en klare vorm moet onderwijzen. Een goed opgezet onderwijs in algoritmen veronderstelt dat de leerlingen geleerd wordt *zelfstandig* algoritmen te ontdekken en ook dat ze *algemene methoden* leren om algoritmen op te stellen; een dergelijke didactische procedure heeft grote algemeen vormende waarde en voedt de leerlingen op tot creatief denken. Goed opgezet onderwijs in algoritmen ontwikkelt ook zulke eigenschappen van het denken als: ordelijkheid, systema-

tiek, exactheid, bewijskracht en een reeks andere eigenschappen.

Natuurlijk kan men, behalve voor het onderwijs in de moedertaal, ook identificatie-algoritmen opstellen voor het onderwijs in alle andere vakken. Het identificeren is immers bij het leren oplossen van vraagstukken bij alle vakken noodzakelijk en in het algemeen bij alle vormen van activiteit. Het toepassen van algoritmen is vooral effectief voor het onderwijs in de vreemde talen, en daarbij denken we niet aan het aankweken van vaardigheid in het verstaan van de vreemde taal (receptieve algoritmen), maar ook aan het aankweken van spreekvaardigheid (productieve algoritmen)¹⁸.

Algoritmen zijn niet alleen van grote betekenis voor het aanleren van bepaalde denkprocessen, vaardigheden en automatismen, maar ook voor het diagnosticeren van de psychologische oorzaken van de moeilijkheden en fouten, die optreden bij het verwerven van bepaalde kennisinhouden door de leerlingen en bij het oplossen van vraagstukken. Tot heden bestonden de activiteiten op het terrein psychologische diagnostiek voornamelijk uit het aanwenden van methoden waarmee een gegeven toestand kon worden vastgesteld en daaraan gepaard de ontwikkelingsniveaus met betrekking tot kennis, vaardigheden, automatismen en capaciteiten van de leerlingen (prestatietests en intelligentietests). Maar voor het onderwijs is het niet alleen van groot belang te kunnen vaststellen welke de ontwikkelingsniveaus m.b.t. kennis, vaardigheden, automatismen en capaciteiten van de leerlingen zijn, maar ook te kunnen opsporen wat de psychologische oorzaken zijn die leiden tot moeilijkheden en fouten bij het verwerven van kennis, vaardigheden en automatismen. Dit echter vereist niet zozeer een diagnostiek van de niveaus van beheersing en ontwikkeling van bepaalde denkprocessen, als wel een diagnostiek van de mechanismen van hun verloop, in het bijzonder wanneer er zich in het verloop van deze processen bepaalde storingen voordoen. Deze diagnostiek vertoont gelijkenis met de diagnostiek in de medische wetenschap bij het vaststellen van de oorzaken en mechanismen van bepaalde pathologische storingen in het organisme¹⁹ of de diagnostiek bij het zoeken naar defecten in technische installaties. De diagnostiek waarvan hier sprake is, is voor een groot deel een op zich zelf staand speuren naar defecten in de mechanismen van de mentale activiteit van leerlingen (men zou het het speuren naar psychologische defecten kunnen noemen). Het is hierdoor dat deze diagnostiek zich onderscheidt van de traditionele, klassieke diagnostiek. Het speuren naar 'psychologische defecten' scheidt enerzijds de mogelijkheid het onderwijs zó in te richten dat het optreden van dergelijke 'defecten' kan worden voorkómen, anderzijds dat deze defecten kunnen worden opgeheven. Het opsporen van de psychologische oorzaken van fouten, van

concrete 'defecten' in de mechanismen van de denkactiviteit van de leerlingen moet daarom de belangrijkste basis zijn bij het kiezen van een didactische werkvorm voor elke afzonderlijke etappe, en – in enkele gevallen – zelfs voor iedere stap.

Zeer evident wordt de functie van algoritmen bij het speuren naar 'psychologische defecten'. Als bijv. een leerling een fout tegen de interpunctie maakt – bij de attributief-predicatieve bepalingen geen komma heeft gebruikt – dan toont het algoritme onmiddellijk de oorzaken hiervan aan, en wel: welke operaties de leerling niet heeft kunnen uitvoeren (b.v. of hij niet heeft kunnen nagaan of het kernwoord een persoonlijk voornaamwoord is, dan wel of het voornaamwoord uitsluitend bepalende betekenis heeft enz.). Wanneer men de mogelijke psychologische oorzaken van een fout eenmaal kent, d.w.z. alle operaties kent die de leerling niet zou hebben kunnen uitvoeren, dan is het verder een eenvoudige zaak om een systeem van diagnostische tests op te stellen, waardoor het mogelijk wordt op exacte wijze na te gaan welke operaties de leerling niet heeft uitgevoerd, welke operaties hem niet zijn 'gelukt'. Met andere woorden, op grond van de kennis van het algoritme voor het oplossen van bepaalde vraagstukken kan men een diagnostisch algoritme opstellen voor het vaststellen van de psychologische oorzaken die ertoe geleid hebben dat het algoritme niet werd aangewend.

Het opstellen van deze diagnostische algoritmen is van grote betekenis voor het verhogen van de effectiviteit en kwaliteit van het onderwijs, aangezien het hierdoor mogelijk wordt het onderwijs op te bouwen op een diagnostische basis en hierdoor kan weer bereikt worden dat het onderwijs weer aangepast wordt aan de individuele verschillen tussen leerlingen m.b.t. het verwerven van kennis, vaardigheden en automatismen. Het wordt nu bovendien mogelijk om geprogrammeerde leerboeken en programma's voor leermachines op een diagnostische basis te maken. Machines die met dergelijke programma's werken, kunnen dan tegelijkertijd als leermachines en als diagnostische machines fungeren d.w.z. zij kunnen diagnostische instructie geven²⁰. Het

uitwerken van de problemen m.b.t. de psychologische diagnostiek van de oorzaken van fouten en het ontwikkelen van diagnostische leerprogramma's is wel het voornaamste terrein waarop in het door ons geleide laboratorium voor geprogrammeerde instructie aan het psychologisch instituut van de Academie van Pedagogische Wetenschappen in Moskou gewerkt wordt.

Kennis van de algoritmen voor het oplossen van bepaalde typen van vraagstukken schept de mogelijkheid niet alleen diagnostische algoritmen op te stellen voor het identificeren van de psychologische oorzaken van fouten, maar ook systemen van oefeningen te maken die het optreden van dergelijke fouten moeten voorkomen. Doordat de handelingen, die verricht moeten worden om met goed resultaat vraagstukken van een bepaalde klasse op te lossen, gespecificeerd zijn, geeft het algoritme zelf al aanwijzingen omtrent hetgeen de leerlingen geleerd moet worden om deze handelingen te kunnen uitvoeren; het algoritme geeft ook aan welke oefeningen daartoe gebruikt moeten worden. Men zou kunnen stellen dat het algoritme de basis is voor het op wetenschappelijk verantwoorde wijze opstellen en vaststellen van een systeem van oefeningen.

De belangrijkste opgave van het onderwijs, met inbegrip van het geprogrammeerde onderwijs (G.I.), is het leren van zowel algoritmische als heuristische methoden aan de leerlingen. Echter, om heuristieken bewust en doelgericht over te dragen moeten zij zo nauwkeurig mogelijk omschreven zijn. Hiertoe moet expliciet gemaakt worden waarin zij verschillen van algoritmische methoden. Men mag aannemen dat het belangrijkste verschil tussen beide het volgende is:

Algoritmische methoden (d.w.z. de algoritmische voorschriften) determineren volledig en ondubbelzinnig de handelingen van degene die met een opgave bezig is (d.w.z. dat twee verschillende mensen die volgens algoritmen tewerk gaan, altijd dezelfde operaties verrichten en steeds langs dezelfde weg het vraagstuk oplossen); de heuristische methoden (heuristische voorschriften) echter determineren de handelingen van de-

gene die met een opgave bezig is niet volledig en ondubbelzinnig. De aanwijzingen in heuristische voorschriften houden altijd een zekere mate van *vrijblijvendheid* in m.b.t. de vraag wat men moet doen om het voorschrift uit te voeren en de gegeven opgave op te lossen. Als voorbeeld kan behalve de eerste, iedere hierboven gegeven aanwijzing dienen van het voorschrift voor het vinden van een meetkundig bewijs. B.v.: trek uit datgene wat gegeven is, de meest voor de hand liggende conclusies. Deze aanwijzing is vrijblijvend (niet gespecificeerd) m.b.t. de vraag welke en hoeveel conclusies getrokken moeten worden en schrijft geen enkele exacte methode m.b.t. de handelingen voor; de een kan deze conclusie trekken, een ander trekt weer andere, en de een kan er meer trekken dan de ander. Hetzelfde kan opgemerkt worden t.a.v. de overige aanwijzingen.

Men neemt tegenwoordig algemeen aan dat voor het oplossen van meetkundevraagstukken in leerboeken niet alleen heuristische methoden opgesteld kunnen worden, maar ook algoritmen die niets ongespecificeerd laten maar die het mogelijk maken om een vraagstuk in een bepaald aantal stappen op te lossen. Echter, het aantal en de complexiteit is zó groot, dat het gebruik en het leren ervan niet doelmatig en zelfs praktisch onmogelijk is. Daarom is het naast het onderwijs in algoritmen (waar dit mogelijk en doelmatig is) ook van groot belang heuristische methoden te leren. In tegenstelling tot algoritmen leren deze de leerlingen niet alleen oplossingen te zoeken op een specifiek terrein (zoals algoritmen), maar ook op meer *algemeen* terrein, en dit is nu juist een kenmerk van echte creatieve processen

Om de leerlingen niet alleen algoritmische, maar ook heuristische processen te leren, moeten we in het onderwijs gebruik maken van de 'probleemmethode'. M.b.t. de geprogrammeerde instructie rijst dan de vraag of men programma's kan ontwikkelen die op de probleemmethode gebaseerd zijn en daardoor de probleemmethode weer modelleren. Anders gezegd: kan geprogrammeerde instructie 'heuristische instructie'

worden? Enige beschouwingen m.b.t. dit vraagstuk hebben wij elders gegeven²¹. We volstaan daarom met op te merken dat er weliswaar geen principiële beperkingen zijn, maar dat een praktische uitwerking van een probleemmethode in de geprogrammeerde instructie vandaag aan de dag nog aanzienlijke moeilijkheden zal opleveren.

In dit artikel hebben we slechts een klein deel van de problemen kunnen bespreken betreffende het onderwijzen van algoritmen en heuristieken. Met opzet hebben wij de volgende vraagstukken niet besproken: de plaats van algoritmen in de algemene didactiek; de structuur van niet-algoritmische processen; de didactiek van algoritmische processen; de algoritmen van de activiteit van leerlingen zowel als leraren; de relatie tussen algoritmisering van het leren en geprogrammeerde instructie en nog diverse andere vraagstukken. Voor een deel kan men de antwoorden op deze vragen vinden in enige van onze publikaties²², of bij andere auteurs die vermeld worden in het bibliografische register. Diverse vraagstukken vragen om verder onderzoek.

Noten

1. L. N. Landa, 'Het leren van doelmatige denkmethoden aan leerlingen' (in het Russisch), in: *Voprosy Psichologii*, 1961, no. 1. Een Duitse vertaling van dit artikel in de bundel: 'Kybernetische Probleme in Pädagogik und Psychologie', Abteilung II, Heft 3, Berlin, Verlag 'Volk und Wissen', 1963 (D.D.R.).
2. Voor een gedetailleerde analyse van het probleem en resultaten van onderzoekingen zie onze monografie: L. N. Landa, *Algoritmizacija v obučenii*, Moskva, Prosveščeniye, 1966. Duitse vertaling: 'Algoritmierung im Unterricht', uitgave 'Volk und Wissen', Berlin, 1969.
3. Het onderzoek werd verricht in 1953-1954 en verscheen in 1955 als dissertatie: L. N. Landa, *K psichologii formirovanija metodov rassuzdenija/ na materiale rešenija geometričeskich zadač na dokazatel'stvo učaščimis'a 7-8 klassov/*, Moskva, 1955. (Noot vertaler: titel van dit werk dat niet vertaald is: 'Een bijdrage tot de psychologie van het leren van redeneermethoden.

Meetkundige bewijsvoeringen door leerlingen van de 7e en 8e klas').

Voor een meer uitgebreide uiteenzetting over de resultaten van deze onderzoekingen kunnen wij verwijzen naar onze artikelen:

'O nekotorych nedostatkach umstvennoj dejatel'nosti učaščich's'a, zatrudn'ajuščich samostojatel'noje rešenije zadač', in: *Izvestija Akademii Pedagogičeskich Nauk R.S.F.S.R.*, Vyp. 115, 1961. (Noot vertaler: 'Enige tekortkomingen in de mentale activiteit van leerlingen met problemen bij het zelfstandig oplossen van opgaven') en 'O formirovanii u učaščich's'a obščego metoda myslitelnoj dejatel'nosti pri rešenii zadač', in: *Voprosy psichologii*, 1959, no. 3. (Noot vertaler: 'Het leren van een algemene denkmethode bij het oplossen van vraagstukken').

4. De mechanismen van de mentale activiteit of exacter/mechanismen met specifieke kenmerken en eigenschappen.
5. Natuurlijk kennen zwakke leerlingen deze vaak ook niet. Op dergelijke gevallen zullen wij hier echter niet ingaan. In het onderhavige experiment werd de kennis van meetkundige stellingen vooraf gecontroleerd, en werden tekortkomingen, indien we deze constateerden, eerst opgeheven.
6. Van een vrijwel identieke vraagstelling wordt uitgegaan in het werk van G. Polya: 'How to solve it', Princeton, 1942. De voorschriften die Polya opstelt, zijn echter veelal zo onbepaald en ongespecificeerd (b.v. 'formuleer het vraagstuk anders', 'bekijk het onbekende', 'ga na of je iets nuttigs uit de gegevens kunt afleiden') dat deze het verloop van de mentale operaties niet kunnen sturen. Onze doelstelling was het proces van het zoeken naar een bewijs te ontleden in betrekkelijk elementaire operaties en vervolgens een voorschrift op te stellen dat juist aan deze operaties appelleert. Een analoge taak m.b.t. het samenstellen van programma's voor het bewijzen van stellingen met behulp van computers stelden zich: A. Newell, J. C. Shaw, H. A. Simon, H. Gelernter, Rochester (zie: *I.B.M.-Journal*, okt. 1958: 'Information processing', Unesco, Paris, 1959). Ons werk en dat van bovengenoemde auteurs geschiedde echter onafhankelijk van elkaar en de eerste resultaten van de Amerikanen werden gepubliceerd nadat ons werk reeds was afgesloten.
7. Voor een meer gedetailleerde uiteenzetting zie: ons artikel in: *Voprosy Psichologii*, 1959, no. 3.

- (Vertaler: verwijzing onder noot 3).
8. Wanneer iemand b.v. moet vaststellen of een bepaald woord met een E of I geschreven moet worden of moet beslissen of er al dan niet op een bepaalde plaats een komma moet staan, dan is de gegeven situatie (in geval althans dat er zich nog geen automatisme heeft gevormd) een typische probleem-situatie. (Noot vertaler: In de Russische spelling is het probleem E of I te vergelijken met het Nederlands ei of ij).
 9. Onder methoden verstaat men soms een systeem, van operaties, die ten grondslag liggen aan het oplossen van een of ander type van vraagstukken soms voorschriften voor het uitvoeren van dit systeem van operaties (dit verschil komt ook in de taal tot uitdrukking: het beheersen van een methode is het beheersen van operaties, kennis van een methode is het weten wat men moet doen en hoe men moet handelen d.w.z. kennis van een voorschrift, ook al is dit aan de persoon gebonden en door hem zelf opgesteld.) In het vervolg zullen wij de term 'methode' zowel in de eerste als in de tweede betekenis gebruiken zonder aan te geven welke van beide betekenissen we op het oog hebben als uit de context duidelijk is wat we bedoelen.
 10. N.B. het voorschrift dat hierboven voor het voeren van een meetkundig bewijs werd opgesteld, had een in hoge mate heuristisch karakter. Op het verschil tussen algoritmische en heuristische voorschriften zullen wij in het vervolg van dit artikel nog kort ingaan.
 11. Om het principe beter te kunnen toelichten hebben wij de desbetreffende regel enigszins vereenvoudigd. In werkelijkheid kunnen voor een voegwoord niet alleen een komma, maar ook nog enige andere leestekens geplaatst worden. Bovendien is het plaatsen van leestekens nog afhankelijk van enige secundaire voorwaarden waarop wij niet zijn ingegaan.
 12. De letter A met en zonder streepje zullen wij ook gebruiken om de handeling zelf (komma plaatsen/geen komma plaatsen) aan te geven.
 13. Een voorbeeld hiervan kunnen b.v. ook operaties zijn voor het transformeren van een of andere installatie (b.v. het demonteren) met het doel de oorzaak van een storing op te sporen.
 14. Wij zullen hier niet ingaan op identificatie op perceptief niveau, maar alleen op identificatie op niveau van het denken.
 15. Waarom zal uit het navolgende blijken. Wij zullen derhalve alle theoretische uitspraken transformeren naar de 'als . . . dan' vorm.
 16. Dit veronderstelt dat de volgorde van de kenmerken op een of andere wijze is gefixeerd. Normaliter is deze willekeurig.
 17. Wegens plaatsgebrek zullen wij deze notatie hier niet geven. Zij wordt wel gegeven in onze brochure: ('Diagnostiek en geprogrammeerde instructie') Diagnostika i programmirovannoje obučenije, Moskva, izd. pedagogičeskogo obščestva, RSFSR, 1966. Het is echter niet moeilijk haar zelf op te stellen. (Noot vertaler: voor deze brochure zie ook verwijzing ad 20).
 18. Over algoritmen bij het leren van vreemde talen zie ons artikel: L. N. Landa, Nekotorije Voprosy algoritimizacii i programmizovanija v obučenii inostrannym jazykam, ('Enige aspecten van de algoritmisering en programmering in het vreemde-talenonderwijs') in: Inostrannyje jazyki v škole, 1968, no. 1.
 19. In het onderwijs gaat het echter niet om pathologische afwijkingen, maar om het probleem dat bepaalde normaal verlopende processen niet of niet correct geleerd zijn.
 20. In onze brochure Diagnostika i programmirovannoje obučenije (zie noot 17) gaan wij hierop uitvoerig in. Een korte uiteenzetting hiervan wordt gegeven in: L. N. Landa, 'Diagnostik und programmierter Unterricht', in: 'Lehrmaschinen in kybernetischer und pädagogischer Sicht', 4, (Hrsg. H. Frank) E. Klett, Stuttgart, R. Oldenbourg, München, 1966. Een Franse vertaling is eveneens aanwezig: L. N. Landa, 'Diagnostique et l'enseignement programmé, Institut pédagogique national, Dec. 1967, Paris.
 21. L. N. Landa, Das Verhältnis zwischen heuristischen und algorithmischen Prozessen und einige Probleme ihrer Herausbildung durch programmierten Unterricht, in: Wissenschaftliche Zeitschrift des pädagogischen Instituts Güstrow 5. Jahrgang, 1966/67, Sondernummer.
 22. Algoritmizacija v obučenii, zie noot 2 en Algoritmy i programmirovannoje obučenije, Moskva, 1966. Dit werk werd in het Duits vertaald onder de titel: 'Programmierter Unterricht und Lerntheorie', Berlin, 'Urania', 1967 (D.D.R.); in: 'Programmed learning and language laboratory', ed. K. Bung, Longmans, London, 1968 (Engelse vertaling).