OVER MODERNISERING VAN HET REKENEN IN HET BASISONDERWIJS.

V. VAN ACHTER

Het wiskundeprogramma van het voortgezet onderwijs wordt zowel in Nederland als in België gemoderniseerd, d.i. aangepast aan de eisen van de moderne wiskunde. In België worden zelfs de traditionele te sterk gescheiden takken van de wiskunde, (rekenkunde, algebra en meetkunde), radicaal geunifieerd op basis van de verzamelingenleer naar de opvattingen van G. Papy. Het vooruitstrevend programma voor de zesden (eerste jaar van het algemeen vormend onderwijs) is nu, vanaf september 1968, het enige officiële programma geworden; ook het nationaal katholiek onderwijs doet net hetzelfde.

Nu het lager onderwijs basisonderwijs wordt, kan en moet de vraag gesteld worden of de diepgaande wijzigingen in het wiskunde-onderwijs vanaf de leeftijd van 12 jaar, geen veranderingen in het rekenonderwijs van de „lagere" school noodzakelijk maken. Moet men de doelstellingen van het rekenonderwijs in de lagere school niet wijzigen in functie van een meer adequate voorbereiding op het wiskundig denken van het voortgezet onderwijs? Maar, moet ook zonder die voorbereiding op het later onderwijs niet de vraag gesteld worden: benut het traditionele rekenen wel alle potentialiteiten van alle kinderen in hun groei naar het wiskundig denken?

Vele onderzoekers zijn inderdaad de mening toegedaan dat het traditionele rekenprogramma èn de traditionele methodische aanpak niet meer voldoen als vorming en als voorbereiding op verdere studies. Het programma is al te zeer begrensd tot de vier hoofdbewerkingen en ontneemt het kind de kansen op waarlijk interessante aspecten van de wiskunde [1]. Aldus zouden de stereotype reeksen rekenoefeningen de sfeer al te zeer verpesten, daar waar het ontdekken van inzichten in wiskundige structuren de leerstof onverwacht boeiend kan maken. Terecht moet men blijven eisen dat de kinderen goed kunnen rekenen. Maar, zal de rekenvaardigheid geen baat vinden bij een breder zicht op de systemen van de wiskundige werkzaamheden?

Zoals Deckers glashelder heeft aangetoond, is rekenen te vergelijken met een machine en zijn bewerkingen te beschouwen als gemechaniseerde hulpmiddelen [2]. De laatste 30 jaar bestond de positieve bijdrage vooral in het feit dat men de rekenmechanismen niet louter mocht inoefenen, maar dat de kinderen er een verstandig gebruik van moesten leren maken. Men sprak van „inzichtelijk rekenen", „functioneel rekenen" of van „meaningfull arithmetic", „discovering arithmetic" enz. Het gemeenschappelijke van deze verbeteringen is gelegen in het feit dat het kind zijn denken kan inschakelen in het leren rekenen door iets van de werking van het mechanisme te begrijpen. Men blijft echter op het niveau van het mechanisme. En hierin ligt dan weer een beperking. Zo bleef het denken beperkt en het drilwerk overheersen.

Het nieuwe, dat nu vanuit de moderne wiskunde wordt aangebracht, ligt hierin dat men zeer duidelijk stelt dat de mechanismen gebaseerd zijn op wiskundige structuren, door relaties gedefinieerd op verzamelingen. „De wiskunde bestudeert gestructureerde verzamelingen; voor die structuur zorgen de relaties" [3]. Een voorbeeld van relatie. Tellen is „de beschikking hebben over een tuig, nl. de rij der getallen of een reeks woorden" [4], doch in het kader van de „New Math" wordt dit werktuiggebruik ingeleid door nieuwe voorbereidende oefeningen als het vormen van verzamelingen en het leggen van relaties, waarvan de één-één-verbinding beslissend is voor het tellen.

We mogen zeggen: het traditionele rekenen bestaat in het al of niet inzichtelijk gebruik maken van rekenmechanismen; gemoderniseerd rekenen wil ook de structuren aanbrengen waarop deze mechanismen steunen.

Deze grondige wijzigingen in het rekenprogramma (over de methodische wijzigingen hebben we het in dit artikel niet) wil men niet louter onder de druk van het voortgezet onderwijs doorvoeren. In sommige landen zijn de vernieuwingsactiviteiten veel intenser aan de gang in het lager onderwijs dan in het voortgezet, omdat men redelijkerwijs met de basis (dus in het kleuteronderwijs?) moet beginnen. Het verwondert dan ook niet dat publicaties over deze modernisering l.o. reeds vanaf ongeveer 1959 verschijnen. Die onderzoekingen tonen aan dat het niet noodzakelijk is eerst met de rekentechnieken te beginnen, alvorens de logicomathematische implicaties ervan door de kinderen te laten begrijpen. Zeker vanaf de leeftijd van vijf jaar zou een niet te verwaarlozen logisch denken tot ontwikkeling kunnen worden gebracht. Zie de werken van: J. S. Bruner, Z. P. Dienes, J. Piaget, R. R. Skemp, Nicole Picard, e.a. Het rekenprogramma zou hierdoor een meer mathematisch uitzicht krijgen. Het zou nl. meer behelzen dan de traditionele vier hoofdbewerkingen, maar uitgebreid worden tot algebra en meetkunde, waarbij gezocht wordt naar de overkoepelende begrippen en structuren, die vanaf het eerste leerjaar duidelijk moeten naar voren komen. Het recente feit dat psychologen en wiskundigen zich zijn gaan bemoeien met het rekenen van de lagere school, heeft voor gevolg gehad dat dit rekenen uit verstarring en isolement werd bevrijd. In de Verenigde Staten is reeds geruime tijd „arithmetic" tot „Elementary School Mathematics" geëvolueerd [5].

Nochtans, het traditionele rekenen wordt niet afgewezen. Het oude wordt in het nieuwe en bredere kader geïntegreerd en gerespecteerd. Volgens een Amerikaans rapport [6] moeten volgende doelstellingen als hoofddoelen behouden blijven: ontwikkeling van hoeveelheids- en getalbegrip; een zo hoog mogelijke graad van rekenvaardigheid; het kunnen toepassen van rekentechnieken in het dagelijks leven; een inzicht in ons tientallig stelsel. Volgende nieuwe doelstellingen zouden hieraan moeten worden toegevoegd: een inzicht in de structuur van de wiskunde, zijn wetten en principes, zijn samenhang en geordendheid en in de wijze waarop de wiskunde zich ontwikkelt en uitbreidt; elk kind degelijk voorbereiden op verdere studie in de wiskunde in functie van zijn mogelijkheden en zijn toekomstige onderwijsoriëntatie [7].

De nieuwe doelstellingen steunen op het recente onderzoek: kinderen zijn tot logisch denken in staat en kunnen complexe leersituaties aan. Er wordt ook vooropgezet dat het programma met de verschillende begaafdheden zou rekening houden.

KENMERKEN VAN DE MODERNISERING REKENEN L.O.

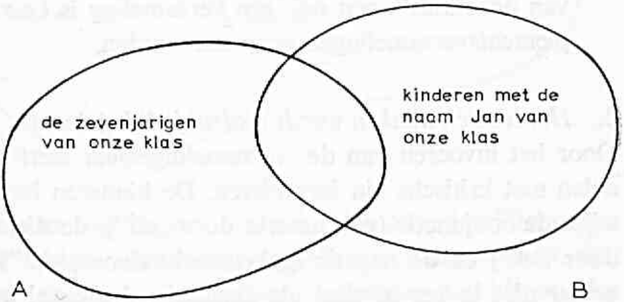
1. De verzamelingenleer geeft de hoofdlijn aan

„Het begrip verzameling ligt aan de basis van de hele wiskunde zoals die op dit ogenblik is opgevat. Zij is een basisterm van waaruit men de hele wiskunde kan reorganiseren" [8]. Een bepaling ervan geven, zoals de logica die eist, kan men niet, net zoals de bepaling van een punt in de meetkunde. Het is een eerste begrip. Toch kan men zeggen dat een verzameling de wiskundige term is van „collectie", als men tenminste in die collectie alle elementen zonder de minste dubbelzinnigheid kan onderscheiden. Wij bedoelen hiermee het volgende: een bepaald ding behoort tot de verzameling of behoort er niet toe. Nu kan men door opsomming een verzameling samenstellen, maar voor hele grote verzamelingen lijkt deze manier wel ondoenbaar. Er is daarom ook nog een andere zeer gebruikelijke werkwijze: een verzameling kan ook worden bepaald doordat men een goedomschreven eigenschap oplegt aan de elementen. Vormen bijvoorbeeld de inwoners van de stad Antwerpen een verzameling? Ja, als ondubbelzinnig vastligt wat „inwoner" betekent, in die zin dat geen enkele mens in twee gemeenten tegelijk kan worden ingeschreven. Dan pas kunnen we met zekerheid zeggen of een willekeurig mens al of niet tot de inwoners van de stad Antwerpen moet worden gerekend. Wij spreken dus van een verzameling in wiskundig opzicht als het criterium voldoende gepreciseerd is (in het geval van de tweede werkwijze).

De leerlingen laat men de beide werkwijzen hanteren om verzamelingen te vormen. Al dadelijk heeft men behoefte aan een concrete voorstelling. Men kan de elementen laten tekenen tussen accolades, maar meer succes heeft het tekenen van een gesloten kromme omheen de elementen. Een verzameling kan veel elementen of weinig elementen bevatten; een paar bijzondere verzamelingen zijn deze met slechts één element (singleton) of zonder elementen (lege verzameling).

Laat ons even een idee geven van de denkmogelijkheden op basis van de verzamelingenleer. Stel dat we een verzameling vormen met de kinderen van onze klas die reeds zeven jaar zijn (verzameling A). Bovendien vormen we een verzameling met de kinderen van onze klas die de naam Jan dragen (verzameling B). Vanzelfsprekend laten we de kinderen deze oefening acteren in een vrije ruimte en door gebruik te maken van touwen. Een kind mag de oefening daarna op het bord komen voorstellen. Zie figuur 1.

Fig. 1



Volgende verzamelingen kunnen worden gevormd:

1. De verzameling van de zevenjarigen van onze klas (verzameling A).
2. De verzameling van de kinderen van onze klas met de naam Jan (verzameling B).
3. De verzameling van de zevenjarigen van onze klas met de naam Jan (deelverzameling van A en B)

   Of: de verzameling van de Jannen van onze klas die zeven jaar oud zijn.

Merk op dat een lege verzameling en(of) een singleton steeds kunnen voorkomen. Als geen enkele Jan zeven jaar oud is, dan is de deelverzameling van A en B ledig. En als er slechts één Jan is in de klas, is verzameling B een singleton.

Volgende bewerkingen met verzamelingen kunnen worden gemaakt:

1. De verzameling van de kinderen van onze klas die zeven jaar oud zijn EN de naam Jan dragen (doorsnede).
2. De verzameling van de kinderen van onze klas die zeven jaar oud zijn OF de naam Jan dragen (vereniging).
3. De verzameling van de kinderen van onze klas die NIET zeven jaar oud zijn (complementsverzameling van de verzameling A).
4. De verzameling van de kinderen van onze klas die NIET de naam Jan dragen (complementsverzameling van de verzameling B).
5. De verzameling van de kinderen van onze klas die NIET zeven jaar oud zijn EN NIET de naam Jan dragen (complementsverzameling van de vereniging van verzameling A en de verzameling B).
6. De verzameling van de zevenjarigen van de klas die geen Jan zijn (verschil van de verzameling A en de verzameling B).
   De verzameling van de Jannen van de klas die NIET zeven jaar oud zijn (verschil van verzameling B en de verzameling A).

   Er dient opgemerkt dat het hier steeds gaat over „de kinderen van onze klas", wat ook een verzameling is t.o.v. dewelke de complementsverzamelingen genomen worden.

2. *Het logisch denken wordt uitdrukkelijk geleerd*

Door het invoeren van de verzamelingenleer leert het kind zijn oordelen met kritische zin formuleren. De kinderen hanteren op spontane wijze de conjunctie (gekenmerkt door „en"), de disjunctie (gekenmerkt door „of") en de negatie (gekenmerkt door „niet"). Het logische zit echter niet in het oordeel als dusdanig, doch wel in het afleiden van het ene uit het andere oordeel of oordelen. Welnu, een gemoderniseerd programma voorziet in deducties. Dit onderstelt de invoering van nog een paar andere voegtekens (in het Frans „connecteurs" geheten): „als . . . dan" (implicatie) en „als en slechts als" (equivalentie).

Nemen we vooreerst een voorbeeld voor de implicatie en maken we gebruik van de logiblokken van Hull-Dienes: een verzameling van 48 blokken bepaald door 4 vormen, 3 kleuren, 2 grootten en 2 dikten. De kinderen vormen enerzijds de verzameling van de blauwe blokken en anderzijds de verzameling van de driehoeken. Eerst gaan we de kennis van voorafgaande begrippen toetsen. Wijs aan: de verzameling van de blauwe driehoeken (hier hebben we de doorsnedeverzameling welke gedefinieerd is door de conjunctie van twee eigenschappen

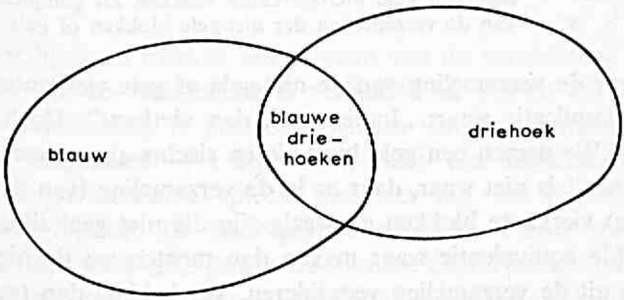
„blauw EN driehoekig"); de verzameling van de blokken die blauw OF driehoekig zijn (hier hebben we de vereniging, welke gedefinieerd is door de disjunctieve „of"); de verzameling van de niet-blauwe blokken (complementsverzameling, welke gedefinieerd is door de negatie „niet"). Daarna stellen we de nieuwe oefening voor: „We gaan alleen werken met de verzameling van de blauwe of driehoekige blokken. *Als* je een niet-blauwe blok neemt, wat kun je *dan* van die blok nog zeggen?" Het goede antwoord luidt: „Ik neem een driehoek". Dit noemen we de implicatie. Nu kan men het kind tot de ontdekking laten komen dat er in het gegeven geval slechts twee ware implicaties zijn:

„Indien niet-blauw, dan driehoek".

„Indien niet-driehoek, dan blauw".

Is volgende implicatie ook waar: „Indien blauw, dan niet-driehoek"? Neen, want men kan ook blauwe driehoeken nemen. Zie figuur 2.

Fig. 2



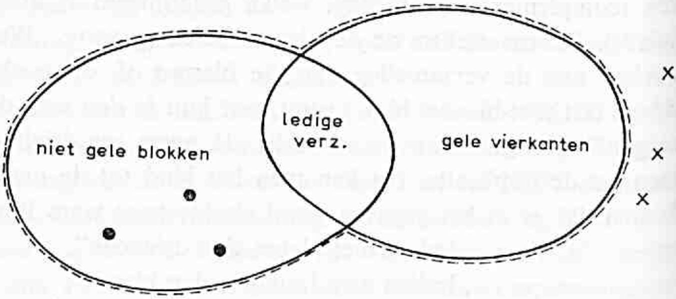
„Indien driehoek, dan niet-blauw", is ook vals om dezelfde reden. Men kan nog vier andere implicaties opstellen: „Indien blauw, dan driehoek", „Indien driehoek, dan blauw", „Indien niet-blauw, dan niet-driehoek" en „Indien niet-driehoek, dan niet-blauw". Ook deze vier implicaties zijn vals binnen de gestelde disjunctie „blauw of driehoek". Aangehaald voorbeeld is ontleend aan Dienes [9].

Op dezelfde wijze kan men met de logiblokken andere disjuncties vormen en de leerlingen op zoek laten gaan naar de ware implicaties.

Een voorbeeld voor de equivalentie. Ziehier een probleemsituatie. Volgende equivalentie willen we als waar doen doorgaan: „We nemen een gele blok als en slechts als we een vierkante blok nemen". De vraag is: welke is de grootst mogelijke verzameling van de logiblokken die aan deze uitspraak beantwoordt?

Oplossing: Nemen we de verzameling van de niet-gele of gele vierkante blokken. De complementsverzameling hiervan is de verzameling van de gele niet-vierkante blokken. Vestigen we onze aandacht op de verzameling van de niet-gele of gele vierkanten. Figuur 3 geeft een idee van deze verzameling.

Fig. 3



- - - - - verzameling van de niet-gele blokken of gele vierkanten

● ● ● hier zijn vierkante blokken aanwezig die niet geel zijn (blauw of rood)

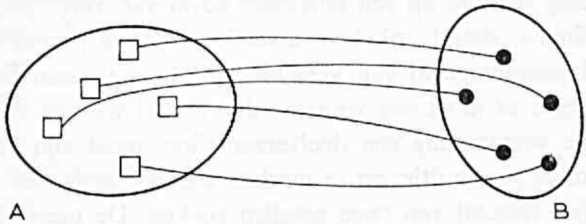
× × × hier zijn gele niet-vierkante blokken als complements-verzameling van de verzameling der niet-gele blokken of gele vierkanten

Voor de verzameling van de niet-gele of gele vierkanten is de volgende implicatie waar: „Indien geel, dan vierkant". Doch, de equivalentie „We nemen een gele blok als en slechts als we een vierkante blok nemen" is niet waar, daar er in de verzameling (van de niet-gele blokken) vierkante blokken aanwezig zijn die niet geel zijn. Willen we dezelfde equivalentie waar maken dan moeten we de niet-gele vierkanten uit de verzameling verwijderen. We hebben dan tevens de grootst mogelijke verzameling met de logiblokken.

3. *De verzamelingenleer gaat de kennismaking met de getallen vooraf*

Sommigen laten uitschijnen dat de enige reden waarom men eerst verzamelingen invoert, gelegen is in het feit dat dan de getallen met hun bewerkingen wezenlijker kunnen worden begrepen. Nu is de getallenleer slechts een bepaald toepassingsgebied van de verzamelingenleer, een particulier geval. Ons lijkt het begrip verzameling op de eerste plaats waardevol op zichzelf en omwille van de wiskunde in haar geheel. Eigenschappen van verzamelingen zullen terug te vinden zijn in rekenkundige, maar ook in andere wiskundige verzamelingen. Op de tweede plaats zien we in de verzamelingenleer een enige gelegenheid om reeds op vroege leeftijd met succes te kunnen beginnen met het leren logisch denken. Slechts op de derde plaats denken we aan de getallenverzamelingen. Een getal verwijst naar een verzameling dingen en niet naar die dingen afzonderlijk genomen. Aldus kan men zeggen dat getallen geen zelfstandig bestaan leiden. Zo verschijnt een natuurlijk getal pas, wanneer men zich de vraag stelt: „Hoeveel elementen bevat deze verzameling?". Maar, zo zou men kunnen opwerpen, onderstelt men nu niet stilzwijgend de kennis van de geordende reeks getalnamen, één, twee, drie enz.? Niet zo onmiddellijk. Want het kunnen tellen met getalnamen steunt op een „tellen zonder getalnamen". Wat wij hiermee bedoelen blijkt uit de wiskundige relatie van figuur 4.

Fig. 4



Wij kunnen door lijnen te trekken een element van de verzameling A met een element van de verzameling B verbinden en wel zo dat *elk* element van de verzameling A juist één element van de verzameling B krijgt, en ook omgekeerd. We hebben hier met een fundamentele relatie te doen. In de wiskunde spreekt men hier van een bijectieve functie of kortweg bijectie. De kinderpsycholoog Jean Piaget sprak reeds in 1941, in zijn werk „La genèse du nombre chez l'enfant", van „une correspondance terme à terme". Kinderen zullen waarschijnlijk spreken van een één-één-verbinding. Bij het tellen wordt ook een bijectie gelegd: elk element van een gegeven verzameling krijgt juist één telwoord. Het laatst uitgesproken telwoord duidt de hoeveelheid elementen aan van de verzameling. Zo is de verzameling van de natuurlijke getallen oneindig: $N = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$. Er kan inderdaad na „het laatste" getal nog een groter getal worden gevonden. Kardinaalgetallen van eindige verzamelingen noemt men natuurlijke getallen. Het getal nul is dan een natuurlijk getal: we vormen bijvoorbeeld met de logiblokken de verzameling van de rode èn blauwe blokken; deze verzameling is leeg met als kardinaalgetal nul of 0.

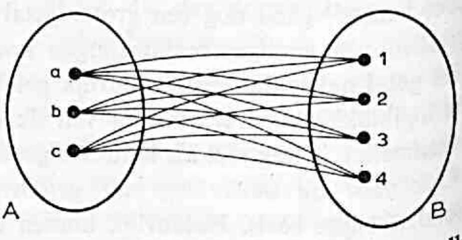
Ook voor *de bewerking met getallen* is de verzamelingenleer een noodzakelijke basis. Natuurlijk komen eerst de bewerkingen met verzamelingen voor en pas daarna de bewerkingen met natuurlijke getallen.

Nemen we *de vereniging* van twee verzamelingen. Deze is gelijk aan een andere verzameling met als elementen de elementen van de eerste of tweede verzameling. Hierbij doen zich verschillende mogelijkheden voor: de doorsnede van de twee verzamelingen in kwestie kan al of niet leeg zijn en de ene verzakeling kan een deelverzameling zijn van de andere. In welk geval is de som van de kardinaal-getallen van beide verzamelingen gelijk aan het kardinaalgetal van de vereniging? Het antwoord is eenvoudig: als de doorsnede ledig is.

De aftrekking op twee natuurlijke getallen steunt op *het verschil* van twee verzamelingen. Men kan natuurlijk ook de aftrekking beschouwen als de omgekeerde bewerking van de optelling. Net als de optelling steunde op een bijzonder geval van vereniging van twee verzamelingen, steunt ook het verschil van twee natuurlijke getallen op een bijzonder geval van verschil van twee verzamelingen. Of anders gezegd: er moet een voorwaarde vervuld worden en deze is dat de tweede verzameling een deelverzameling moet zijn van de eerste. Het is misschien nuttig op te merken dat het essentiële bij de aftrekking is: het verschil van twee getallen zoeken. De meest logische verwoording is dan ook: „Wat is het verschil van 5 en 3?”. Natuurlijk is de uitdrukking „5 min 3 is gelijk aan” ook volkomen correct. Doch woorden als „wegnemen” en dergelijke zijn minder op hun plaats. Het is toch duidelijk dat bij de aftrekking van getallen niets wordt weggedaan, in de zin van buiten beschouwing gelaten. Volledigheidshalve geven we ook de definitie van het verschil van twee verzamelingen A en B: het is een andere verzameling met alle elementen van de verzameling A die geen element zijn van de verzameling B.

Het produkt van twee natuurlijke getallen kan aangebracht worden steunende op het begrip produktverzameling. De produktverzameling van twee verzamelingen A en B is de verzameling van alle koppels met als eerste element een element van A en als tweede element een element van B. Figuur 5 zal dit verduidelijken.

Fig. 5



Van elk element van de verzameling A trekt het kind een lijn naar elk element van de verzameling B. De aldus verbonden elementen vormen koppels (bijvoorbeeld het koppel (a,2).) Deze koppels zijn de elementen van een nieuwe verzameling, die we produktverzameling noemen.

En we schrijven als volgt: A × B. Let ook op het feit dat het koppel (a,2) niet gelijk is aan het koppel (2,a). Want in het laatste geval is de relatie van B naar A gelegd.

Het produkt van twee natuurlijke getallen is het kardinaalgetal van de produktverzameling van twee verzamelingen, waarvan de natuurlijke getallen de kardinaalgetallen zijn. Als n het kardinaalgetal is van de verzameling A en m het kardinaalgetal van de verzameling B, dan is n maal m gelijk aan het kardinaalgetal van A maal B.

In ons geval: $3 \times 4 = 12$.

Nu kan men een verdeling of partitie aanbrengen in de verzameling koppels en wel als volgt: A × B =

(a,1), (a,2), (a,3), (a,4)
(b,1), (b,2), (b,3), (b,4)
(c,1), (c,2), (c,3), (c,4)

wat met getallen als volgt overeenkomt:

$3 \times 4 = 4 + 4 + 4$

Een andere partitiemogelijkheid van dezelfde produktverzameling is de volgende: A × B =

(a,1), (b,1), (c,1)
(a,2), (b,2), (c,2)
(a,3), (b,3), (c,3)
(a,4), (b,4), (c,4)

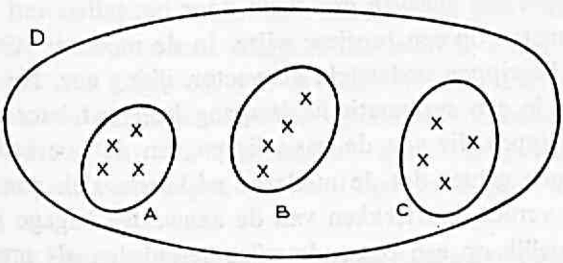
Dit komt als volgt met getallen overeen:

$3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3$

Uit beide resultaten volgt dat het produkt van twee natuurlijke getallen ook gelijk is aan de som van gelijke termen.

Voor deze laatste werkwijze met getallen vinden we ook in de verzamelingenleer een basis, namelijk de vereniging van gescheiden gelijkmachtige verzamelingen. Zie figuur 6.

Fig. 6



De vereniging wordt als volgt symbolisch aangeduid: D = AUBUC.

Met getallen: $12 = 4 + 4 + 4$. Er is nog geen sprake van een produkt van twee getallen, daar er ook nog geen sprake is van een produktverzameling met de noodzakelijke koppels.

De beide werkwijzen, produktverzameling en vereniging, zijn reeds veelvuldig beproefd, vooral in de Verenigde Staten. Een voorbeeld van produktverzameling: tijdens een volksdansje wil men alle jongens en meisjes alle mogelijke paartjes laten vormen. Een voorbeeld van vereniging: de kinderen in de klas zijn verdeeld over zeven tafeltjes van elk vier leerlingen.

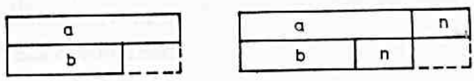
Tenslotte merken we nog op dat *de doorsnede* van twee verzamelingen een bewerking is die geen overeenstemmende bewerking met getallen heeft.

4. *Algebraïsche principes komen meer op de voorgrond*

De verzamelingenleer leidt het kardinaalgetal in. Het kardinaalgetal is de uitdrukking van *de hoeveelheid* elementen van een verzameling. Ook een kind jonger dan 5 jaar heeft dagelijks ervaringen in verband met verzamelingen. Zijn kennis van hoeveelheden allerhande, zijn rekenkundige woordenschat en zijn vertrouwdheid met getallen zijn hiervoor bewijzen. De verzamelingenleer verzet zich niet tegen het bevorderen van deze globale hoeveelheidsbeleving, want in werkelijkheid is hier van een pre-mathematische verzamelingenleer sprake.

Maar, er is nog meer. Naast hoeveelheden zijn er *grootheden.* En weer zien we dat jonge kinderen vroeg zin verwerven voor verhoudingen tussen grootheden. De werkelijkheid waarin het kind leeft zit immers vol verhoudingen inzake lengte, gewicht, omvang, inhoud, prijs, tijd enz. Misschien moet toch even de vraag gesteld worden, wat we met deze functionele bagage inzake grootheden in het kader van een modernisering gaan aanvangen. Het is namelijk zo dat *het meten* van grootheden een meer genuanceerde voorbereiding vergt dan het tellen van hoeveelheden. Men kan op een grootheid een ijk toepassen die toelaat een gegeven grootheid door het tellen van het aantal eenheden te meten op een preciese wijze. In de moderne wiskunde worden hierbij begrippen ondersteld als vector, ijking enz. Nu komen deze begrippen in een systematische leergang heel wat later aan de orde dan de begrippen die aan de basis liggen van de hoeveelheidsbelevingen. We menen echter dat de moderne wiskunde zich niet zal verzetten tegen het verder doortrekken van de aanwezige bagage grootheden. Dit kan namelijk op een passende wijze geschieden als pre-numerieke algebra.

Tussen de soorten grootheden zijn vooral lengte, oppervlakte en omvang goed geschikt voor deze pre-numerieke algebraïsche voorbereiding op het getal (ditmaal als uitdrukking van verhouding). Vergelijkingen en metingen, welke ook jonge kinderen graag verrichten, brengen deze kinderen tot zeer fundamentele ervaringen als: groter dan, kleiner dan, evengroot enz. We merken op dat bij hoeveelheden eerder sprake is van: meer, minder en evenveel. Met deze grootheden zijn zelfs algebraïsche bewerkingen mogelijk, waarbij het kind zekere eigenschappen kan opmerken. Zo bijvoorbeeld met het colour-factor-materiaal, dat met 12 proportionele lengte-grootheden werkt op basis van de cm^3, kan men volgende bewerking maken: roos plus violet is gelijk aan violet plus rood. Dit geeft in werkelijkheid de commutatieve eigenschap van de optelling. Sommige auteurs willen hierbij reeds op vijfjarige leeftijd symboliseren: $r + v = v + r$. Men kan zelfs willekeurige lettersymbolen gebruiken. Zie figuur 7.



Symbolisch uitgedrukt: $a - b = (a + n) - (b + n)$

Een hele reeks soortgelijke ervaringen kunnen worden opgedaan zonder dat daarbij getallen te pas komen[10]. „Il peut sembler révolutionnaire de dire que l'on devrait connaître certains faits algébriques avant de pouvoir apprendre complètement à fond certaines opérations arithmétiques[11]. Deze voorbereiding op het getal via proportionele grootheden heeft het voordeel dat de invoering van het getal hier van bij de aanvang het rationale getal is (ratio: verhouding): de verzameling van de natuurlijke, gehele en gebroken getallen.

Met dergelijk materiaal op basis van de kubus, en daarom ook cuboïd materiaal genoemd, kan de onderwijzer zich laten verleiden tot wonderbaarlijke resultaten inzake rekenvaardigheid. Zulke schitterende prestaties slaan in als een bom. Maar, beïnvloeden zij ook gunstig het wiskundig denken? L. van Gelder merkt met Dienes op, „dat dergelijk materiaal te vroeg gestructureerd aangeboden wordt, zodat het kind te weinig gelegenheid krijgt om zelf inventief te zijn. Ernstiger zijn nog de bezwaren om oefenspelen zonder grondige voorbereiding in te voeren, omdat dan alleen een mechanisme wordt aangebracht, waarbij in het geheel geen beroep gedaan wordt op het logisch denken"[12].

Men dient zich dus te bezinnen op de waarde en de plaats van deze algebraïsch-rekenkundige methode in het kader van een totale gemoderniseerde aanpak. Ons inziens blijft de verzamelingenleer de hoofdlijn aangeven. Wil men parallel met deze „basic-set approach" ook aan algebra zonder getallen doen, dan moet men naar ons oordeel deze eerste fase in het algebraïsche denken onderbreken om de inleiding van de natuurlijke getallen op verzamelingen te laten plaats grijpen. Ook de bewerkingen met deze getallen zal men baseren op bewerkingen met verzamelingen. Daarna kan de tweede fase van het algebraïsche denken aanvangen: de algebra met getallen. Bovendien komt dit soort materiaal goed van pas voor de noodzakelijke rekenvaardigheid. Schematisch stellen we deze oplossing als volgt voor:

Hoofdlijn: verzamelingenleer

1° logische spelletjes	2° - van verzameling naar getal - van bewerkingen met verzamelingen naar bewerkingen op getallen	3° - algebra met getallen - uitbreiding van getalbegrip - toepassingen

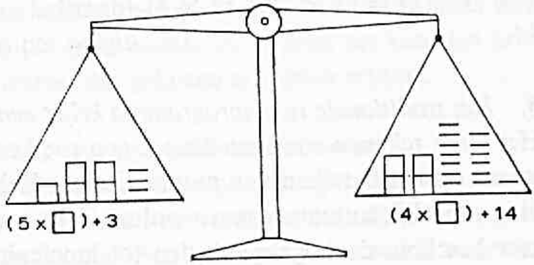
Ondergeschikt: de algebraïsch-rekenkundige aanpak

1° pre-number algebra	2° - algebra met getallen - rekenvaardigheid

Bespreken we nu de fase die we als algebra met getallen hebben aangeduid. De traditionele „sommetjes", zoals $2 + 3 = .$ en $5 = 2 + .$ worden als wiskundige „vraagzinnen" of „statements" opgevat. Zo is $3 + 1 = 4$ een ware uitspraak. $3 + 1$ is dus gelijk aan 4. Men kan zeggen dat beide verschillende termen of uitdrukkingen zijn van eenzelfde getal. Voor $\square + 1 = 4$ geldt slechts één oplossing. Kent het kind nog geen negatieve getallen, dan is voorlopig $\square + 4 = 2$ onmogelijk op te lossen. Dit wil zeggen, in de verzameling van de natuurlijke getallen (N) is geen element te vinden dat, opgeteld bij 4 gelijk zou zijn aan 2.

Geven we nog enkele andere voorbeelden van wiskundige vraagzinnen: $\square + 2 < 7$ heeft als oplossing een element van de verzameling $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; $\square + 1 = \square + 2$ is een vraag waarvan de verzameling der oplossingen leeg is; $2 \times \square = \square + \square$ heeft elk getal van de beschouwde verzameling als oplossing. Deze wijze van werken is sterk verspreid in de Verenigde Staten, en wordt als symboolspel voorgesteld. Elke vraagzin waarbij een getal moet worden aangevuld wordt ook „open sentence" genoemd. We kunnen ook spreken van „open bewering".

Een andere manier om vergelijkingen op te te bouwen kan door middel van een algebraïsche balans gebeuren. Zie in figuur 8, een voorbeeld ontleend aan Edwina Deans.



Het probleem bestaat er in te trachten de situatie zoveel mogelijk te vereenvoudigen. De balans moet steeds in evenwicht blijven. Stellen we de vierkantjes of hokjes voor als pakjes en de lijntjes als stokjes, dan is de eerste vereenvoudiging als volgt mogelijk: we nemen twee pakjes weg en we bekomen

$(3 \times \square) + 3 = (2 \times \square) + 14$

We nemen nogmaals twee pakjes weg:

$(1 \times \square) + 3 = 14$

We nemen nu drie stokjes weg:

$1 \times \square = 11$

Hieruit volgt dat de waarde van één pakje overeenstemt met het getal 11. De oplossing is dus als volgt: $(5 \times 11) + 3 = (4 \times 11) + 14$.

De aftrekking en de deling worden in dit kader gepresenteerd als omgekeerde bewerkingen van respectievelijk de optelling en de vermenigvuldiging. Aldus is $a - b = n$, waarbij n het getal is dat bij b moet worden opgeteld om a te bekomen. Bij de deling $a : b = q$, is q het getal dat met b vermenigvuldigd het getal a als resultaat geeft.

Sommige getallen hebben als bijzondere eigenschap dat zij het resultaat van de bewerking niet beïnvloeden. Deze getallen vertegenwoordigen het neutrale element van de verzameling voor de corresponderende bewerkingen. Dit is het geval met O bij de optelling en aftrekking; en het getal 1 bij de vermenigvuldiging en deling.

Tenslotte wil men ook inzicht bijbrengen in de structuur van de bewerkingen, door de klemtoon te leggen op de eigenschappen van de bewerkingen:

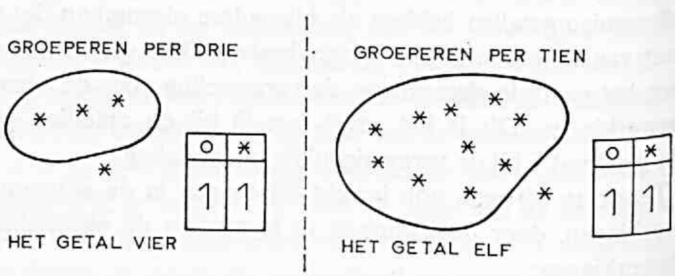
$4 + (3 + 2) = (4 + 3) + 2$ (associativiteit van de optelling)
$4 \times (3 \times 2) = (4 \times 3) \times 2$ (associativiteit van de vermenigvuldiging)

$4 + 3 = 3 + 4$ (commutativiteit van de optelling)
$4 \times 3 = 3 \times 4$ (commutativiteit van de vermenigvuldiging)
$2 \times (3 + 4) = (2 \times 3) + (2 \times 4)$ (distributiviteit van de vermenigvuldiging ten opzichte van de optelling)

5. Het traditionele rekenprogramma krijgt een ander uitzicht

Het leren rekenen zoals we dat tot nog toe kennen is al te zeer afgestemd op het bereiken van automatismen. Rekentechnieken moeten zo vlug mogelijk automatismen worden. Zelfs vraagstukken worden al te zeer beschouwd als gelegenheden tot inoefening. In het kader van een gemoderniseerd programma rekenen wordt er ook wel ingeoefend, maar men verspeelt er al zijn energie niet aan. Men wil ook tijd overhouden voor het zelfactief ontdekken van rekentechnische structuren. De traditionele getallenkennis wordt uitgebreid tot de negatieve getallen. In vele vernieuwingsprojecten komen negatieve getallen echter slechts terloops aan de orde. Nieuw is ook dat een vermenigvuldiging als 2 x 2 x 2 onder de vorm van een machtsverheffing (2^3) kan worden voorgesteld. Dit laatste is van belang voor een ander nieuw, zoniet revolutionair, leerstofpunt: het leren werken in verschillende talstelsels. Hier is het de bedoeling van bij de aanvang van het schrijven van getallen onder de vorm van meer dan één cijfer een inzicht te geven in de algemene structuur zelf van het positiesysteem met Indo-Arabische cijfers. We leven te vanzelfsprekend in één bijzonder geval van dit ingenieuze systeem, namelijk het tientallige. Het is noodzakelijk dat de kinderen „een van de allerbelangrijkste vondsten die er ooit op het gebied van de mathematische notatie zijn gedaan" [13] nog eens opnieuw voor zichzelf overdoen. Zij zullen dan ontdekken dat een getal op verschillende wijzen kan worden voorgesteld, en dat één voorstelling mogelijk is van verschillende getallen. Dit laatste wordt in figuur 9 duidelijk.

Fig. 9



Tenslotte moet gezegd worden dat volgende leerstofpunten bevestigd worden in hun waarde: inzicht in zeer grote en zeer kleine getallen; het laten ervaren dat verschillende oplossingsmethoden goed kunnen zijn om éénzelfde antwoord te verkrijgen; de nadruk op het schatten en hoofdrekenen; variatie bij het inoefenen van de rekentechnieken. Voegen we er nog aan toe dat inzake metriek stelsel de nadruk moet worden gelegd op daadwerkelijke experimentaties waarbij het kind het arbitraire en conventionele karakter der gekozen eenheden ervaart.

6. *Topologie als verruiming van de traditionele vormleer.*

Topologie is de alzijdige studie van de eigenschappen van de ruimte. Het gebied is ruimer dan meetkunde en vormleer (van Euclides). Welke ervaringen zijn hier van belang? Een kind interesseert zich voor dingen die in zijn bereik liggen; het verplaatst zich desnoods om ze aan te schaffen. Het onderzoekt de mogelijkheden van de dingen en van zijn eigen lichaam. Nemen we een doos: er kan iets in, iets uit, het dekseltje kan open en toe. Ook deuren kunnen open en dicht. Op een bepaald ogenblik van de psychische ontwikkeling is er zelfs een veralgemening: alles wat scharniert en open en dicht kan is een deur. Kinderen interesseren zich ook voor de achterzijde van de dingen. Heel vroeg leren ze een papier omdraaien om te zien wat er langs de andere zijde staat. Kinderen tekenen ook spontaan langs weerszijden van een blad. Al deze ervaringen bevatten belangrijke topologisch begrippen: grens, gebied, binnen en buiten. Met een krijtlijn (één dimensie) tekenen ze op de vloer van de speelplaat een tuin af (twee dimensies) en met blokken bouwen ze een muur (twee dimensies) om een kamer (drie dimensies) af te grenzen. Men kan kinderen een soort puzzel laten kleuren met zo weinig mogelijk verschillende kleuren en waarbij gebieden met een gemeenschappelijke grens eenzelfde kleur niet mogen vertonen.

Het plooien van een blad papier van een bepaalde vorm volgens een symmetrie-as brengt ons op een ander topologisch terrein: de symmetrische wenteling en de rotatie of draaiing rond een spil in hetzelfde vlak. Een voorbeeld ter verduidelijking, ontleend aan Z. P. Dienes [14]. We tekenen op de vloer een zeer grote acht. We trekken twee symmetrie-assen met verschillende kleur. De 8 is nu in vier gebieden verdeeld. In elk van de gebieden neemt één leerling plaats. Zie figuur 10.

Fig. 10

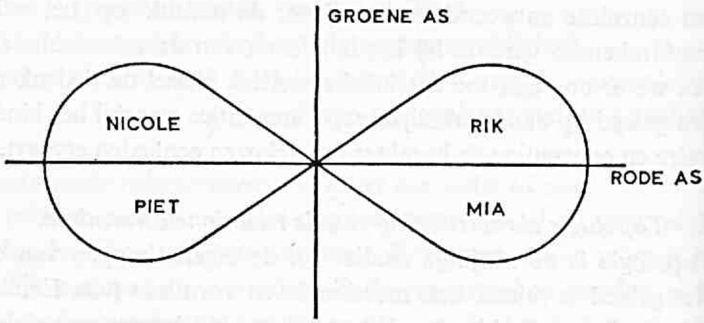
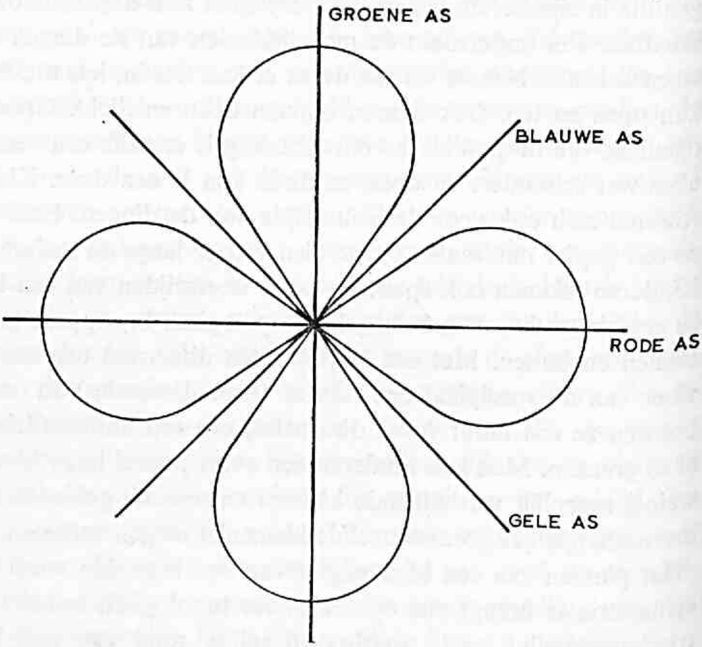


fig. 11



Een vijfde leerling heeft dezelfde figuur, die verkleind op een doorschijnend plaatje is aangebracht, in de hand en gaat gehurkt in het snijpunt van de twee symmetrie-assen plaats nemen. Hij gaat nu wentelen en(of) draaien volgens de aangeduide assen. De vier kinderen moeten zich verplaatsen volgens de aangeduide verandering. Bijvoorbeeld: één wenteling van 180° volgens de groene as. Nicole en Rik verwisselen van plaats, evenals Piet en Mia. Nu kan men een draaiing in het vlak doorvoeren, 180° of eventueel tweemaal 180°. De kinderen zullen tot de ontdekking komen dat tweemaal een draaiing geen verplaatsing noodzakelijk maakt. Men kan de oefening ook moeilijker maken door een wenteling te laten volgen door een draaaiing. Men kan ook een draaiing laten volgen door een wenteling enz. De moeilijkheidsgraad wordt nogmaals verhoogd door een tweede acht te tekenen, zo dat een klaverblad van vier bekomen wordt. Er komen dan natuurlijk nog twee symmetrieassen bij. Zie figuur 11.

Wij staan hier voor een zeer „beweeglijke" meetkunde, (de meetkunde van de transformaties), die veel meer ervaringen biedt dan de kennis van onbeweeglijke geidealiseerde geometrische figuren alleen.

Noten

1 Edwina Deans. Elementary School Mathematics. New Directions. U.S. Department of Health, Education, and Welfare. Bulletin 1963, no. 13, 116 pp., p. 1: „...the regular elementary mathematics program, limited mainley to emphasis upon the facts of the four fundamental processes, is somewhat barren of the fascinating, interesting phases of mathematics".

2 Leo Deckers. Rekenen. In: V. D'Espallier. Nieuwe banen in het onderwijs. Deel II. Antwerpen, Standaard-Boekhandel, 1940², 575 pp., p. 251.

3 Ministerie van Nationale Opvoeding. Leerplan voor wiskunde voor het eerste leerjaar van het rijksmiddelbaar onderwijs van de lagere graad. Zie: methodologische wenken bij B. Relaties.

4 Leo Deckers. Op. cit. p. 250.

5 Wanneer men een tijdschrift als „The Arithmetic Teacher" doorneemt, dan merkt men op dat de inhoud reeds geruime tijd in de richting van een mathematisering is veranderd, alhoewel de titel van het tijdschrift onveranderd is gebleven.

6 Edwina Deans. Op. cit., p. 4.

7 Edwina Deans. Op. cit., p. 4.

8 André Revuz. Mathématique moderne, mathématique vivante. Paris, O.C.D.L. 1965, 90 pp., p. 9.

9 Zoltan P. Dienes, L'apprentissage de la logique. Lier, J. Van In, 52 pp., p. 14-15.

10 V. van Achter. Praktische handleiding voor het gebruik van het colour-factor-materiaal. Lier, J. Van In. 16 pp., p. 4-8.
H. A. Thompson. Pre-Number Mathematics. The First Year, Part One. Heinemann, London, 1962, 62 pp.
Gattegno Roller e.a. Exercices qualitatifs. Neuchatel, Delachaux & Niestlé, 1964, 31 pp.

11 Zoltan P. Dienes. Construction des mathématiques. Paris, P.U.F. 1966, 180 pp., p. 82.

12 L. van Gelder. Modern rekenen/New Mathematics in de basisschool. *Onderwijs en Opvoeding*, 18 (1967), febr., 42-46, p. 44.

13 W. J. Brandenburg. Modernisering van het wiskunde-onderwijs. Groningen, Wolters-Noordhoff, 1968, 147 pp., p. 43.

14 Z. P. Dienes & E. W. Golding. Exploration de l'espace et pratique de la mesure. Lier, J. Van In. 1966, 88 pp., p. 32-33.

Aanvullende literatuur.

1. Z. P. DIENES. La mathématique moderne dans l'enseignement primaire. Paris, O.C.D.I., 1965, 90 pp.
2. Z. P. DIENES & E. W. GOLDING. Les premiers pas en mathématique. 3 volumes: I. Logique et jeux logiques. II. Ensembles, nombres et

puissances. III. Exploration de l'espace et pratique de la mesure. Lier, J. Van In, 1966, respectievelijk 101, 125 en 88 pp.

3. J. S. BRUNER. The Process of Education. Cambridge, Harvard University Press, 1961.
4. R. R. SKEMP. Reflective Intelligence and Mathematics. British Journal of Educational Psychology, 31 (1961), part 1; february.
5. P. GRECO, J. B. GRIZE, S. PAPERT & J. PIAGET. Problèmes de la construction du nombre. Paris, P.U.F., 1960, 217 pp.
6. NICOLE PICARD. Une expérience au Cours Préparatoire. Le Courrier de la Recherche Pédagogique, Mars 1966, no. 27, 119 pp., p. 12-76.
7. NICOLE PICARD. Recherches sur l'initiation aux mathématiques au cycle élémentaire. Le Courrier de la Recherche Pédagogique, 1967, no 31; 102 pp., p. 5-41.
8. SETON POLLOCK. The Basic Colour-Factor Guide. London, Heinemann, 1965, 246 pp.
9. F. GOFFREE, A. A. HIDDINK & J. M. DIJKSHOORN. Rekenen en didactiek. Groningen, Noordhoff. 1966, 275 pp.
10. UNESCO INSTITUTE FOR EDUCATION. Mathematics in primary education. Hamburg,1966, 164 pp. Compiled by Dr. Z. P. DIENES.
11. UNESCO INSTITUTE FOR EDUCATION. Mathematics reform in the primary school. Hamburg, 1967, 130 pp. Prepared and edited by J. D. WILLIAMS.
12. V. VAN ACHTER, S. J. C. FREUDENTHAL-LUTTER, J. J. DE JONGH & CHR. JANSEN. Denken en Rekenen. Werkschriften door Nicole PICARD. 1. Langs kromme lijnen. 2. Van verzameling naar getal. 3. Ordenen. 4. Bewerkingen. 5. Getallen en hun voorstelling. Handleiding door V. VAN ACHTER & J. VAN DER ZEYP. Malmberg. J. v. In. 1968.
13. V. VAN ACHTER. Modernisering van het rekenonderwijs in de lagere school. 's-Hertogenbosch, L. C. G. Malmberg & Lier, J. Van In (ter perse).

Curriculum Vitae V. Van Achter

Valeer Van Achter, geboren 13 maart 1932, studeerde voor onderwijzer te Oostakker (Gent) bij Broeder Dr. Denijs (1951). Na één jaar onderwijspraktijk studeerde hij Pedagogiek aan de Universiteit te Leuven. Promoveerde tot licentiaat in de Pedagogische Wetenschappen met een proefschrift, o.l.v. Prof. D'Espallier getiteld „Onderzoekingen in verband met het probleem der rekenrijpheid" (1958). Is sedert 1958 leraar pedagogiek aan de middelbare en lagere normaalschool Pius X te Antwerpen. Is tevens professor in de bijzondere pedagogiek aan de afdeling logopedie van de Hogeschool voor Vrouwen te Antwerpen.

Publiceert in Tijdschrift voor Opvoedkunde, Jeugd in School en Wereld, Pedagogische Periodiek en Katolieke Schoolgids over problemen m.b.t. taalfilosofie en didactiek, hedendaagse rekendidactiek inz. de modernisering van het rekenen op de basisschool en de inschakeling van moderne middelen. Schreef: „Inleiding tot de Colour-factor-rekenmethode" (1965) en „De modernisering van het rekenonderwijs" (1969).